

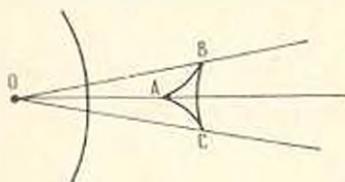
А. А. ГУРГЕНЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА ВБЛИЗИ
 ОСОБОЙ ТОЧКИ МЕДЛЕННОЙ МАГНИТОЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Пусть в проводящей жидкости, находящейся в однородном магнитном поле, в некоторой точке O расположен источник возмущений (фиг. 1). Выберем ось Ox по направлению магнитного поля, а ось Oy перпендикулярно к нему. Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики в плоском случае запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= q e^{-i\omega t} \zeta(x, y) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= a_0^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} &= -B_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{aligned} \tag{1}$$

где v_x, v_y — компоненты скорости по осям, B_0, a_0, ρ_0 — невозмущенное магнитное поле, скорость звука в жидкости и плотность. p, ρ, B_x, B_y — возмущенные значения давления, плотности и компонент магнитного поля, причем правая часть первого уравнения (1) соответствует источнику массы в точке O с расходом $q e^{-i\omega t}$.



Фиг. 1.

Следует отметить, что уравнение (1) при $q = \frac{q_0}{(-i\omega)^2}$ соответствует периодическому по t решению, поэтому все решения до фор-

мулы (22) также соответствуют периодическим решениям. Обратное преобразование Фурье по t , используемое в формуле (22) и далее, соответствует правой части первого уравнения [1] вида

$$q_0 t^{\lambda-1} \varepsilon(t) \Gamma(k), \quad \text{где } \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) ищем методом Фурье [1]

$$\begin{aligned} \rho &= e^{-i\omega t} \iint e^{i\alpha x - i\beta y} F_1(\alpha, \beta, \omega) d\alpha d\beta \\ p &= e^{-i\omega t} \iint e^{i\alpha x + i\beta y} F_2(\alpha, \beta, \omega) d\alpha d\beta \\ v_x &= e^{-i\omega t} \iint e^{i\alpha x + i\beta y} F_3(\alpha, \beta, \omega) d\alpha d\beta \\ v_y &= e^{-i\omega t} \iint e^{i\alpha x + i\beta y} F_4(\alpha, \beta, \omega) d\alpha d\beta \\ B_x &= e^{-i\omega t} \iint e^{i\alpha x + i\beta y} F_5(\alpha, \beta, \omega) d\alpha d\beta \\ B_y &= e^{-i\omega t} \iint e^{i\alpha x + i\beta y} F_6(\alpha, \beta, \omega) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и применяя формулу преобразования Фурье по x, y , можно для подынтегральных функций получить систему

$$\begin{aligned} -i\omega F_1 + \rho_0 i\alpha F_3 + \rho_0 i\beta F_4 &= \frac{q}{4\pi^2} \\ i\omega F_3 &= \frac{1}{\rho_0} i\alpha F_1 \\ -i\omega F_4 &= -\frac{1}{\rho_0} i\beta F_1 + \frac{B_0}{4\pi^2 \rho_0} (i\alpha F_5 - i\beta F_6) \\ i\omega F_2 &= \alpha^2 i\omega F_1 \\ i\omega F_5 &= B_0 i\beta F_4 \\ -i\omega F_6 &= B_0 i\alpha F_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Решая систему (3), можно найти, например, для F_2

$$F_2 = \frac{\mathcal{F}(\alpha, \beta, \omega)}{G(\alpha, \beta, \omega)} = \frac{\frac{q_0}{4\pi^2} \alpha_0^2 (\omega^2 - \alpha_1^2 k^2)}{\omega^2 [\omega^2 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) k^2] + \alpha_0^2 \alpha_1^2 \gamma^2 k^2} \quad (5)$$

где $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\alpha_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi^2}$ — квадрат скорости Альфвена.

Согласно (3) давление запишется в виде

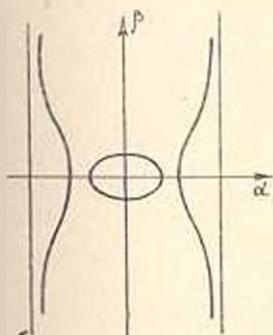
$$p = e^{-i\omega t} \int \int_{G=0} e^{i\alpha x + i\beta y} \frac{F(\alpha, \beta, \omega)}{G(\alpha, \beta, \omega)} d\alpha d\beta \quad (6)$$

где $G(\alpha, \beta, \omega) = 0$ есть уравнение поверхности нормалей для системы (1).

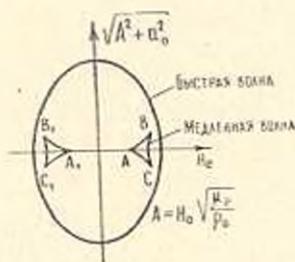
В дальнейшем изучается окрестность фронтов быстрой и медленной магнитозвуковых волн, поэтому в (6) следует исследовать особенности подынтегрального выражения, т. е. окрестность $G = 0$. Тогда [1]

$$p = e^{-i\omega t} 2\pi i \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{i\alpha x + i\beta y} \frac{F[\alpha(\beta, \omega), \beta, \omega]}{G_{,\alpha}[\alpha(\beta, \omega), \beta, \omega]} d\beta \quad (7)$$

где $\alpha = \alpha(\beta, \omega)$ есть уравнение $G = 0$ (фиг. 2), причем для каждого значения β имеется по два значения α соответственно для быстрой и медленной волны (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В решении (7) вместо суммы четырех интегралов, соответствующих указанным значениям α , берется только один, соответствующий бегущей вправо медленной магнитозвуковой волне ABC .

Для определения решения на поле ABC можно применить к интегралу (7) метод перевала. Стационарные точки определяются из уравнения

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} x + y = 0 \quad (8)$$

которое вместе с уравнением плоских волн

$$\alpha x + \beta y - \omega t = 0 \quad (9)$$

дает уравнение волны ABC

$$x = \frac{\omega t}{\alpha - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}}, \quad y = -\frac{\omega t}{\alpha - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \quad (10)$$

Обозначая решение (8) через α_0 , β_0 и разлагая в ряд $\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} (\beta - \beta_0)^2$, можно вычислить интеграл

$$p_0 = e^{i(\alpha_0 x + \beta_0 y - \omega t)} \frac{F(\alpha_0, \beta_0, \omega)}{G_0(\alpha_0, \beta_0, \omega)} \sqrt{\frac{2i\pi \sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2} ix \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}}} \quad (11)$$

Выражение (11) дает решение на фронте волны ABC .

Аналогичное выражение получается для решения на фронте быстрой волны $A_0 B_0 C_0$. Поскольку для быстрой волны $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}$ обратно пропорционально кривизне самой волны [1] и отрицательно, то $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}$ для волны BC , кривизна которой обратна по знаку кривизне $A_0 B_0 C_0$, будет положительно, а для волны AB отрицательно. Тогда характер особенности решения на волнах $A_0 B_0 C_0$ и AB будет отличаться от особенности решения на волне BC .

В частности, скачкообразное решение на $A_0 B_0 C_0$ и AB в плоской задаче соответствует логарифмической особенности на BC .

Наиболее интересно поведение решения вблизи острия B , где кривизна волны BAC бесконечна и соответственно $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = 0$. Тогда можно для выражения в экспоненте (7), полагая $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = 0$ при $\beta = \beta_1$, взять разложение

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} (\beta - \beta_1) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \beta^3} (\beta - \beta_1)^2 \quad (12)$$

где отброшенные члены — малые более высокого порядка. Подставляя (12) в (7) и вынося медленно-меняющиеся функции за знак интеграла, вблизи точки B можно получить для давления выражение

$$p = 2\pi i \frac{F(\alpha_1, \beta_1, \omega)}{G_0(\alpha_1, \beta_1, \omega)} e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y - \omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\beta - \beta_1) x + i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} (\beta - \beta_1)^2 + \frac{1}{3!} i \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \beta^3} (\beta - \beta_1)^3} d\beta \quad (13)$$

Замена переменной $\frac{1}{3!} x \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \beta^3} (\beta - \beta_1)^3 = \frac{z^3}{3}$ позволяет выразить (13) через функцию Эйри, которая имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{ixz + i \frac{z^3}{3}} dz \quad (14)$$

В дальнейшем все x и β суть величины, отнесенные к ω , и индексы при них отбрасываются.

Тогда решение (13) запишется в виде

$$p = B \frac{\omega^{3/2}}{(-i\omega)^k} e^{i\omega t} \Phi(\omega^{2/3} \xi) \quad (15)$$

где введены обозначения

$$\theta = \alpha x + \beta y - t, \quad \xi = \left(\frac{2}{x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} x + y \right) \quad (16)$$

$$B = \frac{q_0}{V \pi} \frac{a_0^2 (1 - a_0^2 k^2)}{G_0(\alpha, \beta)} \left(\frac{2}{x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}} \right)^{1/2}$$

причем K вещественно.

Применяя формулы асимптотического представления функции Эяри для больших отрицательных ξ , из (15) можно найти давление на волне BC вдали от B

$$p_0 = B e^{i\omega t} \frac{\omega^{3/2}}{(-i\omega)^k} e^{-\frac{2}{3} i\omega (-\xi)^{3/2}} \omega^{-1/6} t^{1/4} (-\xi)^{-1/4} \quad (17)$$

Решение на фронте волны BC получится обратным преобразованием Фурье по $s = -i\omega$ для выражения (17), причем при $k = \frac{3}{2}$ получится степенной профиль давления, а при $k = \frac{3}{2}$ имеется логарифмическая особенность.

Из (17) видно, что уравнение BC вблизи B имеет вид

$$\delta = \theta - \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} = 0 \quad (18)$$

Тогда профиль давления на BC имеет порядок $\delta^{k-1/2}$.

Как было отмечено выше, в правой части (1) $q_0/(-i\omega)^2$ соответствует преобразованию Фурье по t для функции $q_0 t^{k-1} a(t)/\Gamma(k)$ и при $k=0$ соответствует $q_0 \delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. Таким образом, $\delta(t)$ в правой части (1) соответствует особенности на BC порядка $\delta^{-1/2}$.

Для определения решения в окрестности точки B следует применить обратное преобразование Фурье к выражению (15), записанному в виде

$$p = B e^{i\omega t} \frac{\omega^{2/3}}{(-i\omega)^k} \Phi(\omega^{2/3} \xi) \quad (19)$$

Обратное преобразование Фурье для (19) запишем в виде [2]

$$p = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i B e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{-i \omega} (-i \omega)^{-k + \frac{1}{2}} \omega^{\frac{1}{3}} \Phi(\omega^{2/3} \xi) d\omega \quad (20)$$

Полагая $k_1 = k - \frac{3}{2}$, для случая $k_1 = 0$, используя соотношение

$$\begin{aligned} \Phi(\omega^{2/3} \xi) = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \omega^{\frac{1}{3}} (-i \xi)^{1/2} \left\{ e^{i \frac{\pi}{4}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} \omega (-i \xi)^{3/2} \right] + \right. \\ & \left. + e^{-i \frac{\pi}{4}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left[\frac{2}{3} \omega (-i \xi)^{3/2} \right] \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

и вводя обозначение $\frac{2}{3} (-i \xi)^{3/2} = u$, $\omega u = x$, из (20) можно получить

$$p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{3}} (-i \xi)^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left\{ i B e^{i \frac{3\pi}{12}} J_2 + i B e^{-i \frac{3\pi}{12}} J_1 \right\} \quad (22)$$

где

$$J_1 = \int_0^{\infty} e^{i \frac{\pi}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x) x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad J_2 = \int_0^{\infty} e^{i \frac{5\pi}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x) x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (23)$$

При $\frac{5}{u} > 1$ контур интегрирования в обоих этих интегралах можно деформировать вверх так, чтобы он сояпал с мнимой положительной полуосью. Учитывая следующие соотношения между цилиндрическими функциями

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(se^{-i \frac{\pi}{2}}\right) &= \frac{2}{\pi} e^{i \frac{\pi}{3}} K_{\frac{1}{3}}(s) + 2e^{-i \frac{\pi}{6}} J_{\frac{1}{3}}(s) \\ H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(se^{-i \frac{\pi}{2}}\right) &= \frac{2}{\pi} e^{-i \frac{2\pi}{3}} K_{\frac{1}{3}}(s) \quad (24) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2}{\pi} e^{i \frac{7\pi}{12}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{4s}{3}} K_{\frac{1}{3}}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds + 2e^{i \frac{5\pi}{12}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{9s}{6}} J_{\frac{1}{3}}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds \\ J_2 &= \frac{2}{\pi} e^{-i \frac{5\pi}{12}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{9s}{6}} K_{\frac{1}{3}}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds \quad (25) \end{aligned}$$

Входящие в правую часть интегралы могут быть выражены через сферические функции [2]

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 2\sqrt{2\pi} e^{i\frac{5\pi}{12}} p_{-1}\left(\frac{\theta}{u}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{5\pi}{12}} Q_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\theta}{u}\right) \\
 J_2 &= 2\sqrt{2\pi} e^{-i\frac{5\pi}{12}} p_{-1}\left(\frac{\theta}{u}\right)
 \end{aligned} \quad (26)$$

При $\frac{\theta}{u} < -1$ контур интегрирования в (23) можно деформировать вниз, сопоставляя его с мнимой отрицательной полуосью. Используя соотношение

$$\begin{aligned}
 H_{\frac{1}{2}}^{(2)}\left(se^{-i\frac{\pi}{2}}\right) &= \frac{2}{\pi} e^{i\frac{2\pi}{3}} K_{\frac{1}{2}}(s) \\
 H_{\frac{1}{2}}^{(1)}\left(se^{-i\frac{\pi}{2}}\right) &= \frac{2}{\pi} e^{-i\frac{2\pi}{3}} K_{\frac{1}{2}}(s) + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} J_{\frac{1}{2}}(s)
 \end{aligned} \quad (27)$$

получим

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{2}{\pi} e^{i\frac{5\pi}{12}} \int_0^{\infty} e^{\frac{5s}{u}} K_{\frac{1}{2}}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds \\
 J_2 &= \frac{2}{\pi} e^{-i\frac{5\pi}{12}} \int_0^{\infty} e^{\frac{5s}{u}} K_{\frac{1}{2}}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds + 2e^{-i\frac{5\pi}{12}} \int_0^{\infty} e^{\frac{5s}{u}} J_{\frac{1}{2}}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds
 \end{aligned} \quad (28)$$

Интегралы (28) можно вычислить

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 2\sqrt{2\pi} e^{i\frac{5\pi}{12}} p_{-1}\left(-\frac{\theta}{u}\right) \\
 J_2 &= 2\sqrt{2\pi} e^{-i\frac{5\pi}{12}} p_{-1}\left(-\frac{\theta}{u}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{5\pi}{12}} Q_{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{\theta}{u}\right)
 \end{aligned} \quad (29)$$

В области $-1 < \frac{\theta}{u} < 1$ можно брать J_1 по (30), J_2 по (28).

Окончательно для давления имеем

$$p = B(-z)^{-\frac{1}{2}} f \quad (30)$$

где

$$F = \begin{cases} \sqrt{3} p_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\theta}{u}\right) + \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\theta}{u}\right) & \text{при } \frac{\theta}{u} > 1 \\ 2 p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\theta}{u}\right) & \text{при } -1 < \frac{\theta}{u} < 1 \\ p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\theta}{u}\right) & \text{при } \frac{\theta}{u} < -1 \end{cases} \quad (31)$$

Для произвольного k_1 решение будет сверткой полученного выше решения с $t^{k_1-1}/\Gamma(k_1)$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\Gamma(k_1)} \int_0^{\infty} \sqrt{3} (-\theta + \tau)^{k_1-1} p_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(k_1)} \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} (-\theta + \tau)^{k_1-1} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right) d\tau \\ F &= \frac{1}{\Gamma(k_1)} \int_u^{\infty} \sqrt{3} (-\theta + \tau)^{k_1-1} p_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(k_1)} \int_u^{\infty} \frac{2}{\pi} (-\theta + \tau)^{k_1-1} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(k_1)} \int_0^u 2 (-\theta + \tau)^{k_1-1} p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{u}\right) d\tau \\ F &= \frac{1}{\Gamma(k_1)} \int_{-u}^{\infty} (-\theta + \tau)^{k_1-1} p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{u}\right) d\tau + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(k_1)} \int_0^{-u} (-\theta + \tau)^{k_1-1} p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{u}\right) d\tau \end{aligned} \quad (32)$$

Используя равенство [3]

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} (-\theta + \tau)^{k_1-1} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right) d\tau = \\ &= \frac{2^{k_1-1} \Gamma(k_1) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{k_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1 - \frac{k_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} \times \end{aligned}$$

$$\times \theta^{k_1} \left(\frac{u}{\theta}\right)^{1+\nu} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \frac{k_1}{2}, \frac{\nu}{2} + 1 - \frac{k_1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{u^2}{\theta^2}\right) \quad (33)$$

и выражая гипергеометрическую функцию аргумента $\frac{u^2}{\theta^2}$ через гипергеометрическую функцию от аргумента $1 - \frac{u^2}{\theta^2}$ по формуле [6]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma, 1-z) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{1+\alpha-\gamma} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta, 1-z) \quad (34)$$

можно найти для (33)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (-\theta+z)^{k_1-1} Q_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz &= -\frac{2^{-k_1-1} \Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}-k_1\right)}{2\pi} \times \\ &\times \cos \pi \left(\frac{2}{3} + k_1\right) u^{\frac{1}{2}} \theta^{2-\frac{5}{2}} F\left(\frac{5}{12} - \frac{k_1}{2}, \frac{11}{12} - \frac{k_1}{2}, -k_1+1, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right) - \\ &- \frac{2^{-k_1-1} \pi u^{\frac{5}{2}} \theta^{k_1-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right)^{k_1}}{k_1 \sin \pi k_1} \times \\ &\times F\left(\frac{5}{12} + \frac{k_1}{2}, \frac{11}{12} + \frac{k_1}{2}, k_1+1, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right) \\ &= -\frac{2^{-k_1} \Gamma^2(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}-k_1\right)}{2\pi} \cos \pi \left(\frac{4}{3} - k_1\right) \times \\ &\times u^{\frac{1}{2}} \theta^{k_1-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{12} - \frac{k_1}{2}, \frac{7}{12} - \frac{k_1}{2}, -k_1+1, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right) - \frac{2^{-k_1-1} \pi u^{\frac{1}{2}}}{k_1 \sin \pi k_1} \times \\ &\times \theta^{k_1-1} \left(1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right)^{k_1} F\left(\frac{7}{12} + \frac{k_1}{2}, \frac{1}{12} + \frac{k_1}{2}, k_1+1, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right) \quad (35) \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$p_+(z) = \frac{ig \pi}{\pi} [Q_+(z) - Q_{-1}(z)] \quad (36)$$

можно найти решение при $\theta > u$

$$F = \frac{1}{2\pi} \frac{2^{k_1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6} - k_1\right) \cos \pi k_1}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \sin \pi\left(k_1 + \frac{1}{6}\right)} F_1 - \frac{2^{-k_1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1) \sin \pi k_1} F_2 \quad (37)$$

где

$$F_1 = |\theta|^{k_1 - \frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{12} - \frac{k_1}{2}, \frac{7}{12} - \frac{k_1}{2}, -k_1 + 1, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right)$$

$$F_2 = |\theta|^{k_1 - \frac{1}{6}} \left|1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right|^{k_1} F\left(\frac{1}{12} + \frac{k_1}{2}, \frac{7}{12} + \frac{k_1}{2}, k_1 + 1, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right)$$

Из (32) видно, что F , вообще говоря, непрерывно при $\theta = u$. Тогда можно за падающей волной при $-u < \theta < u$ принять

$$F = \frac{2^{k_1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6} - k_1\right) \cos \pi k_1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \sin \pi\left(\frac{1}{6} - k_1\right)} F_1 - A \frac{2^{-k_1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1) \sin \pi k_1} F_2 \quad (38)$$

Аналитическое продолжение (38) согласно [5] дает за отраженной волной при $\theta < -u$ решение

$$F = \frac{2^{k_1+1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \cos \pi k_1 \sin \pi k_1}{\Gamma\left(\frac{5}{6} + k_1\right) \Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \left(-\frac{1}{2} + \cos 2\pi k_1\right)} F_1 - \frac{2^{-k_1-1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1) \sin^2 \pi k_1} F_2 \quad (39)$$

а для $\theta > -u$ [5]

$$F = \frac{2^{-k_1-1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) [\cos \pi k_1 + A(-1 + 2 \cos 2\pi k_1)]}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} + k_1\right) \sin \pi k_1 (-1 + 2 \cos 2\pi k_1)} F_1 +$$

$$+ \frac{2^{-k_1-1} u^{\frac{1}{6}} (\cos \pi k_1 + A)}{k_1 \Gamma(k_1) \sin^2 \pi k_1} F_2 \quad (40)$$

Исходя из непрерывности F при $\theta = -u$, приравняем коэффициенты при F_1 в уравнениях (39) и (40) и находим, что $A = -\cos \pi k_1$, т. е. при $-u < \theta < u$ коэффициент при F_2 равен нулю.

При $k_1 = \frac{3}{2}n$, где n — целое число, согласно (38) имеет место $F = 0$ при $-u < \theta < u$.

Отметим, что согласно (3) и (5), имеет место

$$G \cdot F_2 = F \quad (41)$$

Полученное выше решение можно связать с решением уравнения

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} U = 0 \quad (42)$$

при начальных условиях

$$t = 0, \quad U = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = \delta(x) \delta(y) \quad (43)$$

причем при $U = p$ из (3) и (42) получится выражение (41).

Для общего оператора с постоянными коэффициентами, интегральная запись решения типа (7) исследована в работе [9].

Вводя для U изображение Фурье по t $\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} U dt$ и записывая \bar{U} в виде

$$\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x + i\beta y} U(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (44)$$

для $U(\alpha, \beta)$ с учетом (42) и (43) получим уравнение $GU = \frac{1}{4\pi^2}$, что

соответствует (41) с правой частью $F = \frac{1}{4\pi^2}$. Поскольку F пропор-

ционально $q^{(0)} = q_0 \frac{\omega^3}{(-i\omega)^k}$, решение задачи (42) и (43) получится из рассмотренного выше при $k = 3$, что согласно (17, 18) соответствует решению на фронте волны порядка $\delta^{3/2}$.

Поскольку решение задачи с произвольными начальными условиями получается с помощью линейной комбинации производных решения (44) [7], то оно получается из решения (39, 40) при k , равном целому числу, т. е. в этом случае в области $-u < \xi < u$ решение равно 0. Этот результат для всей области внутри ABC (фиг. 3) другим путем найден в [7].

Совершенно аналогично можно получить решение и для сферического случая. Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики в этом случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \nu_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= q e^{-i\omega t} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} &= -B_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial v_z}{\partial x}\end{aligned}\quad (45)$$

Если решение этих уравнений опять искать в виде интеграла Фурье, то после аналогичных вычислений, для давления вблизи B (фиг. 3) можно получить

$$\begin{aligned}p &= 2\pi i \frac{F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \omega)}{G_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \omega)} e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \omega t)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} (\beta^2 - \gamma^2) + \frac{1}{2} ix \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \beta^2 - \lambda \beta^2 + \frac{1}{2} ix \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} (1-\gamma)^2} d\beta d\gamma\end{aligned}\quad (46)$$

где $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \omega) = \frac{q_0 \omega^2}{8\pi^2 i} \alpha_0^2 [\omega^2 - \alpha_1^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)]$ и положено $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \gamma_1^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \beta_1^2} = 0$. Но интеграл (46) по γ легко вычисляется

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2} ix \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} (\gamma^2 - \beta^2)} d\gamma = \frac{\sqrt{-i}}{\sqrt{-\frac{1}{2} ix \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}}}\quad (47)$$

Тогда решение в сферическом случае получается из плоского, если последнее умножить на величину, равную правой части уравнения (47).

Если обозначить $\frac{\alpha}{\omega} = \alpha_2$, $\frac{\beta}{\omega} = \beta_2$, $\frac{\gamma}{\omega} = \gamma_2$ и в дальнейшем индексы при них отбросить, то для давления можно получить

$$p = B \sqrt{-i} \frac{\omega^{2/3}}{(-i\omega)^2} e^{i\omega z} \Phi(\omega^{2/3} z)\quad (48)$$

где

$$\theta = \alpha x + \beta y + \gamma z - t, \quad B = \frac{q_0}{2\pi} \frac{\alpha_0^2 (1 - \alpha_1^2 k^2)}{G_2(\alpha, \beta, \gamma)} \left(\frac{2}{x \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} x \frac{\partial^2 z}{\partial \gamma^2}}}\quad (49)$$

Сравнение с формулой (16) плоского случая показывает, что поскольку $\sqrt{i\omega} = i \sqrt{-i\omega}$, решение содержит дополнительный множитель $i \sqrt{-i\omega}$, который уменьшает k на $1/2$ и меняет характер решения, причём

сферический случай соответствует задаче о прохождении волны около каустики. Из (48) вдали от точки B на BC получится

$$p_{\text{сум}} = -B(-\xi)^{-1} t^{k_1} / \Gamma(k_1 + 1) \quad (50)$$

Обратное преобразование Фурье для (48) запишется в виде

$$p = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} B e^{i\omega t} e^{-t/\xi} (-i\omega)^{-k_1+1} \omega^{\frac{1}{3}} \Phi(\omega^{2/3} \xi) d\omega \quad (51)$$

При $k = 2$ решение найдено Газаряном [2], а при любом $k_1 = k - 2$ решение находится сверткой [4]

$$\frac{p}{A_0 \Gamma(k_1+1)} = \begin{cases} A_3 F_1 & \text{при } \theta > u \\ A_3 F_1 + 2^{-k_1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} F_2 & \text{при } -u < \theta < u \\ A_4 F_1 + 2^{-k_1-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\cos \pi k_1}{\sin \pi k_1} F_2 & \text{при } \theta < -u \end{cases} \quad (52)$$

где

$$A_0 = -B, \quad A_3 = \frac{2^{k_1} k_1 \Gamma^2(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6} - k_1\right) \sin \pi(k_1 + 1)}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \cos \pi\left(k_1 + \frac{2}{3}\right)}$$

$$A_4 = \frac{-2^{k_1-1} k_1 \Gamma^2(k_1) \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cos 2\pi k_1}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} + k_1\right) (1 - 2 \cos 2\pi k_1)}$$

Следует отметить, что при $k_1 = \frac{1}{2}$ получается функция

$F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{u^2}{\xi^2}\right)$, которая выражается через решение кубического уравнения

$$f^3 + 3f + 3\theta = 0 \quad (53)$$

в виде

$$\theta^{\frac{1}{3}} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{u^2}{\xi^2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{3}} f \quad (54)$$

К алгебраическим функциям приводятся также все решения при $k_1 = \frac{1}{2} \pm n, \frac{1}{6} \pm n, \frac{5}{6} \pm n$, причем к данным частным случаям относятся решение [8].

Так как решение вышеставленной задачи в виде (15) есть частный интеграл уравнения Эйлера-Трикоми, то естественно ожидать,

что уравнение (42) для давления, если перейти от переменных x, y, t к переменным θ и ξ , должно превратиться в вышеуказанное уравнение. Переменные θ и ξ имеют вид

$$\theta = \alpha x + \beta y - t, \quad \xi = \frac{K\lambda}{t^{1/3}} \quad (55)$$

где

$$K = \left(\frac{2}{\frac{\partial^3 x}{\partial \beta^3}} \right)^{1/3} \left(\alpha - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)^{1/3}, \quad \lambda = \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} x + y$$

Из решения видно, что $\frac{\partial p}{\partial \theta} \sim \frac{p}{\theta}$, $\frac{\partial p}{\partial \xi} \sim \frac{p}{\xi}$, $\theta \sim \frac{1}{\omega}$, $\xi \sim \frac{1}{\omega^{2/3}}$, поэтому, если в уравнении (42) оставлять слагаемые до порядка ω^3 , то, переходя к переменным θ, ξ , для первой скобки уравнения (42) можно приближенно найти

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (1 - a_1^2 \alpha^2 - a_1^2 \beta^2) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi} \left(\frac{K\lambda}{t^{1/3}} - a_1^2 \alpha \frac{K}{t^{1/3}} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} - a_1^2 \beta \frac{K}{t^{1/3}} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{K^2 \lambda^2}{t^{2/3}} - a_1^2 \frac{K^2}{t^{2/3}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)^2 - a_1^2 \frac{K^2}{t^{2/3}} \right) + \frac{2}{3t} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (56)$$

для второй скобки

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (1 - a_0^2 \alpha^2) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi} \left(\frac{K\lambda}{t^{1/3}} - a_0^2 \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{K^2 \lambda^2}{t^{2/3}} - a_0^2 \frac{K^2}{t^{2/3}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)^2 \right) + \frac{2}{3t} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (57)$$

для последнего слагаемого в (42)

$$\begin{aligned} & - a_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{K^2 \lambda^2}{t^{2/3}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{K\lambda}{t^{1/3}} + \frac{2}{3t} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times \\ & \times \left(\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \frac{K}{t^{1/3}} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi} + \frac{K^2}{t^{2/3}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

Если перемножить (56) и (57), а затем прибавить (58), собирая слагаемые $\sim \omega^4$, можно получить, что коэффициент при $\frac{\partial^4}{\partial \theta^4}$ равен нулю в силу уравнения

$$G = 1 - k^2 (a_0^2 + a_1^2) + \alpha^2 k^2 a_0^2 a_1^2 = 0, \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

или

$$\beta^2 = \frac{1}{A} (1 - a_0^2 \alpha^2) (1 - a_1^2 \alpha^2), \quad A = a_0^2 + a_1^2 - a_0^2 a_1^2 \alpha^2 \quad (59)$$

Единственным выражением $\sim \omega^{11/3}$ является $\frac{\partial^4}{\partial \theta^4 \partial \xi^2}$, коэффициент при которой, не содержащий λ , имеет вид

$$\frac{2K}{l^{1/2}} \left[-\alpha \frac{\partial x}{\partial \rho} \left(A - \frac{a_0^2 a_1^2}{A} \right) - \beta A \right] \quad (60)$$

Используя соотношение (59) и $\frac{\partial x}{\partial \rho} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{A^2}{A^2 - a_0^2 a_1^2}$, можно показать, что (60) обращается в нуль.

Коэффициент при $\frac{\partial^4}{\partial \rho^2 \partial z^2} \sim \omega^{10/3}$

$$\frac{K^2}{l^{2/3}} \frac{A}{x^2 (A^2 - a_0^2 a_1^2)^2} [4a_0^4 a_1^4 x^2 (1 - x^2 A) - (A^2 - a_0^2 a_1^2) (A - a_0^2 a_1^2 x^2)] \quad (61)$$

в силу

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{A^2}{\alpha^2 (A^2 - a_0^2 a_1^2)^2} [4a_0^4 a_1^4 x^2 (1 - x^2 A) - (A^2 - a_0^2 a_1^2) (A - a_0^2 a_1^2 x^2)] \quad (62)$$

тоже обращается в нуль.

Равенство нулю коэффициентов при этих производных показывает, что, в отличие от задачи о прохождении волны вблизи каустики

[4], в порядке $\omega^{10/3}$ уравнение (42) вырождается, в то время как в соответствующем порядке, для указанной выше задачи получилось уравнение Трикоми. Поэтому следует собрать коэффициенты в порядке ω^8 .

Уравнение (42) в этом порядке запишется в виде

$$\frac{2}{3l} \frac{A - a_0^2 a_1^2 x^2}{A} \frac{\partial^3 p}{\partial \rho^3} + \frac{2Kl}{l^{3/3}} \frac{A - a_0^2 a_1^2 x^2}{A} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2 \partial z^2} + \frac{2B a_0^2 a_1^2 K^2}{l} \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial^4 p}{\partial z^2 \partial \rho} = 0 \quad (63)$$

где

$$B = \frac{A^3 - 3A^2 a_0^2 a_1^2 x^2 + A a_0^2 a_1^2 + a_0^4 a_1^4 x^2}{\alpha (A^2 - a_0^2 a_1^2)^2}$$

Если все коэффициенты уравнения (63) разделить на

$\frac{2}{3l} \frac{A^3 - a_0^4 a_1^4 x^2}{A}$ и упростить коэффициент при $\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \rho}$, используя соот-

ношение $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0$, то получится

$$\frac{\partial^3 p}{\partial \rho^3} + \xi \frac{\partial^4 p}{\partial \rho^2 \partial z^2} + \frac{\sigma^4 p}{\partial z^2 \partial \rho} = 0 \quad (64)$$

что можно записать еще в виде

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial}{\partial z^2} \left(\xi \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \right] = 0$$

т. е. уравнение (64) приводится к уравнению Трикоми.

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук Багдоеву А. Г. за постановку задачи и большую помощь в ее решении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 25 VI 1969

Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

ԳԱՋԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԴԱՆԴԱՂ ՄԱԳՆԻՍԱԶԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԻՔԻ
ԵԶԱԿԻ ԿԵՏԻ ՄՈՏ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Հոգւածում որոշւում է զազի պարամետրերը մաղնիսաձայնային ալիքի
և զակի կետի մոտ: Սաղնիսական հիդրոդինամիկայի զծային հավասարումների
սիսանմի լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով և արտա-
հայտվում է Էյրիի Փանկցիայի միջոցով: Հետո դիտարկվում է լուծման ա-
սիմպտոտիկ վարքը: Յուլյ է տրված, որ հարթ խնդրում BC լինկնող ալիքի
վրա ստացվում է լողարիթմական և զակիտիլուն, իսկ տարածական զեպրում*
թուիչքաձև լուծում: Եզակի կետի մոտ լուծումն արտահայտվում է հիպեր-
երկրաչափական շարքով (Լանդաու-Լիֆշիցի տեսքով): Եթե հավասարում-
ների սիստեմը զրեք մի հավասարման տեսքով և x, y, t փոփոխական-
ներից անցնենք յուծումն արտահայտող ξ, ζ փոփոխականներին, ապա
ստացվում է Տրիկոմիի հավասարումը: ■

DETERMINATION OF GAS PARAMETERS NEAR A SINGULAR
POINT OF A SLOW MAGNETOACOUSTIC WAVE

A. A. GOURGENIAN

S u m m a r y

The problem of determination of gas parameters near a singular point of a slow magnetoacoustic wave ABC is considered. The solution for a system of linear differential equations of magnetohydrodynamics is found in the Fourier integral form and is expressed by the Airy function. It is shown that in a plane case a logarithmic singularity is obtained on the head wave BC , while in a spherical case a jump-like solution is found. Near the singular point the solution is expressed by the hypergeometric functions form given by Landau-Lifshitz. It is also shown that the fourth order system of linear magnetohydrodynamics in the new coordinates ξ, ζ is reduced to the Tricomi equation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lighthill M. J. Studies on magnetohydrodynamic waves. Philosophical Trans. of the Royal Soc., vol. 252, 1960.
2. Газарян Ю. А. Вопросы динамической теории, А., т. V, 1961.
3. Болдоев А. Г. Определение окрестности ударной волны вблизи особой линии. Докл. АН Арм. ССР, т. 50, № 1, 1970.
4. Болдоев А. Г., Оганян Г. О. Определение параметра газа вблизи каустики. Докл. АН Арм. ССР, т. 50, № 1, 1970.
5. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.
6. Лебедев И. И. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, М., 1953.

7. Половин Р. В., Черкасова К. П. *Магнитная гидродинамика*, № 1, 1966.
8. Friedlander F. G. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Soc.*, vol. 55, part 4, 1959.
9. Боровикова В. А. Фундаментальное решение линейного уравнения и частных производных с постоянными коэффициентами. *Докл. АН СССР*, т. 119, № 3, 1958.