ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

И. А. ВЕКОВИЩЕВА

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

В настоящей задаче речь пойдет о материалах, обладающих пьезоэлектрическим эффектом и нашедших в последние десятилетия широчайшее применение в технике. Это чаще всего кристаллы, являющиеся по существу своему анизотропными веществами, для которых неприменима „чистая" теория упругости.

Напряженное состояние такого тела характеризуется, как и обычно, шестью компонентами напряжения σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, взятыми в некоторой прямолинейной прямоугольной системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$. Ориентация выбранной системы координат должна быть строго известна по отношению к кристаллофизической системе координат. При отсутствии объемных сил компоненты напряжения должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Знак суммирования по дважды повторяющемуся индексу здесь и в дальнейшем будет опущен за исключением специально оговариваемых случаев.

В случае малых деформаций компоненты относительных деформаций ε_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ связаны с проекциями перемещений точек u_i $(i = 1, 2, 3)$ посредством соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \qquad i \neq j \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \qquad i = j \end{aligned} \tag{2}$$

Кроме этого, нужно ввести в рассмотрение параметры, характеризующие электрическое поле в диэлектрике. Компоненты вектора электрической индукции D_i $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют уравнению Максвелла для случая отсутствия объемного заряда

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

Компоненты вектора напряженности электрического поля E_i $(i = 1, 2, 3)$ связаны с потенциалом электрического поля V

$$E_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{4}$$

Вместо обобщенного закона Гука здесь имеет место еще более общий закон, связывающий линейной зависимостью как механические величины, так и электрические. Одна из форм записи его имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{\varepsilon^{\sigma}_{ii}} D_i + g_{ikl}\,\sigma_{kl} \\ \varepsilon_{kl} &= -g_{ikl} D_i + s^{D}_{klpq}\,\sigma_{pq} \end{aligned}\right| \quad (i,\ k,\ l,\ p,\ q = 1,\ 2,\ 3) \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon^{\sigma}_{ii}$ — диэлектрическая проницаемость кристалла при отсутствии механических напряжений; s^{D}_{klpq} — модули гибкости при отсутствии вектора электрической индукции, причем $s_{klpq} = s_{lkpq} = s_{klqp} = s_{pqkl}$; g_{ikl} — пьезоэлектрические модули, причем $g_{ikl} = g_{ilk}$. Величины этих коэффициентов зависят от материала и от выбранной системы координат. Уравнения (5) записаны для такой системы координат, в которой матрица диэлектрической проницаемости является диагональной. Если среда неоднородная, то коэффициенты суть функции координат. Мы здесь будем рассматривать однородную среду, то есть все коэффициенты постоянные.

Пусть имеем цилиндр бесконечно большой длины, образующая которого параллельна оси x_3. Будем считать, что сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной образующей, есть прямоугольник. Кроме того, примем, что все грани боковой поверхности снабжены проводящими обкладками, электрически не связанными друг с другом и не влияющими на массу и упругие свойства кристалла. Технология нанесения таких обкладок подробно описана в работе [1].

При рассмотрении прямого пьезоэффекта будем предполагать, что к боковой поверхности цилиндра приложены внешние силы, направленные нормально к образующей и равномерно распределенные вдоль образующей. Если же используется обратный пьезоэффект, то будем считать, что к противоположным граням подводятся заданные потенциалы. В том и другом случае деформация не будет плоской (первый случай для произвольной анизотропии и при отсутствии пьезоэффекта рассмотрен проф. С. Г. Лехницким [2]).

В силу однородности материала можно предположить, что указанные выше воздействия могут вызвать перемещение и потенциал в любой точке внутри кристалла, не зависящие от координаты x_3

$$V = V(x_1,\ x_2), \qquad u_i = u_i\,(x_1,\ x_2) \tag{6}$$

Из равенства (2) и (4) следует

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{7}$$

$$E_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad E_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad E_3 = 0 \tag{8}$$

Исключая u_1, u_2, u_3 и V, получим три уравнения, два из которых являются обычными уравнениями совместности деформаций Сен-Венана, а первое есть условие существования потенциала электрического поля

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = 0 \tag{9}$$

Из системы (5) с учетом (7) и (8) видно, что все D_i и σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ не зависят от x_3. Тогда уравнения (3) и (1) примут вид

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \tag{11}$$

Введем в рассмотрение функции электрической индукции и механического напряжения

$$D_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad D_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{12}$$

$$\sigma_{23} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

При этом уравнения (10) и (11) будут удовлетворяться. Из системы (5) выберем два уравнения, соответствующие $E_3 = 0$ и $\varepsilon_{33} = 0$, и решим их относительно D_3 и σ_{33}. Получим (индексы σ и D у коэффициентов ε_{ij} и s_{klpq} временно опустим)

$$D_3 = a_i D_i + b_{kl} \sigma_{kl} \qquad (i = 1, 2;$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k, l = 1, 2, 3, \text{ но} \tag{13}$$

$$\sigma_{33} = c_i D_i + d_{kl} \sigma_{kl} \qquad k = l \neq 3)$$

где обозначены

$$e_3 = g_{333}^2 + \frac{s_{3333}}{\varepsilon_{33}}, \quad a_i = -\frac{g_{333}\, g_{i33}}{e_3}, \quad c_i = \frac{g_{i33}}{\varepsilon_{33}\, e_3}$$

$$b_{kl} = \frac{1}{e_3}\left(s_{33kl}\, g_{333} - s_{3333}\, g_{3kl}\right), \quad d_{kl} = -\frac{1}{e_3}\left(g_{333}\, g_{3kl} + \frac{s_{33kl}}{\varepsilon_{33}}\right)$$

Подставим в систему (9) выражения из системы (5), учтем соотношения (13) и затем (12). В результате получим систему трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций φ, ψ, θ

$$\begin{gathered} L_2\varphi + L_3\psi + N_2\theta = 0 \\ L_3\varphi + L_4\psi + N_3\theta = 0 \\ M_2\varphi + M_3\psi + K_2\theta = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

индексы указывают порядок дифференциального оператора, здесь обозначены операторы и их коэффициенты

$$L_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} l_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j}$$

$$l_{ij} = -\frac{1}{\varepsilon_{ij}} - g_{i33}\, c_i, \quad i = j = 1;\ 2$$

$$l_{ij} = l_{ji} = g_{i33}\, c_j = g_{j33}\, c_i, \quad i \neq j$$

$$L_3 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k=1 \\ j \leq k}}^{2} l_{ijk} \frac{\partial^3}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j}$$

$$l_{ijk} = (-1)^{i+j+k}\left(g_{ijk} + g_{i33}\, d_{jk}\right)$$

$$L_4 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k,\, h=1 \\ i \leq j;\ k \leq h}}^{2} l_{ijkh} \frac{\partial^4}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j}$$

$$l_{ijkh} = (-1)^{i+j+k+h}\left(s_{ijkh} - g_{3ij}\, b_{kh} + s_{ij33}\, d_{kh}\right)$$

$$N_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} n_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j}$$

$$n_{ij} = (-1)^{i+j}\left(g_{ij3} + g_{i33}\, d_{j3}\right)$$

$$N_3 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k=1 \\ i \leq j}}^{2} n_{ijk} \frac{\partial^3}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j}$$

$$n_{ijk} = (-1)^{i+j+k}\left(s_{ijk3} - g_{3ij}\, b_{k3} + s_{ij33}\, d_{k3}\right)$$

$$M_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} m_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1^p \partial x_2^q}$$

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} (-g_{ij3} - g_{33i}\, a_j - s_{i333}\, c_j)$$

$$M_3 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k=1 \\ j \leq k}}^{2} m_{ijk} \frac{\partial^3}{\partial x_1^p \partial x_2^q}$$

$$m_{ijk} = (-1)^{i+j+k} (-s_{3ijk} + g_{33i}\, b_{jk} + s_{i333}\, d_{jk})$$

$$K_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1^p \partial x_2^q}$$

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} (-s_{i3j3} + g_{33i}\, b_{j3} + s_{i333}\, d_{j3})$$

где p — число двоек и q — число единиц в индексе коэффициента.

Обозначим квадратную матрицу из дифференциальных операторов системы (14) через $P_8(D)$. Необходимое условие существования решения системы (14), не равного нулю тождественно, состоит в том [3], что

$$\det P_8(\lambda) = 0 \tag{15}$$

Каждая из неизвестных функций удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению восьмого порядка, например,

$$P_8(D)\, \varphi = 0 \tag{16}$$

Запишем (15) подробнее:

$$\begin{gathered} l_2(\lambda)\, l_4(\lambda)\, k_2(\lambda) - l_3(\lambda)\, n_3(\lambda)\, m_2(\lambda) + n_2(\lambda)\, l_3(\lambda)\, m_3(\lambda) - \\ - m_2(\lambda)\, l_4(\lambda)\, n_2(\lambda) - m_3(\lambda)\, n_3(\lambda)\, l_2(\lambda) - k_2(\lambda)\, l_3^2(\lambda) = 0 \end{gathered} \tag{17}$$

где полиномы от λ:

$$l_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} l_{ij} \lambda^q, \quad l_3 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k=1 \\ j \leq k}}^{2} l_{ijk} \lambda^q, \quad l_4 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k,\, h=1 \\ i \leq j;\ k \leq h}}^{2} l_{ijkh} \lambda^q$$

$$n_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} n_{ij} \lambda^q, \quad n_3 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k=1 \\ i \leq j}}^{2} n_{ijk} \lambda^q, \quad m_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} m_{ij} \lambda^q$$

$$m_3 = \sum_{\substack{i,\, j,\, k=1 \\ j \leq k}}^{2} m_{ijk} \lambda^q, \quad k_2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} k_{ij} \lambda^q$$

Уравнение (16) может быть записано в виде

$$D_8 D_7 D_6 D_5 D_4 D_3 D_2 D_1 \varphi = 0 \tag{18}$$

где

$$D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (i = 1,\ 2, \cdots, 8)$$

λ_i — корни уравнения (17).

Метод интегрирования уравнения (18), указанный в [4] и примененный Лехницким [2], быстро приводит к цели. Рассмотрим случай отсутствия кратных корней уравнения (17). Вводя обозначения $D_1\varphi = z_1$, $D_2 z_1 = z_2, \cdots D_8 z_7 = 0$ и производя последовательное интегрирование, получим

$$\varphi = \sum_{i=1}^{8} \varphi_i (x_1 + \lambda_i x_2), \quad \psi = \sum_{i=1}^{8} \psi_i (x_1 + \lambda_i x_2), \quad \theta = \sum_{i=1}^{8} \theta_i (x_1 + \lambda_i x_2) \tag{19}$$

где, например,

$$\varphi_1 (x_1 + \lambda_1 x_2) = f_1 (x_1 + \lambda_1 x_2)$$

$$\varphi_i (x_1 + \lambda_i x_2) = \frac{f_i (x_1 + \lambda_i x_2)}{(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_1)}$$

f_i — произвольные функции аргумента $(x_1 + \lambda_i x_2)$, имеющие производные по этому аргументу до восьмого порядка включительно.

Методом, осуществленным Лехницким [2], на основании энергетических соображений можно доказать, что уравнение (17) не имеет вещественных корней. При этом нужно учесть, что потенциальная энергия W кристалла, отнесенная к единице объема, будет выражена

$$2W = s^{D}_{klpq}\, \sigma_{kl}\, \sigma_{pq} + \frac{1}{\varepsilon^{\sigma}_{ii}} D_i D_i \tag{20}$$

которая является величиной положительной. В дальнейшем примем, что корни уравнения (17) не являются кратными, а также они не являются одновременно корнями уравнений

$$l_2(\lambda)\, k_2(\lambda) - m_2(\lambda)\, n_2(\lambda) = 0, \qquad m_2(\lambda)\, n_2(\lambda) - l_2(\lambda)\, k_2(\lambda) = 0$$

$$k_2(\lambda)\, l_4(\lambda) - m_3(\lambda)\, n_3(\lambda) = 0, \qquad m_2(\lambda)\, l_3(\lambda) - m_3(\lambda)\, l_2(\lambda) = 0$$

$$l_2(\lambda)\, l_4(\lambda) - l_3^2(\lambda) = 0$$

Общие выражения для искомых функций, которые должны быть вещественными функциями аргументов x_1 и x_2, теперь запишутся

$$\varphi = \sum_{k=1}^{4} [\varphi_k(y_k) + \overline{\varphi}_k(\overline{y}_k)] = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \varphi_k(y_k)$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{4} [\psi_k(y_k) + \overline{\psi}_k(\overline{y}_k)] = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \psi_k(y_k) \tag{21}$$

$$\theta = \sum_{k=1}^{4} [\theta_k(y_k) + \overline{\theta}_k(\overline{y}_k)] = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \theta_k(y_k) \tag{21}$$

Здесь

$$y_k = x_1 + \mu_k x_2, \quad \overline{y}_k = x_1 + \overline{\mu}_k x_2$$

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \mu_{k+4} = \overline{\mu}_k = \alpha_k - i\beta_k, \quad (k = 1, 2, 3, 4; \ \beta_k > 0)$$

$\overline{\varphi}_k(\overline{y}_k)$, $\overline{\psi}_k(\overline{y}_k)$, $\overline{\theta}_k(\overline{y}_k)$ — сопряженные функции по отношению к $\varphi_k(y_k)$, $\psi_k(y_k)$, $\theta_k(y_k)$

Введем обозначения

$$\psi_1'(y_1) = \Phi_1(y_1), \quad \psi_2'(y_2) = \Phi_2(y_2), \quad \varphi_3(y_3) = \Phi_3(y_3), \quad \theta_4(y_4) = \Phi_4(y_4)$$

и выразим все искомые функции задачи через эти четыре функции. Для этого найдем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x_1} &= 2\mathrm{Re}[\Phi_1(y_1) + \Phi_2(y_2) + h_3\Phi_3(y_3) + h_8\Phi_4(y_4)] \\
\frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= 2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1(y_1) + \mu_2\Phi_2(y_2) + \mu_3 h_3\Phi_3(y_3) + \mu_4 h_8\Phi_4(y_4)] \\
\varphi &= 2\mathrm{Re}[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + \Phi_3(y_3) - h_5\Phi_4(y_4)] \\
\theta &= 2\mathrm{Re}[h_4\Phi_1(y_1) + h_7\Phi_2(y_2) + h_6\Phi_3(y_3) + \Phi_4(y_4)]
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$h_1 = \frac{n_2(\mu_1)m_3(\mu_1) - l_3(\mu_1)k_3(\mu_1)}{l_3(\mu_1)k_2(\mu_1) - m_2(\mu_1)n_2(\mu_1)}, \quad h_2 = \frac{m_3(\mu_2)n_2(\mu_2) - l_3(\mu_2)k_2(\mu_2)}{l_2(\mu_2)k_2(\mu_2) - m_2(\mu_2)n_2(\mu_2)}$$

$$h_3 = \frac{l_2(\mu_3)k_2(\mu_3) - m_2(\mu_3)n_2(\mu_3)}{m_3(\mu_3)n_2(\mu_3) - l_3(\mu_3)k_3(\mu_3)}, \quad h_5 = \frac{l_2(\mu_4)k_2(\mu_4) - m_2(\mu_4)n_2(\mu_4)}{m_2(\mu_4)l_3(\mu_4) - m_3(\mu_4)l_2(\mu_4)}$$

$$h_8 = \frac{l_3(\mu_4)n_3(\mu_4) - n_2(\mu_4)l_4(\mu_4)}{l_2(\mu_4)l_4(\mu_4) - l_3^2(\mu_4)}, \quad h_4 = \frac{m_2(\mu_1)l_3(\mu_1) - m_3(\mu_1)l_2(\mu_1)}{k_2(\mu_1)l_2(\mu_1) - m_2(\mu_1)n_2(\mu_1)}$$

$$h_7 = \frac{m_2(\mu_2)l_3(\mu_2) - m_3(\mu_2)l_2(\mu_2)}{k_2(\mu_2)l_2(\mu_2) - m_2(\mu_2)n_2(\mu_2)}, \quad h_6 = \frac{m_2(\mu_3)l_3(\mu_3) - m_3(\mu_3)l_4(\mu_3)}{k_2(\mu_3)l_4(\mu_3) - m_3(\mu_3)n_3(\mu_3)}$$

Подставляя (22) в (12), путем однократного дифференцирования находим D_1, D_2, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12}, σ_{13}...

$$D_i = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij}\Phi_j(y_j) \quad (i = 1, 2) \tag{23}$$

где

$$\alpha_{11} = h_1\mu_1, \quad \alpha_{12} = h_2\mu_2, \quad \alpha_{13} = \mu_3, \quad \alpha_{14} = h_5\mu_4$$

$$\alpha_{21} = -h_1; \quad \alpha_{22} = -h_2; \quad \alpha_{23} = -1; \quad \alpha_{24} = -h_5$$

$$\sigma_{kl} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\beta_{klj}\Phi'_j(y_j); \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ 3;\ \text{но}\ k = l \neq 3) \tag{24}$$

где

$$\beta_{111} = \lambda_1^2; \quad \beta_{112} = \lambda_2^2; \quad \beta_{113} = \lambda_3^2 h_3; \quad \beta_{114} = \lambda_4^2 h_4$$

$$\beta_{221} = 1; \quad \beta_{222} = 1; \quad \beta_{223} = h_3; \quad \beta_{224} = h_4$$

$$\beta_{231} = h_6; \quad \beta_{232} = h_7; \quad \beta_{233} = h_8; \quad \beta_{234} = 1$$

$$\beta_{131} = -\lambda_1 h_6; \quad \beta_{132} = -\lambda_2 h_7; \quad \beta_{133} = -\lambda_3 h_8; \quad \beta_{134} = -\lambda_4$$

$$\beta_{121} = -\lambda_1; \quad \beta_{122} = -\lambda_2; \quad \beta_{123} = -\lambda_3 h_3; \quad \beta_{124} = -\lambda_4 h_4$$

Из выражений (13) определяем D_3 и σ_{33}

$$D_3 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\alpha_{3j}\Phi'_j(y_j) \tag{25}$$

где

$$\alpha_{3j} = \alpha_{ij} a_i + \beta_{klj} b_{kl}$$

$$\sigma_{33} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\beta_{33j}\Phi'_j(y_j) \tag{26}$$

где

$$\beta_{33j} = \alpha_{ij} c_i + \beta_{klj} d_{kl}$$

Возвращаясь к системе (5), находим E_1, E_2, ξ_{11}, ξ_{22}, ξ_{23}, ξ_{13} и ξ_{12}:

$$E_i = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\gamma_{ij}\Phi'_j(y_j) \tag{27}$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\varepsilon^T_{ii}} + g_{ikl}\beta_{klj}$$

по i не суммировать!

$$\xi_{kl} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\delta_{klj}\Phi'_j(y_j) \tag{28}$$

где

$$\delta_{klj} = -g_{ikl}\alpha_{ij} + s^D_{klpq}\beta_{pqj}$$

В выражениях (23) — (28) $i = 1,\ 2;\ k,\ l,\ p,\ q = 1,\ 2,\ 3,$ но $k = l \neq 3$.

Интегрируя (27) и (28), получим выражения для потенциала электрического поля V и проекций смещения $u_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$:

$$V(x_1,\ x_2) = V_0 - 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\gamma_{1j} + \frac{\gamma_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] \tag{29}$$

$$u_1(x_1, x_2) = u_{10} - \omega x_2 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{11j} + \frac{\delta_{12j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right]$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_{20} - \omega x_1 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\delta_{22j}}{\lambda_j} + \frac{\delta_{12j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] \qquad (30)$$

$$u_3(x_1, x_2) = u_{30} + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{13j} + \frac{\delta_{23j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right]$$

Здесь V_0, u_{10}, u_{20}, u_{30} и ω — постоянные интегрирования, показывающие нулевой уровень потенциала электрического поля и „жесткое" смещение кристалла как целого.

Выпишем возможные граничные условия, которым должны удовлетворять функции $\Phi_i(y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. В случае прямого пьезоэффекта: а) σ_{1n}; σ_{2n}, не изменяющиеся вдоль образующей, перпендикулярные ей: $\sigma_{3n} = 0$; $D_n = 0$ [5]. Тогда

$$2\mathrm{Re}\left[\Phi_1(y_1) + \Phi_2(y_2) + h_3\Phi_3(y_3) + h_4\Phi_4(y_4)\right] = -\frac{1}{2}\int_0^s \sigma_{2n}\,ds + C_2$$

$$2\mathrm{Re}\left[\lambda_1\Phi_1(y_1) + \lambda_2\Phi_2(y_2) + \lambda_3 h_3\Phi_3(y_3) + \lambda_4 h_4\Phi_4(y_4)\right] = \frac{1}{2}\int_0^s \sigma_{1n}\,ds + C_1$$

$$2\mathrm{Re}\left[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + \Phi_3(y_3) + h_5\Phi_4(y_4)\right] = C_4 \qquad (31)$$

$$2\mathrm{Re}\left[h_6\Phi_1(y_1) + h_7\Phi_2(y_2) + h_8\Phi_3(y_3) + \Phi_4(y_4)\right] = C_3$$

Здесь s — дуга контура сечения, отсчитанная от некоторого $s = 0$ до переменной точки; n — направление внешней нормали к контуру; C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, которые для односвязной области можно положить равными нулю.

б) u_1^*, u_2^*, u_3^* — смещения точек контура, постоянные вдоль образующей; $D_n = 0$.

$$2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{11j} + \frac{\delta_{12j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_1^* - u_{10} - \omega x_2$$

$$2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\delta_{22j}}{\lambda_j} + \frac{\delta_{12j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_2^* - u_{20} - \omega x_1$$

$$2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{13j} + \frac{\delta_{23j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_3^* - u_{30} \qquad (32)$$

$$2\mathrm{Re}\left[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + \Phi_3(y_3) + h_5\Phi_4(y_4)\right] = C$$

В случае обратного пьезоэффекта возможны:

а) V^*, не изменяющийся вдоль образующей; $u_1^* = 0$, $u_2^* = 0$, $u_3^* = 0$, кристалл механически зажатый.

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\gamma_{1j}+\frac{\gamma_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = V_0 - V^* \\
&2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{11j}+\frac{\delta_{12j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{10} + \omega x_2 \\
&2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\delta_{22j}}{\lambda_j}+\frac{\delta_{12j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{20} - \omega x_1 \\
&2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{13j}+\frac{\delta_{23j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{30}
\end{aligned} \tag{33}$$

б) V^*, не изменяющийся вдоль образующей; $\sigma_{1n} = 0$, $\sigma_{2n} = 0$, $\sigma_{3n} = 0$, кристалл механически свободный.

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\gamma_{1j}+\frac{\gamma_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = V_0 - V^* \\
&2\mathrm{Re}\left[\Phi_1(y_1)+\Phi_2(y_2)+h_3\Phi_3(y_3)+h_4\Phi_4(y_4)\right] = C_2 \\
&2\mathrm{Re}\left[\lambda_1\Phi_1(y_1)+\lambda_2\Phi_2(y_2)+\lambda_3 h_3\Phi_3(y_3)+\lambda_4 h_4\Phi_4(y_4)\right] = C_1 \\
&2\mathrm{Re}\left[h_5\Phi_1(y_1)+h_7\Phi_2(y_2)+h_6\Phi_3(y_3)+\Phi_4(y_4)\right] = C_3
\end{aligned} \tag{34}$$

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт им. М. И. Калинина Поступила 17 X 1969

Ի. Ա. ՎԵԿՈՎԻՇՉԵՎԱ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄՆԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԷՖԵԿՏԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հիմնվելով անիզոտրոպ նյութի առաձգականության տեսության, էլեկտրաստատիկայի և պյեզոէլեկտրական երևույթի հավասարումների վրա, լուծված է պյեզոէլեկտրական էֆեկտով և կամայական գծային անիզոտրոպիայով օժտված համասեռ անվերջ ձողի տարածական խնդիրը։ Լարումների, տեղափոխումների, էլեկտրական ինդուկցիայի բոլոր բաղադրիչները և էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը արտահայտված են չորս կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների օգնությամբ։ Նշված են եզրային պայմաններ՝ այդ չորս ֆունկցիաների համար։

DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY FOR AN AEOLOTROPIC BODY TAKING ACCOUNT OF AN ELECTRICAL EFFECT

I. A. VEKOVISCHEVA

Summary

On the grounds of general equations of elasticity for an aeolotropic body, equations of electrostatics and equations of piezoelectricity a dimensional problem for a homogeneous infinite rod of material possesing a piezoelectric effect is solved for arbitrary rectilinear aeolotropics. All the components of stress, displacement, electrical induction and electrical field potential are expressed through four functions of a complex variable. Boundary conditions for these four functions are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практические применения. ИЛ, 1949.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, 1950.
3. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Изд-во „Мир". М., 1965.
4. *Пиаджио Г.* Интегрирование дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.-Л., 1933.
5. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. ИЛ, 1952.