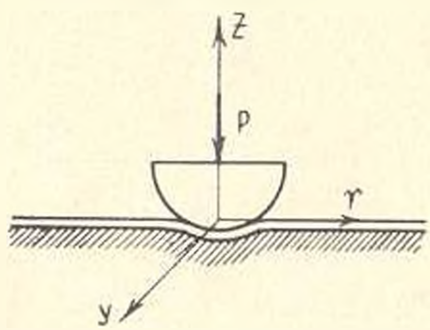
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 3, 1970 Механика

Б. Л. ПЕЛЕХ, Р. Д. СЫСАК

О ДАВЛЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ ПЛАСТИНКУ, СВЯЗАННУЮ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

На базе обобщенной прикладной теории С. А. Амбарцумяна [1, 2], построенной с учетом влияния касательных срезывающих напряжений, решена конкретная задача о вдавливании твердого тела в круглую трансверсально-изотропную пластинку, покоящуюся на упругом основании Винклера. Ранее аналогичная задача для изотропной пластинки решена в рамках классической теории Кирхгофа В. М. Александровым [3].

§ 1. Рассмотрим бесконечную трансверсально-изотропную пластинку толщины $2h$, связанную с упругим основанием Винклера. Пусть на пластинку действует осесимметричный гладкий жесткий штамп (фиг. 1), основание которого описывается уравнением $z = f(r)$, вдавливаемый в пластинку усилием P; радиус области контакта предполагается равным a.



Фиг. 1. Действие штампа на пластинку, связанную с упругим основанием

Уравнение осесимметричного изгиба трансверсально-изотропной пластинки, покоящейся на упругом основании Винклера, имеет вид

$$D\Delta_r\Delta_r w - k\varepsilon\Delta_r w + k w = -(q - \varepsilon\Delta_r q) \tag{1.1}$$

где

$$D = \frac{2E_a h^3}{3(1-\nu_a^2)}, \quad \varepsilon = \frac{2h^2}{5(1-\nu_a^2)}\frac{E_a}{G}, \quad \Delta_r = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

w — прогиб пластинки; k — коэффициент постели упругого основания; q — нормальное давление под штампом; E_a, ν_a — модуль Юнга и коэффициент Пуассона в плоскости армирования (в срединной плоскости); G_z — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных этой плоскости.

При этом

$$w(r) = -[\delta - f(r)] \quad \text{при } r \leqslant a$$

где δ — величина поступательного перемещения штампа и

$$q(r) = 0 \quad \text{при } r \geqslant a$$

Распишем уравнение (1.1) по областям

$$\varepsilon\Delta_r q - q = D\Delta_r\Delta_r f(r) - \lambda\varepsilon\Delta_r f(r) - \lambda[\delta - f(r)], \quad 0 \leqslant r \leqslant a \quad (1.2)$$

$$D\Delta_r\Delta_r w - \lambda\varepsilon\Delta_r w + \lambda w = 0 \quad (1.3)$$

Требуется определить прогиб пластинки, давление под штампом, а также зависимость размеров площадки контакта и величины δ от приложенной силы P.

§ 2. Давление под штампом $q(r)$ определим из уравнения (1.2). Если правую часть уравнения (1.2) обозначить через $F(r)$ и ввести безразмерные величины $x = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}$ и $\gamma = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon}}$, то это уравнение перепишется так:

$$\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dq}{dx} - q(x) = F(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \gamma \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$q(x) = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x) + q^*(x) \quad (2.2)$$

где $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно; $q^*(x)$ — частное решение уравнения (2.1), которое находится методом вариации произвольных постоянных:

$$q^*(x) = I_0(x)\int^{x} xK_0(x)F(x)\,dx - K_0(x)\int^{x} xI_0(x)F(x)\,dx \quad (2.3)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из условий конечности давления в центре пластинки и отсутствия давления в граничных точках области контакта

$$q(0) < \infty, \quad q(\gamma) = 0 \quad (2.4)$$

что дает

$$C_1 = -\frac{q^*(\gamma)}{I_0(\gamma)}, \quad C_2 = 0 \quad (2.5)$$

Окончательно, закон распределения под штампом представится так:

$$q(x) = q^*(x)\left\{1 - \frac{q^*(\gamma)}{q^*(x)}\frac{I_0(x)}{I_0(\gamma)}\right\} \quad (2.6)$$

§ 3. Величину $w(r)$ найдем из уравнения (1.3), определяя постоянные интегрирования из следующих граничных условий:

$$\lim_{r\to\infty} w(r)=0, \quad w(a)=-[\delta-f(a)], \quad w'(a)=f'(a) \tag{3.1}$$

Вводя безразмерные величины

$$l=\sqrt[4]{\frac{D}{k}}, \quad \xi=\frac{r}{l}, \quad \alpha=\frac{a}{l}, \quad 2b_0=\frac{\varepsilon}{F}$$

запишем уравнение (1.3) следующим образом:

$$\Delta_\xi \Delta_\xi w-2b_0 \Delta_\xi w+w=0 \tag{3.2}$$

где

$$\Delta_\xi=\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}$$

Решение уравнения (3.2) разыскиваем в виде

$$w=AZ_0(\xi\sqrt{s}) \tag{3.3}$$

где $Z_0(\xi\sqrt{s})$ — цилиндрическая функция; A — произвольная постоянная.

Подставляя выражение (3.3) в уравнение (3.2) и упрощая его, получим характеристическое уравнение относительно параметра

$$s^2-2b_0^2\, s+1=0 \tag{3.4}$$

корнями которого будут

$$s_{1,2}=-b_0\pm\sqrt{b_0^2-1} \tag{3.5}$$

Опуская выкладки, запишем решения уравнения (3.2) в зависимости от корней характеристического уравнения:

в случае комплексных корней $(b_0^2-1<0)$:

$$w=A_1^* J_0(\xi\sqrt{s_1})+A_2^* H_0^{(1)}(\xi\sqrt{s_1})+A_3^* J_0(\xi\sqrt{s_2})+A_4^* H_0^{(1)}(\xi\sqrt{s_2}) \tag{3.6}$$

в случае действительных различных корней $(b_0^2-1>0)$:

$$w=A_1 J_0(\xi\sqrt{s_1})+A_2 Y_0(\xi\sqrt{s_1})+A_3 J_0(\xi\sqrt{s_2})+A_4 Y_0(\xi\sqrt{s_2}) \quad \text{при } b_0<-1 \tag{3.7}$$

и

$$w=A_1 I_0(\xi\sqrt{|s_1|})+A_2 K_0(\xi\sqrt{|s_1|})+A_3 I_0(\xi\sqrt{|s_2|})+ A_4 K_0(\xi\sqrt{|s_2|}) \quad \text{при } b_0>1 \tag{3.8}$$

где $J_0(z)$, $Y_0(z)$, $H_0^{(1)}(z)$ — функции Бесселя соответственно первого, второго и третьего рода; $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Малореальный случай равных корней не рассматривается.

В дальнейшем будем пользоваться наиболее общим вариантом решения (3.6). Для этого преобразуем уравнение (3.6).

Введем обозначения

$$s_{1,2} = a \pm ib$$

где

$$a = -\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{D}}, \quad b = \sqrt{1 - \frac{\lambda\varepsilon^2}{4D}} \tag{3.9}$$

Тогда

$$\xi\sqrt{s_{1,2}} = \xi\sqrt{a \pm ib} = \rho e^{\pm i\varphi} = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

где

$$\rho = \xi, \ \varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}, \quad \left(\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

Обозначая далее

$$\begin{gathered} J_0(\rho e^{\pm i\varphi}) = \bar{u}_0(\rho) \pm i\,\bar{v}_0(\rho) \\ H_0^{(1)}(\rho e^{\pm i\varphi}) = \bar{f}_0(\rho) \pm i\,\bar{g}_0(\rho) \end{gathered} \tag{3.10}$$

и внося (3.10), с учетом (3.9), в уравнение (3.6), получим следующее выражение для прогиба:

$$w = A_1\bar{u}_0(\rho) + A_2\bar{v}_0(\rho) + A_3\bar{f}_0(\rho) + A_4\bar{g}_0(\rho) \tag{3.11}$$

где

$$A_1 = A_1^* + A_3^*, \qquad A_2 = i(A_1^* - A_3^*)$$

$$A_3 = A_2^* + A_4^*, \qquad A_4 = i(A_2^* - A_4^*)$$

Произвольные действительные постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 найдем из условий (3.1). Опуская выкладки, запишем решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям (3.1):

$$w = -\frac{F_a'(\alpha, \rho)\,[\delta - f(\alpha l)] + F(\alpha, \rho)\,f_a'(\alpha l)}{[F_a'(\alpha, \rho)]_{\rho=\alpha}} \tag{3.12}$$

Здесь

$$F(\alpha, \rho) = \bar{g}_0(\alpha)\,\bar{f}_0(\rho) - \bar{f}_0(\alpha)\,\bar{g}_0(\rho)$$

$$\bar{f}_0'(\rho) = -\left[\bar{f}_1(\rho)\cos\varphi - \bar{g}_1(\rho)\sin\varphi\right]$$

$$\bar{g}_0'(\rho) = -\left[\bar{f}_1(\rho)\sin\varphi + \bar{g}_1(\rho)\cos\varphi\right]$$

Таблицы функций $\bar{f}_0(\rho)$, $\bar{g}_0(\rho)$, $\bar{f}_1(\rho)$, $\bar{g}_1(\rho)$, содержатся в работе [4].

§ 4. Связь между величинами a и δ определяется из следующего соотношения:

$$\Delta_r \left[f(r) + \varepsilon\Delta_r f(r) - \frac{\varepsilon^2}{D} g(r) \right]_{r=a} = \Delta_r \left[w(r) + \varepsilon\Delta_r w(r) \right] \tag{4.1}$$

которое с учетом (3.12) приводит к уравнению

$$\left\{ \frac{G_\alpha'(\alpha, \rho)[\delta - f(\alpha l)] + G(\alpha, \rho) f_\alpha'(\alpha l)}{F_1(\alpha, \rho)} \right\}_{l=1} + \Delta_\alpha f(\alpha l) = 0 \tag{4.2}$$

где

$$G_\alpha(\alpha, \rho) = [-\bar{g}_0(\alpha) \bar{f}_0(\rho) + \bar{f}_0(\alpha) \bar{g}_0(\rho)]\cos 2\varphi + [\bar{g}_0(\rho) \bar{g}_0(\alpha) +$$

$$+ \bar{f}_0(\alpha) \bar{f}_0(\rho)] \sin 2\varphi$$

Связь между величинами P, α и δ находится из известного условия

$$P = 2\pi \left[\int_0^a q(r)\, r dr + a Q_A \right] \tag{4.3}$$

где Q_A — сосредоточенные реакции, возникающие вследствие наличия упругого основания [3] и которые можно определить из соотношения

$$Q_A = D \left\{ \frac{d}{dr} \Delta_r [f(r) - w(r)]_{r=a} - \frac{\varepsilon}{D} q_r (a) \right\} \tag{4.4}$$

Из условия (4.3) с учетом соотношений (2.6) и (4.4) получим

$$P = 2\pi \left\{ \varepsilon \int_0^\gamma \left[q^*(x) - \frac{q^*(\gamma)}{I_0(\gamma)} I_0(x) \right] x dx - a \sqrt{\varepsilon}\, \frac{d}{dx} \left[q^*(x) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{q^*(\gamma)}{I_0(\gamma)} I_0(x) \right]_{x=\gamma} + \tag{4.5}$$

$$+ \frac{2\pi D a}{P} \left[\frac{G_{\alpha\rho}'(\alpha, \rho)[\delta - f(\alpha l)] + G_\rho'(\alpha, \rho) f_\alpha'(\alpha l)}{F_\alpha(\alpha, \rho)} \right]_{l=1} + \frac{d}{d\alpha} \Delta_\alpha f(\alpha l) \Big\}$$

Соотношение (4.5) определяет связь между a и P, если в него подставить δ из формулы (4.2).

§ 5. Представляет интерес исследование найденных соотношений в зависимости от параметра E_r/G_z, характеризующего податливость пластинки на сдвиг.

Предельный переход $E_r/G_z \to 0$ (пластинка с бесконечно большой сдвиговой жесткостью).

Справедливо следующее утверждение: распределение давления под штампом (2.6) при стремлении отношения E_r/G_z к нулю совпадает с соответствующим распределением давлений $q^{(k)}$, найденным на базе теории Кирхгофа [3], во всех точках за исключением точек границы контакта.

При конкретных значениях $\frac{E_a}{G_z} > 0$ доказано неравенство

$$q < q^{(k)}$$

т. е. максимальные давления под штампом, определяемые из полученных уравнений, меньше соответствующих давлений $q^{(k)}$, найденных в теории Кирхгофа [3].

Степень этого занижения зависит от отношений $\frac{a}{h}$ и $\frac{E_a}{G_z}$; при $\frac{E_a}{G_z} \sim 10 \div 60$, что характерно для стеклопластиков с ориентированной намоткой, отличие величины $q(r)$ по (2.6) от $q^{(k)}(r)$ [3] может достичь $40-50\%$.

§ 6. В заключение отметим, что полученные формулы решают также задачу о вдавливании силой P осесимметричного жесткого штампа в выпуклую поверхность пологой сферической оболочки радиуса $R + \delta$ (в силу совпадения по виду соответствующих уравнений и граничных условий).

Львовский политехнический институт
Ивано-Франковский институт нефти и газа

Поступила 8 VII 1969

Բ. Լ. ՊԵԼԵԽ, Ռ. Դ. ՍԻՍԱԿ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԴՏՆՎՈՂ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻՆ ՀԵՆՎԱԾ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՃՆՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Վինկլերի տիպի առաձգական հիմքի վրա հենված տրանսվերսալ-իզոտրոպ սալի մեջ պինդ մարմնի ներսեղմման կոնկրետ խնդիրը լուծված է լայնական շոշափող լարումների հաշվառմամբ կառուցված Ս. Ա. Համբարձումյանի ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնատիպ խնդիր իզոտրոպ սալի համար Կիրխհոֆի դասական տեսության շրջանակներում ավելի վաղ լուծվել է Վ. Մ. Ալեքսանդրովի կողմից:

ON PRESSURE OF A SOLID BODY ON A TRANSVERSALLY-ISOTROPIC PLATE MOUNTED ON AN ELASTIC BASE

B. L. PELEKH, R. D. SYSAK

Summary

On the basis of the generalized theory of S. A. Ambartsumian, taking account of the influence of tangent cutting tensions, a concrete problem of pressing a solid body into a circular transversally-isotropic Winkler's plate mounted on an elastic base has been solved.

A similar problem for an isotropic plate was solved earlier by V. M. Alexandrov on the basis of Kirchgof's theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. „Наука", М., 1967.
2. *Мелконян А. П.* Об изгибе трансверсально-изотропных пластинок, лежащих на упругом основании. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 20, в. 1, 1967.
3. *Александров В. М.* Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек. Инж. журнал, т. V, в. 4, 1965.
4. *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Физматгиз, М., 1960.