ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 2, 1970 Механика

С. М. МХИТАРЯН

О НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К РЕШЕНИЮ ДВУХ ТИПОВ ПАРНЫХ РЯДОВ-УРАВНЕНИЙ

На основе некоторых частных результатов М. Г. Крейна, содержащихся в работах [1, 2], в настоящей статье рассматриваются четыре типа полных ортогональных систем функций в $L^2(0,\pi)$, которые состоят из полиномов Лежандра и из комбинаций этих полиномов. Они представляют частные примеры фундаментальных функций приведенных в работах [1] и [3] дифференциальных систем определенного типа. Для этих систем выписываются формулы обобщенного преобразования Фурье.

Затем при помощи указанных полных ортогональных систем функций в замкнутом виде решаются два типа парных рядов-уравнений с тригонометрическими ядрами. Они имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x) \quad (-\pi<x<\alpha) \\
b_0+\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\left[a_k \cos kx - b_k \sin kx\right] = g(x) \quad (\alpha<x<\pi)
\end{gathered} \tag{0.1}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x + b_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x = f(x) \quad (-\pi<x<\alpha) \\
\sum_{k=1}^{\infty}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[a_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x + b_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right] = \\
= g(x) \quad (\alpha<x<\pi).
\end{gathered} \tag{0.2}
$$

Решения этих парных рядов-уравнений строятся по методу М. Г. Крейна [4, 5].

Парные ряды-уравнения с тригонометрическими ядрами, в частности, ряды-уравнения (0.1) и (0.2), встречаются в разнообразных задачах математической физики, например, в электростатике, теории дифракции электромагнитных волн, смешанных (контактных) задачах теории упругости. Ввиду их важности для задач математической физики они стали предметом исследования многих авторов. По этому поводу можно указать на работы Шеферда [6], Трантера [7, 8, 9], Сривастава [10], З. С. Аграновича, В. А. Марченко и В. П. Шестопалова [11], А. А. Баблояна [12, 13] и др. Все рассмотренные в указанных работах парные ряды-уравнения имеют отличную от (0.1) и (0.2) структуру*.

1. Приведем следующие результаты, содержащиеся, в частности, в работах [1, 2]. Пусть $K(-t)=K(t)$ $(-2A<t<2A)$ — четная, локально суммируемая функция, обладающая тем свойством, что соответствующее ей ядро $K(|t-s|)$ является положительно определенным ядром в квадрате $-A<t,\ s<A$. Тогда при любом $a<A$ интегральное уравнение

$$\int_{-a}^{a} K(|t-s|)\,q(s,\ a)\,ds=1 \tag{1.1}$$

имеет единственное интегрируемое решение $q(t,\ a)$. Кроме того, если для любого комплексного λ положить

$$\varphi(t,\ \lambda^2)=\frac{1}{p(t)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t} q(s,\ t)\cos\lambda s\,ds \tag{1.2}$$

$$\psi(t,\ \lambda^2)=\lambda\int_{0}^{t} q(s,\ t)\cos\lambda s\,ds \tag{1.3}$$

где

$$p(t)=M'(t),\ \text{а}\ \ M(t)=\int_{0}^{t} q(s,\ t)\,ds$$

то функции $\varphi(t,\ \lambda^2)$ и $\psi(t,\ \lambda^2)$ оказываются решениями дифференциальных систем

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+\dfrac{p'(t)}{p(t)}\dfrac{d\varphi}{dt}+\lambda^2\varphi=0 \\ \varphi(0,\ \lambda^2)=1,\quad \lim\limits_{t\to 0}\left(p(t)\dfrac{d\varphi}{dt}\right)=0 \end{cases} \tag{1.4}$$

---

* Следует отметить, что при помощи формулы Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ парные ряды-уравнения (0.1) можно преобразовать в парные ряды-уравнения с ядрами e^{ikx}. Парные ряды-уравнения с такими ядрами несколько частного вида рассматриваются в работе [11]. Точнее говоря, в этой работе рассматриваются тройные ряды-уравнения с ядрами e^{ikx}, поскольку основной интервал $(-\pi,\ \pi)$ разбивается на три интервала $(-\pi,\ -\alpha)$, $(-\alpha,\ \alpha)$ и $(\alpha,\ \pi)$. Однако, элементарным способом эти тройные ряды-уравнения можно привести к парным рядам-уравнениям типа (0.1), когда одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ тождественно равна нулю.

Решение упомянутых уравнений в работе [11] сведено к решению некоторой краевой задачи Римана для дуги единичной окружности. Приведенный нами способ решения уравнений (0.1) отличен от указанного.

$$
\left|\begin{array}{l}
\dfrac{d^2\psi}{dt^2} - \dfrac{p'(t)}{p(t)}\dfrac{d\psi}{dt} + \lambda^2\psi = 0 \\[2ex]
\psi(0, \lambda^2) = 0, \quad \lim\limits_{t\downarrow 0}\left(\dfrac{1}{p(t)}\dfrac{d\psi}{dt}\right) = \lambda
\end{array}\right. \tag{1.5}
$$

Следует отметить, что вторая дифференциальная система получается из первой при помощи подстановки $\psi(t, \lambda^2) = p(t)\dfrac{d\varphi}{dt}/\lambda$.

Далее, отправляясь от этих дифференциальных систем, можно выписать формулы обобщенного преобразования Фурье

$$F(\lambda) = \int\limits_0^A \varphi(t, \lambda^2)\ f(t)\ p(t)\,dt \tag{1.6}$$

$$f(t) = 2\int\limits_0^\infty \varphi(t, \lambda^2)\ F(\lambda)\,d\sigma(\lambda) \tag{1.7}$$

$$G(\lambda) = \int\limits_0^A \psi(t, \lambda^2)\ g(t)\ p^{-1}(t)\,dt \tag{1.8}$$

$$g(t) = 2\int\limits_0^\infty \psi(t, \lambda^2))\ G(\lambda)\,d\sigma(\lambda) \tag{1.9}$$

Здесь $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции из $L^2_\rho(0, A)$ и $L^2_{\rho^{-1}}(0, A)$ соответственно, где $\rho(t) = p(t)$, а $\sigma(\lambda)$ $(\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0),\ \sigma(0) = 0,$ $0 < \lambda < \infty)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty$$

и являющаяся ортогональной спектральной функцией граничных задач (1.4) или (1.5). Если $A = \infty$, то функция $\sigma(\lambda)$ единственным образом определяется из представления

$$K(t) = \int\limits_0^\infty \cos\lambda t\,d\sigma(\lambda) \quad (0 < t < \infty) \tag{1.10}$$

а если $A < \infty$, то для определения функции $\sigma(\lambda)$ (спектра задач (1.4) или (1.5)), вообще говоря, следует добавить граничные условия на конце $t = A$, например, следующие:

$$\varphi(A, \lambda^2) = 0 \tag{1.11}$$

$$\lim_{t\to A}\left(\frac{1}{\lambda p(t)}\ \frac{d\psi}{dt}\right) = 0 \tag{1.12}$$

Следует отметить, что при $A < \infty$ спектр граничных задач (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12) соответственно, совпадает со множеством точек роста функции $\sigma(\lambda)$, фигурирующей в представлении типа (1.10).

Изложенные результаты М. Г. Крейна теперь применим к двум конкретным частным случаям функции $K(t)$.

Пусть $K(t)$ обозначает одну из следующих двух функций:

$$1)\ \ln 1/2\sin\frac{|t|}{2},\quad 2)\ \ln\operatorname{ctg}|t|/4\quad (-2\pi < t < 2\pi) \tag{1.13}$$

Первая из этих функций и связанные с ней соответствующие результаты приведены в [1].

Функции $q(t, a)$ — решения интегральных уравнений (1.1) соответственно будут [1, 3]:

$$1)\ -\cos(t/2)/\pi\ln\sin(a/2)\sqrt{2(\cos t-\cos a)} \tag{1.14}$$

$$2)\ 1/\pi Q_{-1/2}(\cos a)\sqrt{2(\cos t-\cos a)} \tag{1.15}$$

а функции $p(t)$ —

$$1)\ \operatorname{ctg}(t/2)/4[\ln\sin(t/2)]^2,\quad 2)\ 1/2\sin t\,Q^2_{-1/2}(\cos t) \tag{1.16}$$

Здесь $Q_{-1/2}(\cos t)$ — функция Лежандра второго рода индекса $-1/2$.

Пользуясь выражениями функций $p(t)$, можем в явном виде выписать соответствующие дифференциальные системы (1.4) и (1.5). Однако, в этом нет необходимости.

Приняв во внимание известное интегральное представление [14] функций Лежандра первого рода индекса ν $P_\nu(\cos t)$, при помощи формул (1.14), (1.15), (1.16), (1.2) и (1.3) находим выражения фундаментальных функций $\varphi(t, \lambda^2)$ и $\psi(t, \lambda^2)$ соответственно дифференциальных систем (1.4) и (1.5). В эти выражения входят функции $P_\nu(\cos t)$ определенных индексов и еще функция $Q_{-1/2}(\cos t)$. Далее, заметив, что в рассматриваемых случаях $A = \pi$, легко показываем, что решения трансцендентных уравнений $\varphi(\pi, \lambda^2) = 0$ — спектра граничных задач (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12), соответственно будут:

$$1)\ \lambda_k = k,\quad 2)\ \lambda_k = k - 1/2\quad (k = 1, 2, \cdots)$$

Справедливость последнего утверждения вытекает также из следующих фактов. Имеют место представления [14]

$$\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t|}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k}\quad (-2\pi < t < 2\pi)$$

$$\ln \operatorname{ctg} \frac{|t|}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)}{k-\frac{1}{2}} \qquad (-2\pi < t < 2\pi)$$

На основании сказанного выше находим, что ортогональная спектральная функция $\sigma(\lambda)$ соответственно обсуждаемым нами случаям имеет вид

1) $$\sigma(\lambda) = \sum_{0<k<\lambda} \frac{1}{k} \quad (0 < \lambda < \infty), \quad \sigma(0) = 0$$

2) $$\sigma(\lambda) = \sum_{0<k<\lambda} \frac{1}{k-\frac{1}{2}} \quad (0 < \lambda < \infty), \quad \sigma(0) = 0$$

Множества точек роста этих функций: $\lambda_k = k$ и $\lambda_k = k - \frac{1}{2}\ (k = 1, 2, \cdots)$ соответственно, как уже говорилось, и составляют спектры указанных граничных задач.

Учитывая последнее обстоятельство, при помощи формул (1.2), (1.3) и (1.14) выражения фундаментальных функций дифференциальных систем (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12) соответственно, в первом случае получим в виде

$$\varphi_k(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{[\ln \sin(t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{\ln \sin(t/2)} \int_0^t \frac{\cos(s/2) \cos ks\,ds}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \right| \qquad (1.17)$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\psi_k(t) = -\frac{k}{\pi \ln \sin(t/2)} \int_0^t \frac{\cos(s/2) \cos ks\,ds}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \qquad (1.18)$$

С другой стороны, при помощи формул (1.2), (1.3) и (1.15) и того же обстоятельства выражения фундаментальных функций дифференциальных систем (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12) соответственно, во втором случае получим в виде

$$\chi_k(t) = \frac{2}{\pi} \sin t\, Q^2_{-1/2}(\cos t) \times$$

$$\times \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)} \int_0^t \frac{\cos(k-1/2)s\,ds}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \right| \qquad (1.19)$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\theta_k(t) = \frac{k-\frac{1}{2}}{\pi Q_{-1/2}(\cos t)} \int_0^t \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)s\,ds}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \qquad (1.20)$$

Воспользовавшись известной формулой [14]

$$P_k(\cos t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)s\,ds}{\sqrt{2(\cos s-\cos t)}}\qquad (k=1,\ 2,\cdots)\tag{1.21}$$

будем иметь:

$$\varphi_k(t)=\frac{1}{2}\left[P_k(\cos t)-P_{k-1}(\cos t)\right]-$$

$$-k\ln\sin(t/2)\left[P_k(\cos t)-P_{k-1}(\cos t)\right]\tag{1.22}$$

$$\psi_k(t)=-k\left[P_k(\cos t)+P_{k-1}(\cos t)\right]/4\ln\sin(t/2)\tag{1.23}$$

$$\chi_k(t)=\left(k-\frac{1}{2}\right)\left[P_k(\cos t)-\cos t\,P_{k-1}(\cos t)\right]Q_{-1/2}(\cos t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[P_k(\cos t)\,Q_{-1/2}(\cos t)-P_{k-1}(\cos t)\,Q_{1/2}(\cos t)\right]\tag{1.24}$$

$$\theta_k(t)=\left(k-\frac{1}{2}\right)P_{k-1}(\cos t)/2Q_{-1/2}(\cos t)\qquad (k=1,\ 2,\cdots)\tag{1.25}$$

Воспользовавшись другой известной формулой для многочленов Лежандра [14]

$$P_k(\cos t)=\frac{2}{\pi}\int_t^\pi \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)s\,ds}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)\tag{1.26}$$

формулы (1.17) — (1.20) представим также в виде

$$\varphi_k(t)=-\frac{4}{\pi}\,\frac{[\ln\sin(t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)}\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ln\sin(t/2)}\int_t^\pi \frac{\cos(s/2)\sin ks\,ds}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\right]\tag{1.17'}$$

$$\psi_k(t)=-\frac{k}{\pi\ln\sin(t/2)}\int_t^\pi \frac{\cos(s/2)\sin ks\,ds}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\tag{1.18'}$$

$$\chi_k(t)=\frac{2}{\pi}\sin t\,Q^2_{-1/2}(\cos t)\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)}\int_t^\pi \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)s\,ds}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\right]\tag{1.19'}$$

$$\vartheta_k(t) = \frac{k-\frac{1}{2}}{\pi Q_{-1/2}(\cos t)} \int_t^\pi \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right) s ds}{\sqrt{2(\cos t - \cos s)}} \tag{1.20'}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

Использовав указанные выше выражения спектральных функций и приняв во внимание формулу (1.16), находим, что формулы обобщенного преобразования Фурье (1.6) — (1.9) примут вид:

$$F(k) = \int_0^\pi \varphi_k(t) f(t) \frac{\operatorname{ctg}(t/2)\, dt}{4[\ln\sin(t/2)]^2} \tag{1.27}$$

$$f(t) = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{F(k)\varphi_k(t)}{k} \tag{1.28}$$

$$G(k) = \int_0^\pi \psi_k(t) g(t) \frac{4[\ln\sin(t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} dt \tag{1.29}$$

$$g(t) = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{G(k)}{k} \psi_k(t) \tag{1.30}$$

$$F(k) = \int_0^\pi \chi_k(t) f(t) \frac{dt}{2\sin t\, Q^2_{-1/2}(\cos t)} \tag{1.31}$$

$$f(t) = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{F(k)}{k-\frac{1}{2}} \chi_k(t) \tag{1.32}$$

$$G(k) = \int_0^\pi \vartheta_k(t) g(t) 2\sin t\, Q^2_{-1/2}(\cos t)\, dt \tag{1.33}$$

$$g(t) = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{G(k)}{k-\frac{1}{2}} \vartheta_k(t) \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{1.34}$$

Здесь фундаментальные функции $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$, $\chi_k(t)$ и $\vartheta_k(t)$ даются формулами (1.22) — (1.25).

Несколько подробнее остановимся на формулах (1.29), (1.30), (1.33) и (1.34).

Приняв во внимание (1.23) и еще формулы (1.29) и (1.30), получим

$$G(k) = -k\int\limits_0^\pi [P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)]\, g(t) \ln\sin(t/2) \operatorname{tg}(t/2)\, dt$$

$$\ln\sin(t/2)\, g(t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} G(k)\,[P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)]$$

Положив здесь

$$-G(k) = ka_k, \quad g(t)\ln\sin(t/2) = h(t)$$

будем иметь:

$$a_k = \int\limits_0^\pi [P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)]\, h(t) \operatorname{tg}(t/2)\, dt \tag{1.35}$$

$$h(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} [P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)]\, ka_k \tag{1.36}$$

Последние представляют собой формулу разложения произвольной функции $h(t)$, для которой

$$\int\limits_0^\pi |h(t)|^2 \operatorname{tg}(t/2)\, dt < \infty$$

в ряд по полиномам $P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)$. После подстановки $x = \cos t$ формулы (1.35) и (1.36) примут вид:

$$a_k = \int\limits_{-1}^{1} [P_k(x) + P_{k-1}(x)]\, \frac{f(x)\, dx}{1+x} \tag{1.37}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\,[P_k(x) + P_{k-1}(x)] \tag{1.38}$$

Эти формулы приведены и в [13].

Следует отметить, что имеет место соотношение [14] (формула 8.961;9)

$$P_k(x) + P_{k-1}(x) = 2P_k^{(1,-1)}(x)$$

где

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\ (\alpha < 1,\ \beta < 1) — \text{полиномы Якоби.}$$

Следовательно, формулы (1.37) и (1.38) являются предельными случаями соответствующих формул для полиномов Якоби. Таким образом, нами установлена справедливость формулы разложения произвольной функции $f(x) \in L_p^2(-1, 1)$, где $p(x) = (1+x)^{-1}$ по полиномам $P_k^{(1,-1)}(x)$, представляющим предельный случай полиномов Якоби.

Обращаясь к формулам (1.33) и (1.34), обнаружим, что при использовании формулы (1.25) можно их записать в виде

$$a_k = \int_0^\pi P_{k-1}(\cos t)\, g(t) \sin t\, dt \tag{1.39}$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2} \right) a_k P_{k-1}(\cos t) \tag{1.40}$$

Формулы (1.39) и (1.40) совпадают с известной формулой разложения произвольной функции из $L_p^2(0, \pi)$, где $p(t) = \sin t$, по полиномам Лежандра.

В заключение следует отметить, что применение указанных выше результатов М. Г. Крейна к рассмотренным конкретным примерам позволяет получить не только известные формулы обобщенного преобразования Фурье (1.37) и (1.38), (1.39) и (1.40), но и новые, например, формулы (1.27) и (1.28), (1.31) и (1.32).

2. Переходим к решению парных рядов-уравнений (0.1) и (0.2). Прежде всего заметим, что парные ряды-уравнения (0.1) ((0.2)) с k^{-1} $\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^{-1}\right)$ во втором соотношении при помощи замены x на $-x$, α на $-\alpha$, a_k на ka_k $\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) a_k\right)$, b_k на $-kb_k$ $\left(-\left(k - \frac{1}{2}\right) b_k\right)$, $f(-x)$ на $f(x)$ и, наконец, $g(-x)$ на $g(x)$ переходят в те же парные ряды-уравнения (0.1) ((0.2)) с k $\left(k - \frac{1}{2}\right)$ во втором соотношении. Поэтому будем рассматривать только парные ряды-уравнения:

$$\begin{gathered} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx - b_k \sin kx = f(x) \quad (-\pi < x < \alpha) \\ b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = g(x) \quad (\alpha < x < \pi) \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x + b_k \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x = f(x) \quad (-\pi < x < \alpha) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2} \right) \left[a_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x + b_k \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right] = g(x) \\ (\alpha < x < \pi). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Отметим, что решение парных рядов-уравнений (2.1) и (2.2) можно элементарным способом свести к решению интегральных уравнений первого рода (1.1) с произвольной правой частью соответственно с ядрами, указанными в (1.13). Решения этих интегральных уравнений содержатся в [3, 5].

Ниже будет изложен другой метод решения парных рядов-уравнений, представляющий некоторый самостоятельный интерес. При этом будет использовано следующее вспомогательное простое соображение.

Произвольную непрерывную функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, единственным образом можно представить в известном виде

$$f(x)=\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}+\frac{f(x)-f(a+b-x)}{2}$$

притом первое слагаемое — четное, а второе — нечетное относительно середины $x=\frac{a+b}{2}$ отрезка $[a, b]$.

На основании только что сказанного парные ряды-уравнения (2.1) и (2.2) можем преобразовать к виду

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\lambda_k t=f_+(t)\quad(0<t<a)$$

$$B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k A_k\cos\lambda_k t=g_{\pm}(t)\quad(a<t<\pi)\tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k\sin\lambda_k t=f_-(t)\quad(0<t<a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k B_k\sin\lambda_k t=g_{\mp}(t)\quad(a<t<\pi)\tag{2.4}$$

Здесь λ_k соответственно уравнениям (2.1) и (2.2) имеет значение k или $k-\frac{1}{2}$, а $A_0=a_0$, $B_0=b_0$, если $\lambda_k=k$ и $A_0=B_0=0$, если $\lambda_k=k-\frac{1}{2}$. В уравнениях (2.3) берется $g_+(t)$ или $g_-(t)$ в зависимости от того, будет ли $\lambda_k=k$ или $\lambda_k=k-\frac{1}{2}$, а в уравнениях (2.4) — наоборот. Кроме того, здесь приняты следующие обозначения:

$$A_k=a_k\cos\frac{\lambda_k(\pi-\alpha)}{2}-b_k\sin\frac{\lambda_k(\pi-\alpha)}{2}\tag{2.5}$$

$$B_k=a_k\sin\frac{\lambda_k(\pi-\alpha)}{2}+b_k\cos\frac{\lambda_k(\pi-\alpha)}{2}\tag{2.6}$$

$$f_{\pm}(t)=\frac{f\left(t-\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\pm f\left(\frac{\alpha-\pi}{2}-t\right)}{2},\quad t=x+\frac{\pi-\alpha}{2}$$

$$g_{\pm}(t) = \frac{g\left(t - \frac{\pi - \alpha}{2}\right) \pm g\left(\frac{3\pi + \alpha}{2} - t\right)}{2}, \quad a = \frac{\pi + \alpha}{2}$$

Парные ряды-уравнения (2.3) и (2.4) и рассматривались в большинстве цитированных в начале статьи работах. К решению этих парных рядов-уравнений будет применяться метод М. Г. Крейна.

Сначала рассмотрим уравнения (2.3) с $\lambda_k = k$. Интегрируя второе соотношение от t до π, эти уравнения представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt = \bar{f}_+(t) \quad (0 < t < a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kt = \bar{g}_+(t) \quad (a < t < \pi) \tag{2.7}$$

где

$$\bar{f}_+(t) = f_+(t) - a_0, \quad \bar{g}_+(t) = -\int_t^{\pi} g_+(s)\, ds + b_0(\pi - t)$$

К первому равенству (2.7) применим оператор преобразования (1.17), а ко второму — оператор преобразования (1.17′). Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t) = F_+(t) \quad (0 < t < a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t) = G_+(t) \quad (a < t < \pi)$$

где

$$F_+(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{[\ln \sin (t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{\ln \sin (t/2)} \int_0^t \frac{\cos (s/2)\, \bar{f}_+(s)\, ds}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \right| \tag{2.8}$$

$$G_+(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{[\ln \sin (t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{\ln \sin (t/2)} \int_t^{\pi} \frac{\cos (s/2)\, \bar{g}_+(s)\, ds}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \right| \tag{2.9}$$

Приняв во внимание формулы обобщенного преобразования Фурье (1.27) и (1.28), находим

$$A_k = \frac{1}{2k} \left\{ \int_0^a F_+(t)\, \varphi_k(t) \frac{\operatorname{ctg}(t/2)\, dt}{[\ln \sin (t/2)]^2} + \right.$$

$$+\int_a^\pi G_-(t)\,\varphi_k(t)\,\frac{\operatorname{ctg}(t/2)\,dt}{[\ln\sin(t/2)]^2}\Bigg]$$

Если в последнюю формулу подставить выражения функций $\varphi_k(t)$ из (1.17) и (1.17′), то после некоторых простых преобразований будем иметь:

$$A_k=-\frac{2}{\pi k}\left\{\int_0^a\left[\frac{F_+(a)}{\ln\sin(a/2)\,\vartheta(s,\ a)}-\int_s^a\frac{F_+'(t)\,dt}{\ln\sin(t/2)\,\vartheta(s,\ t)}\right]\times\right.$$

$$\times\cos(s/2)\cos ksds-\int_a^\pi\left[\frac{G_-(a)}{\ln\sin(a/2)\,\vartheta(a,\ s)}-\right. \tag{2.10}$$

$$\left.-\int_a^s\frac{G_+'(t)\,dt}{\ln\sin(t/2)\,\vartheta(t,\ s)}\right]\cos(s/2)\cos ksds\Bigg\}\quad(k=1,\ 2,\cdots)$$

Здесь $\vartheta(t,\ s)=\sqrt{2(\cos t-\cos s)}$. Таким образом, коэффициенты определяются формулой (2.10), где функции $F_+(t)$ и $G_-(t)$ даются равенствами (2.8) и (2.9).

Поступая совершенно аналогичным образом, при помощи операторов преобразования (1.19) и (1.19′) и формул обобщенного преобразования Фурье (1.31) и (1.32) решение парных рядов-уравнений (2.3) с $\lambda_k=k-\dfrac{1}{2}$ получим в виде

$$A_k=\frac{2}{\pi\left(k-\dfrac{1}{2}\right)}\left\{\int_0^a\left[\frac{F_+(a)}{Q_{-1/2}(\cos a)\,\vartheta(s,\ a)}-\int_s^a\frac{F_+'(t)\,dt}{Q_{-1/2}(\cos t)\,\vartheta(s,\ t)}\right]\times\right.$$

$$\times\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)sds-\int_a^\pi\left[\frac{G_-(a)}{Q_{-1/2}(\cos a)\,\vartheta(a,\ s)}-\right. \tag{2.11}$$

$$\left.+\int_a^s\frac{G_-'(t)\,dt}{Q_{-1/2}(\cos t)\,\vartheta(t,\ s)}\right]\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)sds\Bigg\}\quad(k=1,\ 2,\cdots)$$

где

$$F_+(t)=\frac{2}{\pi}\sin t\,Q_{-1/2}^2(\cos t)\,\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)}\int_0^t\frac{f_1(s)\,ds}{\vartheta(s,\ t)}\right]$$

$$G_-(t)=-\frac{2}{\pi}\sin t\,Q_{-1/2}^2(\cos t)\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)}\int_t^\pi\frac{[\bar g_-(s)-C]\,ds}{\vartheta(t,\ s)}\right\}$$

Здесь C — постоянная, а $\bar{g}_-(t) = \int\limits_t^{\pi} g_-(s)\,ds$. Эта постоянная может быть определена из равенства l

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} A_k$$

Заметив, что сами коэффициенты A_k выражаются через C, обнаружим, что последнее равенство является некоторым уравнением для определения этой постоянной.

Обращаясь к парным рядам-уравнениям (2.4) с $\lambda_k = k$, представим их в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k d \sin kt = df_-(t) \quad (0 < t < a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k d \cos kt = -g_-(t) \quad (a < t < \pi)$$

Отсюда при помощи операторов преобразования (1.18) и (1.18′) и формул обобщенного преобразования Фурье (1.29) и (1.30) способом, совершенно аналогичным изложенному выше, получим

$$B_k = -\frac{8}{\pi} \left| \int\limits_0^a \left(\int\limits_s^a \frac{F_-(t) \ln \sin (t/2)\, dt}{\operatorname{ctg}(t/2)\, \theta(s,\ t)} \right) \cos (s/2) \cos ks ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_a^{\pi} \left(\int\limits_a^s \frac{G_-(t) \ln \sin (t/2)\, dt}{\operatorname{ctg}(t/2)\, \theta(t,\ s)} \right) \cos (s/2) \sin ks ds \right| \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.12}$$

где

$$F_-(t) = -\frac{1}{\pi \ln \sin (t/2)} \int\limits_0^t \frac{\cos (s/2)\, df_-(s)}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}}$$

$$G_-(t) = -\frac{1}{\pi \ln \sin (t/2)} \int\limits_t^{\pi} \frac{\cos (s/2)\, g_-(s)\, ds}{\sqrt{2(\cos t - \cos s)}}$$

Интеграл в выражении $F_-(t)$ понимается в смысле Стильтьеса.

Поступая совершенно так же при помощи операторов преобразования (1.20) и (1.20′) и формул обобщенного преобразования Фурье (1.33) и (1.34), решение парных рядов-уравнений (2.4) при $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$ получим в следующем виде:

$$B_k = \frac{4}{\pi}\left[\int_0^\alpha\left(\int_s^\alpha \frac{F_-(t)\sin t\, Q_{-1/2}(\cos t)\,dt}{\vartheta(s,\ t)}\right)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)s\,ds -\right.$$

$$\left.-\int_\alpha^\pi\left(\int_\alpha^s \frac{G_+(t)\sin t\, Q_{-1/2}(\cos t)\,dt}{\vartheta(t,\ s)}\right)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)s\,ds\right] \qquad (2.13)$$

$$(k = 1,\ 2, \cdots)$$

где

$$F_-(t) = \frac{1}{\pi Q_{-1/2}(\cos t)}\int_0^t \frac{df_-(s)}{\vartheta(s,\ t)}$$

$$G_+(t) = \frac{1}{\pi Q_{-1/2}(\cos t)}\int_t^\pi \frac{g_+(s)\,ds}{\vartheta(t,\ s)}$$

Полученные нами формулы (2.10) — (2.13) для коэффициентов A_k и B_k имеют место для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$. Однако, они практически пригодны для функций $f(x)$ и $g(x)$ более общего класса.

После того как определены A_k и B_k, коэффициенты a_k и b_k могут быть найдены из равенств (2.5) и (2.6).

Остановимся на вопросе определения a_0 и b_0. Следуя работе [11], эти коэффициенты определим из равенств

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = f(-\pi)$$

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k a_k = g(\pi) \qquad (2.14)$$

которые получаются из (2.3) с $\lambda_k = k$, если в первом соотношении подставить $x = -\pi$, а во втором $x = \pi$. Заметив, что сами коэффициенты a_k и b_k выражаются через a_0 и b_0 посредством формул (2.10), (2.11), (2.8), (2.9), (2.5) и (2.6), видим, что равенства (2.14) образуют систему уравнений для определения коэффициентов a_0 и b_0. Эти коэффициенты можно определить и из требования принадлежности решений парных рядов-уравнений к определенному классу.

Отметим, что, отправляясь от операторов преобразования (1.21) и (1.26) и формул обобщенного преобразования Фурье (1.35) и (1.36), (1.39) и (1.40) и поступая совершенно аналогично изложенному выше, решения парных рядов-уравнений (2.3) соответственно случаям $\lambda_k = k$ и $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$ получим посредством следующих формул:

$$A_k = \frac{2k}{\pi}\left[\int_0^\pi\left(\int_s^\pi \frac{F_+^*(t)\,\mathrm{tg}\,(t/2)\,dt}{\sqrt{2(\cos s-\cos t)}}\right)\cos(s/2)\cos ksds + \right. \tag{2.15}$$

$$\left. + \int_0^\pi\left(\int_0^s \frac{G_-^*(t)\,\mathrm{tg}\,(t/2)\,dt}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\right)\cos(s/2)\sin ksds\right]$$

$$(k = 1,\ 2,\cdots)$$

$$A_k = \frac{2k-1}{\pi}\left[\int_0^\pi\left(\int_s^\pi \frac{F_-^*(t)\sin tdt}{\sqrt{2(\cos s-\cos t)}}\right)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)sds + \right. \tag{2.16}$$

$$\left. + \int_0^\pi\left(\int_0^s \frac{G_-^*(t)\sin tdt}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\right)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)sds\right]$$

Здесь функции $F_\pm^*(t)$ соответственно случаям $\mu_k = k$ и $\mu_k = k - \dfrac{1}{2}$ имеют вид

$$F_+^*(t) = \frac{4}{\pi}\int_0^t \frac{\cos(s/2)\bar{f}_+(s)\,ds}{\vartheta(s,\ t)}, \quad F_-^*(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\bar{f}_-(s)\,ds}{\vartheta(s,\ t)}$$

а функции $G_+^*(t)$ и $G_-^*(t)$ будут:

$$G_+^*(t) = \frac{4}{\pi}\int_t^\pi \frac{\cos(s/2)\bar{g}_+(s)\,ds}{\vartheta(t,\ s)}, \quad G_-^*(t) = -\frac{2}{\pi}\int_t^\pi \frac{[\bar{g}_-(s)-C]\,ds}{\vartheta(t,\ s)}$$

Кроме того, имеем

$$\bar{f}_+(t) = f_+(t) - a_0, \quad \bar{g}_-(t) = -\int_t^\pi g_-(s)\,ds - b_0(\pi - t)$$

$$\vartheta(t,\ s) = \sqrt{2(\cos t-\cos s)}$$

а уравнение для определения C указано выше.

Аналогичные формулы для решений парных рядов-уравнений (2.4) будут:

$$B_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi\left(\int_s^\pi \frac{F_-^*(t)\,\mathrm{tg}\,(t/2)\,dt}{\sqrt{2(\cos s-\cos t)}}\right)\cos(s/2)\cos ksds + \right. \tag{2.17}$$

$$\left. + \int_0^\pi\left(\int_0^s \frac{G_-^*(t)\,\mathrm{tg}\,(t/2)\,dt}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\right)\cos(s/2)\sin ksds\right] \quad (k = 1,\ 2,\cdots)$$

$$B_k=\frac{2}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi}\Big(\int\limits_s^{\pi}\frac{F_-^*(t)\sin t\,dt}{\sqrt{2(\cos s-\cos t)}}\Big)\cos\Big(k-\frac{1}{2}\Big)s\,ds+$$

$$+\int\limits_0^{\pi}\Big(\int\limits_0^{s}\frac{G_-^*(t)\sin t\,dt}{\sqrt{2(\cos t-\cos s)}}\Big)\sin\Big(k-\frac{1}{2}\Big)s\,ds\Big]\quad(k=1,\ 2,\cdots)\tag{2.18}$$

Здесь функции $F_-^*(t)$ соответственно случаям $\lambda_k=k$ и $\lambda_k=k-\frac{1}{2}$ даются формулами

$$F_-^*(t)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^t\frac{\cos(s/2)\,f_-^*(s)\,ds}{\vartheta(s,\ t)},\quad F_-^*(t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t\frac{f_-^*(s)\,ds}{\vartheta(s,\ t)}$$

а функции $G_-^*(t)$ и $G_-^*(t)$ — формулами

$$G_-^*(t)=\frac{4}{\pi}\int\limits_t^{\pi}\frac{\cos(s/2)\,g_-(s)\,ds}{\vartheta(t,\ s)},\quad G_-^*(t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_t^{\pi}\frac{g_-(s)\,ds}{\vartheta(t,\ s)}$$

Формулы (2.15) — (2.18) имеют более простую структуру, чем соответствующие формулы (2.10) — (2.13). Однако, последние формулы имеют, как нам представляется, более широкое применение.

В заключение приношу благодарность Б. А. Абрамяну, обратившему мое внимание на важность рассмотрения парных рядов-уравнений (0.1) и (0.2).

Институт математики и механики
АН Арм. ССР

Поступила 18 II 1970

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԼՐԻՎ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՏԻՊԻ ՇԱՐՔ-ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

[1, 2] աշխատանքում պարունակվող Մ. Գ. Կրեյնի մի քանի մասնավոր արդյունքների հիման վրա, ներկա հոդվածում դիտարկվում են չորս տիպի լրիվ օրթոգոնալ ֆունկցիաների սիստեմներ $L^2(0,\ \pi)$ տարածության մեջ, որոնք հանդիսանում են որոշակի դիֆերենցիալ սիստեմների լուծումները: Ֆունկցիաների այդ սիստեմների օգնությամբ, փակ տեսքով, լուծվում են եռանկյունաչափական կորիզներով երկու տիպի շարք-հավասարումներ, որոնք հանդիպում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի բազմազան խնդիրներում, մասնավորապես առաձգականության տեսության խառը խնդիրներում:

ON SOME COMPLETE ORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS AND THEIR APPLICATION TO A SOLUTION OF TWO TYPES OF DUAL SERIES-EQUATIONS

S. M. MKHITARIAN

Summary

On the basis of some particular results of M. G. Krein presented in [1,2], this paper deals with four types of complete orthogonal systems of functions in $L^2(0, \pi)$ which are the solutions to certain differential systems. With the help of these systems of functions the dual series-equations with trigonometrical kernels (0. 1) and (0. 2) in a closed form are solved, encountered in the variety of problems of mathematical physics, in the mixed problems of the theory of elasticity in particular.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной красвой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, № 6, 1952, 987—990
2. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности. Докл. АН СССР, т. 105, № 4, 1955, 637—640.
3. *Мхитарян С. М.* Об эффективном решении некоторых классов линейных интегральных уравнений первого рода и связанных с ними дифференциальных уравнениях. Докл. АН АрмССР, т. XVIII, № 2, 1969, 71—77.
4. *Мхитарян С. М.* О формулах Н. И. Ахиезера и В. А. Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов. Матем. исследования, Кишинев, т. 3, вып. 1 (7), 1968, 61—70
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Глава IV, § 8. Наука, М., 1967.
6. *Shepherd W. M.* On trigonometrical series with mixed conditions. Proc. London. Math. Soc. (Ser. 2), vol. 43, 1937, pp. 366—375.
7. *Tranter C. J.* Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 4, No. 2, 1957, pp. 49—57.
8. *Tranter C. J.* A further note on dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 4, No. 4, 1960, pp. 198—200.
9. *Tranter C. J.* An improved method for dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 6, 1964, pp. 136—140
10. *Srivastav R. P.* Dual series relations. Dual relations involving trigonometrical series. Proc. Royal Soc. Edinburgh, vol. 66, part 3, 1964, pp. 173—184.
11. *Агранович З. С., Марченко В. А.* и *Шестопалов В. П.* Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. Ж. тех. физики, XXXII, вып. 4, 1962, 381—394.
12. *Баблоян А. А.* Решение некоторых „парных" рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964, 149—157.
13. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений. Прикл. матем. и мех., т. 31, вып. 4, 1967, 678—689.
14. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.