ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

А. А. БАБЛОЯН, С. М. МХИТАРЯН

# К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ „ТРОЙНЫХ" УРАВНЕНИЙ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Многие краевые задачи математической физики, например, смешанные (контактные) задачи теории упругости, сводятся к решению парных или тройных интегральных уравнений и рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции.

Исследованию и эффективному решению парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений с различными функциями, в том числе уравнений с тригонометрическими функциями, посвящены многие работы.

Исследованию же „тройных" уравнений посвящено лишь несколько работ.

Насколько нам известно, до сих пор были рассмотрены только тройные ряды-уравнения, содержащие полиномы Лежандра [1], Якоби [2] и тройные интегральные уравнения, содержащие бесселевы функции $J_{\nu}(z)$ [3—6]. В указанных работах тройные уравнения сведены к решению регулярных уравнений Фредгольма. В частности, когда индекс бесселевой функции $\nu = \pm 1/2$, решения соответствующих уравнений с тригонометрическими функциями получены в замкнутом виде.

Настоящая заметка посвящена эффективному решению некоторых тройных интегральных уравнений и рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции. Приводимый ниже способ решения этих тройных уравнений заключается в сведении их к интегральным уравнениям первого рода с логарифмическими ядрами. Последние уравнения решаются известным методом М. Г. Крейна [7—9].

Будут рассматриваться тройные ряды-уравнения

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\delta} a_k \Phi_k(t) = 0 \quad (0 < t < \alpha) \\
&\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k(t) = f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \qquad (1) \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\delta} a_k \Phi_k(t) = 0 \quad (\beta < t < \pi)
\end{aligned}
$$

и тройные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \lambda^p A(\lambda)\,\Phi(\lambda t)\,d\lambda = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$

$$\int_0^\infty A(\lambda)\,\Psi(\lambda t)\,d\lambda = f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \lambda^p A(\lambda)\,\Phi(\lambda t)\,d\lambda = 0 \quad (\beta < t < \infty)$$

где $p = \pm 1$, $a_k$ и $A(\lambda)$ — неизвестные коэффициенты и функции, подлежащие определению, а числа $\lambda_k$ и функции $\Phi_k(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ имеют один из следующих видов:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lambda_k = k, \quad \Phi_k(t) = \sin kt\\
&2)\ \lambda_k = k - 1/2, \quad \Phi_k(t) = \sin(k - 1/2)\,t\\
&3)\ \lambda_k = k - 1/2, \quad \Phi_k(t) = \cos(k - 1/2)\,t\\
&4)\ \Phi(t) = \Psi(t) = \sin t\\
&5)\ \Phi(t) = 1 - \Psi(t) = \cos t
\end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что правые части уравнений (1) и (2) все могут быть ненулевыми функциями. Уравнения с такими правыми частями, однако, всегда можно привести к уравнениям вида (1) и (2).

Кроме того, будут рассматриваться тройные уравнения вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^\infty k^p a_k \cos kt = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$

$$c a_0 + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos kt = f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{4}$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^\infty k^p a_k \cos kt = 0 \quad (\beta < t < \pi)$$

Мы здесь подробно рассмотрим только случай $p = +1$.

Обратимся сперва к тройным уравнениям (1) для первого случая из (3).

Положив

$$\sum_{k=1}^\infty k a_k \sin kt = h(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{5}$$

и принимая во внимание первое и третье соотношения (1) в указанном случае, по формуле Фурье находим

$$a_k = \frac{2}{\pi k}\int_{\alpha}^{\beta} h(\tau)\sin k\tau\, d\tau \tag{6}$$

Подставляя выражения $a_k$ из (6) во второе уравнение (1), после перестановки порядка суммирования и интегрирования для определения неизвестной функции $h(t)$ получим следующее интегральное уравнение первого рода:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln\left|\frac{\sin\frac{t+\tau}{2}}{\sin\frac{t-\tau}{2}}\right| h(\tau)\, d\tau = \pi f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{7}$$

При этом была использована сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k} = \ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|} \quad (|t| < 2\pi)$$

Переходя к новым переменным

$$x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}, \qquad s = \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}$$

уравнение (7) приведем к виду

$$\int_{a}^{b} \ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \varphi(s)\, ds = F(x) \quad (a < x < b) \tag{8}$$

где введены следующие обозначения:

1)

$$\varphi(x) = \frac{h(2\operatorname{arc\,tg} x)}{1+x^2}, \qquad F(x) = \frac{\pi}{2} f(2\operatorname{arctg} x)$$

$$a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad b = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

Аналогичным образом, уравнения (1), для случаев 2)—4) из (3), приводятся к решению уравнения (8), где соответствующие обозначения имеют вид

2)

$$\varphi(x) = \frac{h(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1/2)\, a_k \sin(k-1/2)\, t$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} f(2\arcsin x), \quad a = \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad b = \sin\frac{\beta}{2}, \qquad (\alpha < t < \beta)$$

3)

$$\varphi(x) = \frac{h(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1/2)\, a_k \cos (k-1/2)\, t$$

$$F(x) = -\frac{\pi}{2} f(2\arccos x), \qquad a = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad b = \cos\frac{\beta}{2}, \qquad \alpha < t < \beta$$

4)

$$\varphi(x) = h(x), \qquad h(t) = \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \sin \lambda t\, d\lambda$$

$$F(x) = \pi f(x), \quad a = \alpha, \quad b = \beta, \quad \alpha < t < \beta$$

Тройные ряды-уравнения (4) и интегральные уравнения (2) для последнего случая из (3) при $p = -1$ сводятся к решению следующего интегрального уравнения первого рода:

$$\int_a^b \ln \frac{1}{|x-s|}\, \varphi(s)\, ds = F(x) \quad (a < x < b) \tag{9}$$

где для уравнений (4) вводятся обозначения

$$\varphi(x) = \frac{h(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \cos kt, \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$F(x) = -\pi f(\arccos x) - (c - \ln 2)\int_a^b \varphi(s)\, ds, \quad a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta$$

а для уравнений (2) — обозначения

$$\varphi(x) = x^{-1/2} h(\sqrt{x}), \qquad h(t) = \int_0^{\infty} \lambda A(\lambda) \cos \lambda t\, d\lambda, \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$F(x) = -2\pi f(\sqrt{x}) - \int_a^b \varphi(s) \ln s\, ds, \quad a = \alpha^2, \quad b = \beta^2$$

Таким образом, все указанные тройные уравнения (1), (2) и (4) сводятся к решению либо уравнения (8), либо уравнения (9).

Следует отметить, что в принципе уравнение (8) можно свести к уравнению (9).

Решения уравнений (8) и (9) построим по методу М. Г. Крейна.

С этой целью сперва приведем решения интегральных уравнений (8) и (9) при правых частях, тождественно равных единице. Они даются соответственно соотношениями*

$$
\begin{gathered}
\frac{a}{\pi K(k)}\int_a^b \ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right|\frac{ds}{\sqrt{(b^2-s^2)(s^2-a^2)}}=1 \\
\frac{2}{\pi \ln\dfrac{4}{b-a}}\int_a^b \ln\frac{1}{|x-s|}\,\frac{ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}}=1
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $k=a/b$, а $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Коль скоро известны решения интегральных уравнений (8) и (9) при правых частях, тождественно равных единице, решения этих же уравнений при произвольных непрерывных правых частях могут быть получены по формулам М. Г. Крейна [7—9]. Решения этих уравнений даются соответственно формулами

$$
\varphi(x)=\frac{C}{\sqrt{(b^2-x^2)(x^2-a^2)}}-\frac{1}{\pi^2}\int_x^b \frac{u\,du}{K\left(\dfrac{a}{u}\right)\sqrt{(u^2-x^2)(x^2-a^2)}}\times
$$

$$
\times\frac{d}{du}\left\{\frac{2(u^2-a^2)K^2\left(\dfrac{a}{u}\right)}{u}\,\frac{d}{du}\left[\frac{u}{K\left(\dfrac{a}{u}\right)}\int_a^u \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)(s^2-a^2)}}\right]\right\}
$$

$$
\varphi(x)=\frac{C_1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}-\frac{2}{\pi^2}\int_x^b \frac{du}{\ln\dfrac{4}{u-a}\sqrt{(u-x)(x-a)}}\times
$$

$$
\times\frac{d}{du}\left\{(u-a)\left(\ln\frac{4}{u-a}\right)^2\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\ln\dfrac{4}{u-a}}\int_a^u \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(u-s)(s-a)}}\right]\right\}
$$

где постоянные $C$ и $C_1$ имеют следующие значения:

$$
C=\frac{2(b^2-a^2)K\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\pi^2 b}\,\frac{d}{db}\left[\frac{b}{K\left(\dfrac{a}{b}\right)}\int_a^b \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(b^2-s^2)(s^2-a^2)}}\right]
$$

---

* Эти соотношения получены в монографии И. Я. Штаермана [10]. Совершенно элементарным способом они установлены в неопубликованных материалах М. Г. Крейна по контактным задачам теории упругости. М. Г. Крейн любезно предоставил второму из авторов возможность ознакомиться с этими материалами.

$$C_1 = \frac{2(b-a)\ln\frac{4}{b-a}}{\pi^2}\,\frac{d}{db}\left[\frac{1}{\ln\frac{4}{b-a}}\int\limits_a^b \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}}\right]$$

После определения функции $\varphi(x)$, соответствующей определенному типу „тройных“ уравнений (1), (2) или (4), по введенным обозначениям будет определена функция $h(t)$, а затем по формулам Фурье – также и неизвестные коэффициенты $a_k$, или функция $A(t)$.

Если же $p = -1$, то во всех уравнениях (1)—(4) дифференцированием первых и третьих и интегрированием вторых соотношений эти уравнения приведем к уже рассмотренным случаям при $p = +1$. Постоянные, появившиеся при интегрировании уравнений, должны быть определены из условия ограниченности решений соответствующих интегральных уравнений первого рода.

В заключение отметим, что аналогичным способом, опираясь на результаты работ [10, 12], можно получить замкнутые решения для соответствующих систем из двух „тройных“ тригонометрических уравнений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 II 1969

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

## ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՄԻ ՔԱՆԻ «ԵՌԱԿԻ» ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են եռակի շարքեր և եռակի ինտեգրալ հավասարումներ (1—3) նրանց էֆեկտիվ լուծման տեսանկյունից: Այդ հավասարումները բերված են լոգարիթմական կորիզներով առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների, որոնք փակ տեսքով լուծված են Մ. Գ. Կրեյնի [7—9] մեթոդով:

A. A. BABLOYAH, S. M. MKHITARIAN

## ON THE SOLUTION OF CERTAIN „TRIPLE“ EQUATIONS WITH TRIGONOMETRICAL FUNCTIONS

Summary

The solutions of certain „triple“ integral equations and series-equations containing trigonometrical functions are found. These „triple“ equations are reduced to integral equations of the first kind with loga-

rithmic kernels. The latter equations are solved by means of the Krain method.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Collins W. D.* On some triple series equations and their applications. Archive of Rational Mechanics and Analysis, vol. 11, 1962, 122—137.
2. *Srivastava K. N.* On triple series equations involving series of Jacobi polinomials., Proc. Edinb. Math. Soc., vol. 15 (Ser. II), part 3, 1967, 221—231.
3. *Tranter C. J.* Some triple integral equations. Proc. Glasgow Ass., vol. 4, 1960, part 4, 200—203.
4. *Cooke J. C.* Triple integral equations. Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 16, p. 2, 1963, 193—203.
5. *Cooke J. C.* Some further triple integral equations solutions. Proc. Edinb. Math. Soc., (2), 13, 1963, 303—316.
6. *Sneddon J. N.* Mixed boundary value problems in potential theory. North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1966.
7. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, № 6, 1954, 987—990.
8. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955, 413—416.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967.
10. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М., 1949.
11. *Мхитарян С. М.* О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXI, № 5—6, 1968.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, М., 1966.