

А. Е. ЛАНИЕЛЯН

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО
ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ

Задача о неустояившемся движении реального газа в длинном газопроводе имеет большое практическое значение. В работах [1], [2], [3] и др. рассматривалась эта задача с различными ограничениями и давались приближенные решения отдельных вопросов.

В настоящей работе при помощи числовых методов исследуется движение реального газа в длинном газопроводе и точной постановке этой задачи. Определяются законы распределений давления и скорости, а также изменение расхода газа в газопроводе в зависимости от заданного закона расхода газа в конце газопровода.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения. Начальные и граничные условия

Рассмотрим нестационарное, одномерное, изотермическое движение реального газа в длинном газопроводе с учетом силы тяжести.

В данном случае движение газа будет описываться следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\lambda u^2}{8\delta} + \gamma \sin \alpha \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \\ p &= \rho g R T \end{aligned} \quad (1.1)$$

где p , u и ρ — соответственно средние по сечению давление, скорость и плотность газа,

λ — безразмерный коэффициент сопротивления,

δ — гидравлический радиус сечения трубы,

γ — удельный вес газа,

α — угол наклона газопровода,

R — газовая постоянная,

T — абсолютная температура,

g — ускорение силы тяжести.

Требуется определить давление и скорость газа в любом сечении газопровода и произвести количественное и качественное исследование вышеупомянутых величин в зависимости от угла наклона газопровода.

Исключив из системы (1.1) $u(x, t)$, $p(x, t)$ и обозначив $p^2(x, t)$ через $P(x, t)$, получаем следующее уравнение относительно $P(x, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\gamma P}{2b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + a \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.2)$$

где $b = \left(\frac{\gamma p u}{8g} \right)_{\text{нр}} = \text{const}$, $a = \frac{\gamma \sin \alpha}{2b}$

Исходя из постановки задачи, зададим следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad P &= P_n = \text{const} \\ \text{при } x = L \quad \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{\gamma RT}{4gs^2} G^2(t) \\ \text{при } t = 0 \quad P &= P_0(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь s — площадь поперечного сечения трубопровода, $G(t)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода в конце трубопровода, $P_0(x)$ — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме, которая берется в виде [2]

$$P_0(x) = P_n - (P_n - P_k) \frac{x}{L} \quad (1.4)$$

где P_n и P_k — значения квадратов давления в начале и конце трубопровода, L — длина трубопровода.

§ 2. Вычисление скорости и расхода газа

После определения давления из уравнения (1.2) можно вычислить скорость и расход газа в любом сечении газопровода в любой момент времени по формулам

$$u^2 = \frac{A}{P} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{B}{P} \quad (2.1)$$

$$G(x, t) = Cp(x, t)u(x, t) \quad (2.2)$$

где $A = -\frac{8gRT^2}{\gamma}$, $B = A\gamma \sin \alpha$

$$C = \frac{s}{RT}$$

При вычислении длины газопровода для положительных значений угла наклона α необходимо учитывать условие

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| > \gamma \sin \alpha \quad (2.3)$$

которое получается из уравнения (2.1).

§ 3. Решение задачи (1.2) — (1.3)

Уравнение (1.2) решаем методом конечных разностей. Возьмем сетку узлов:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2} \right) h; \quad t_j = jk \quad (3.1)$$

$$\left(i = -1, 0, 1, 2, \dots, N; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad h = \frac{1}{N} \right)$$

и для внутреннего узла (i, j) запишем разностное уравнение

$$\frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{k} - \frac{\sqrt{P_{i,j-1}}}{2b} \frac{P_{i-1,j} - 2P_{i,j} + P_{i+1,j}}{h^2} + a \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h} \quad (3.2)$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1; \quad j = 1, 2, 3, \dots)$$

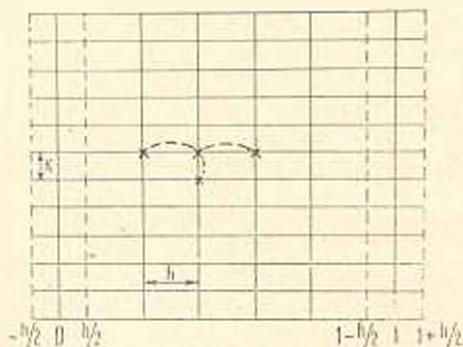
аппроксимирующее уравнение (1.2) в узле (i, j) с точностью до $O(k+h^2)$.

Здесь h —шаг по переменной x , а k —шаг по переменной t .

Для хорошей аппроксимации граничных условий область изменения по переменной x расширена по полшага влево и вправо.

Схема разбиения показана на фиг. 1.

Выбор шага по времени k производится в зависимости от шага по переменной x , сохраняя условие устойчивости конечно-разностной схемы.



Фиг. 1

Как показано на фиг. 1, для решения данной задачи применена устойчивая, неявная разностная схема [4].

Отметим, что уравнение (1.2) написано в виде (3.2) потому, что

выведенное из (1.2) уравнение (3.2) в конечных разностях наиболее удобно для программирования на ЭВМ [5].

Аппроксимации начальных и граничных условий будут:

$$P_{i,0} = P_0(x_i), \quad (i = -1, 0, 1, 2, \dots, N)$$

$$\frac{P_{-1,j} - P_{0,j}}{2} = P_{II} \quad \text{или} \quad P_{-1,j} = P_{0,j} + 2P_{II} \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.3)$$

$$\frac{P_{N,j} - P_{N-1,j}}{h} = f(t_j), \quad \text{где} \quad f(t_j) = -\frac{RT_0}{4gs^2} G^2(t_j) \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

Итак, задача сводится к решению уравнения (3.2) с начальными и граничными условиями (3.3).

Решение производится методом прогонки (6).

Видоизменив уравнение (3.2), получим

$$P_{i+1,j} - \left(2 + \frac{2bh^2}{kV\bar{P}_{i,j-1}} - \frac{2abh}{V\bar{P}_{i,j-1}}\right) P_{i,j} + \left(1 - \frac{2abh}{V\bar{P}_{i,j-1}}\right) P_{i-1,j} + \frac{2bh^2}{k} V\bar{P}_{i,j-1} = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) и граничные условия (3.3) при $j=m$ принимают вид:

$$P_{i-1,m} - A_{i,m} P_{i,m} + B_{i,m} P_{i-1,m} + C_{i,m} = 0 \quad (3.5)$$

$$P_{-1,m} = D_{0,m} P_{0,m} + E_{0,m} \quad (3.6)$$

$$P_{N-1,m} = F_m P_{N,m} + R_m \quad (3.7)$$

$$\text{где} \quad A_{i,m} = 2 + \frac{12bh^2}{kV\bar{P}_{i,j-1}} - \frac{2abh}{V\bar{P}_{i,j-1}}$$

$$B_{i,m} = 1 - \frac{2abh}{V\bar{P}_{i,j-1}}; \quad C_{i,m} = \frac{2bh^2}{k} V\bar{P}_{i,j-1}$$

$$D_{0,m} = -1; \quad E_{0,m} = 2P_{II}$$

$$F_m = 1; \quad R_m = -hf_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Будем перегонять левое граничное условие (3.6) в правый граничный узел, т. е. будем находить такие $D_{i,m}$ и $E_{i,m}$, чтобы при всех $i = 0, 1, 2, \dots, N$

$$P_{i-1,m} = D_{i,m} P_{i,m} + E_{i,m} \quad (3.8)$$

Подставляя $P_{i-1,m}$ из (3.8) в (3.5), будем иметь

$$P_{i+1,m} - A_{i,m} P_{i,m} + B_{i,m} D_{i,m} P_{i,m} + C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m} = 0$$

или, разрешая относительно $P_{i,m}$

$$P_{i,m} = D_{i+1,m} P_{i-1,m} + E_{i+1,m}$$

где
$$D_{i+1,m} = \frac{1}{A_{i,m} - B_{i,m} D_{i,m}} \quad (3.9)$$

$$E_{i+1,m} = \frac{C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m}}{A_{i,m} - B_{i,m} D_{i,m}} = (C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m}) D_{i+1,m} \quad (3.10)$$

Зная $A_{i,m}$, $B_{i,m}$, $C_{i,m}$, $D_{i,m}$, $E_{i,m}$, находим с помощью рекуррентных соотношений (3.9) и (3.10) $D_{i,m}$, $E_{i,m}$ и, далее, с помощью (3.8) обратной прогонкой находим последовательно $P_{i-1,m}$ ($i = N-1, N-2, \dots, 0$).

Для решения задачи (3.2) — (3.3) на основе формул (3.5) — (3.10) была составлена программа на ЭВМ „Раздан-2“, реализующая метод прогонки. В этой программе выбор шагов h и k по переменным x и t осуществляется автоматически. После выбора шагов применяется алгоритм прогонки по слоям t . Ввиду того, что шаг k намного меньше, чем h , вывод результатов производится пропуском нескольких слоев по t , определяемых заранее заданным числом. Последнее обстоятельство позволяет, во-первых, иметь, как можно меньше выходной информации и, во-вторых, разумным способом осуществить выбор шагов h и k .

В составленной программе содержится 223 команды. Из них:

- а) 40 команд для перевода полученных результатов,
- б) 19 команд для подпрограммы квадратичного корня,
- в) 63 команды для метода прогонки (с автоматическим выбором шагов h и k),
- г) 17 команд для вычисления функции $G(t)$,
- д) 58 команд для вычисления скорости и расхода газа (вместе с их выводом),
- е) 26 команд для вычисления констант.

§ 4. Численный пример

Следуя данным работы [2] и учитывая условие (2.3), была решена следующая конкретная задача:

$$L = 17 \text{ км} \quad T = 280 \text{ К}$$

$$P_n = 36 \text{ атм} \quad \bar{d} = 0.625 \text{ м}$$

$$P_x = 14 \text{ атм} \quad \lambda = 0.0119$$

$$R = 50 \text{ м}^3/\text{град} \quad b = 0.08 \text{ кг/сек}$$

$$\gamma = 0.733 \text{ кг/м}^3$$

$$G(t) = G(0) [a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4]$$

где $G(0)$ — среднечасовой расход газа;

t — время

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.03217, \quad a_2 = -0.07794, \quad a_3 = 0.01530,$$

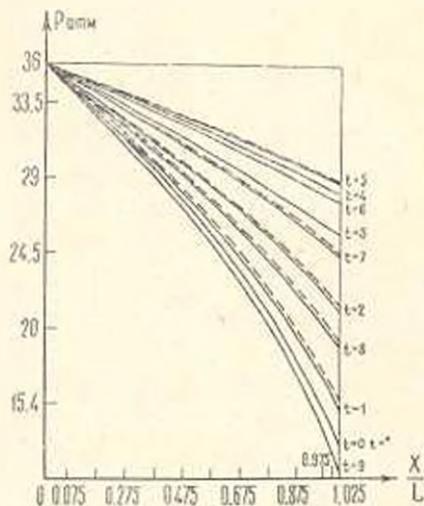
$$a_4 = -0.90078, \quad G(0) = 31.5 \text{ кг/сек}$$

В данном случае длина газопровода разбивается на 20 участков, т. е. $h = 0.05$, а $k = 0.01$. Начало трубы соответствует точке $x = 0.025$, конец — точке $x = 1.025$.

Для проверки точности вычислений задачу решаем, уменьшая шаги h и k вдвое, и сравниваем полученные результаты. Совпадение с достаточной степенью точности говорит о практической сходимости метода.

Машинное время решения задачи при $h = 0.05$, $k = 0.01$ и $0 \leq t \leq 10$ с выводом каждого десятого слоя, составляет примерно 12 мин. Скорость машины „Раздан-2“ — 5000 — 8000 операций в минуту. Вычисления произведены для случаев $\alpha = 0^\circ$, $\pm 15^\circ$ и $\pm 30^\circ$.

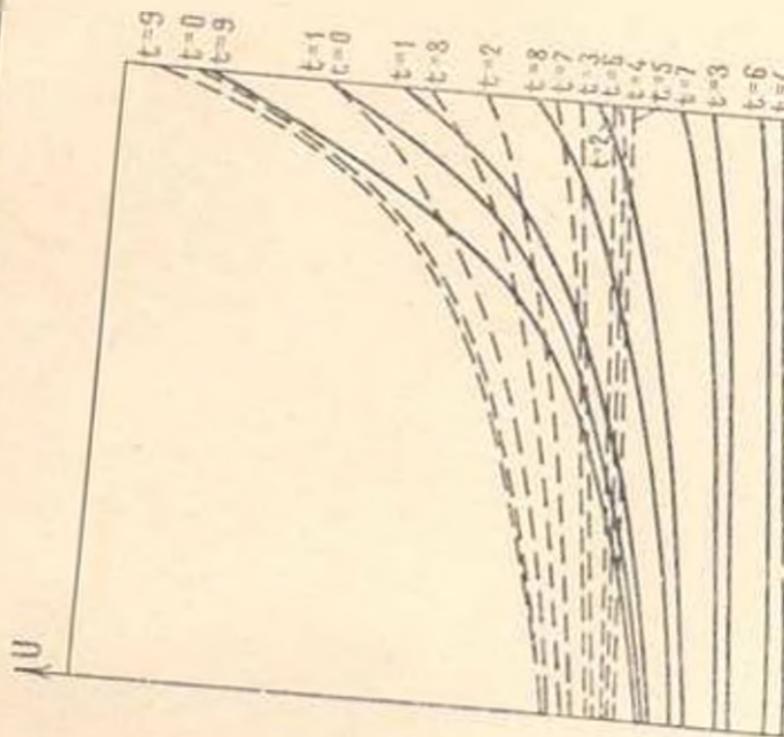
Распределения давления и скорости, а также изменение расхода по длине газопровода в любой момент времени приведены на фиг. 2, 3, 4 для случая $\alpha = \pm 30^\circ$.

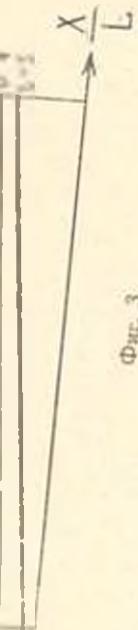


Фиг. 2.

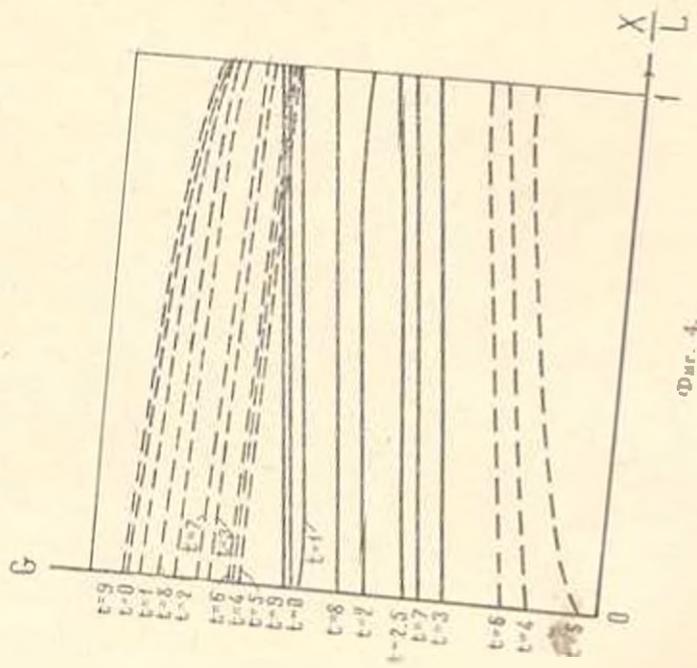
Сплошные линии изображают графики функций $p(x, t)$, $u(x, t)$ и $G(x, t)$ при $\alpha = 30^\circ$, а пунктирные линии — при $\alpha = -30^\circ$.

Сравнивая полученные результаты с результатами работ [2] и [4], легко заметить, что между ними есть количественная разница. Эта разница выражается, в первую очередь, в характерном времени. Максимальное давление, и отличие от работы [2], достигается на час раньше, а графики, показывающие изменения давления, скорости и расхода, и





Фиг. 3.



Фиг. 4.

отличие от работ [2] и [5], параллельно перенесены в сторону увеличения.

Из полученных результатов и из графиков, представленных на фиг. 2, 3, 4, видно, что при увеличении α в положительную сторону газодинамические элементы уменьшаются, а при увеличении α в отрицательную сторону, наоборот, увеличиваются. Для одних и тех же значений α по абсолютной величине графики, соответствующие отрицательному значению угла наклона, по сравнению с графиками, соответствующими положительному значению угла наклона α , как и предполагалось, параллельно перенесены в сторону увеличения газодинамических элементов. При $\alpha = 0^\circ$ из результатов этой работы получаются результаты работы [5].

В заключение, выражаю глубокую благодарность Г. А. Бабаджаняну за обсуждение работы и ценные советы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12 VI 1969

Լ. Ե. ԳԱՆԻԵԼՅԱՆ

ԻՐԱՆԻԱՆ ԳԱԳԻ ՈՉ-ՍՏԱՅԻՐՆԱՐ ՀԱՐՔՈՒՄԸ ԵՐԿԱՐ ԳԱՉԱՄՈՒԼՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է իրական դադի ոչ-ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը երկար զազամուղում: Որոշվում է ճնշման, արագության և հոսքի բաշխման օրենքները՝ կախված դազամուղի թեքման անկյունից:

Քնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ամանդլայնելով դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը՝ խառը կղբային սլաշմաններով: Լուծվում է թվային եղանակով «Հրազդան-2» էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի օգնությամբ:

Որոշվում է դադի ճնշման, արագության և հոսքի բաշխման օրենքները՝ մամանակի տարրեր ակնթարթների համար և կատարվում է վերոհիշյալ զազողինամիկական էլեմենտների փոփոխությունների հետադասություն, կախված դազամուղի թեքման անկյունից:

Լուծված է կոնկրետ թվային օրինակ: Կառուցված են ճնշման, արագության և հոսքի զրաֆիկները մամանակի տառն ակնթարթների համար:

THE UNSTEADY REAL GAS FLOW IN A LONG PIPELINE

L. E. DANIELIAN

S u m m a r y

The unsteady, isothermal, one-dimensional real gas glow in a long, graded pipeline is considered.

The problem is reduced to the solution of the second-order nonlinear differential equation with the third kind boundary conditions. When solving this problem numerically the „Kazdan-2“ computer was used.

The distribution of pressure, velocity and gas flow rate is presented numerically for ten time instants, depending on the pipeline slope-angle.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Неустойчившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. Бабаджанян Г. А. Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений „Нефть и Газ“, № 1, 1961.
3. Цатурян С. И. К задаче о неустойчившемся движении газа в длинных газопроводах при переменном расходе его на конце трубы. Вестник МГУ, математика, механика, № 1, 1969.
4. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.
5. Данцелян Л. Е. Численное решение задачи неустойчившегося движения реального газа в длинном газопроводе. Ученые записки ЕГУ, № 3, 1969.
6. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, т. II, М., 1960.
7. Смирнов А. С., Генкина Л. А., Хушпуляя М. М., Чернов Д. А. Транспорт и хранение газа. М., 1962.
8. Douglas J. On the numerical integration of quasi-linear parabolic differential equations. *Pacif. J. Math.*, 6, № 1, 1956.