ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Н. Г. ИСАБЕКЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

К РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В работе [1] выведены основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела при плоском напряженном состоянии.

Данная статья является в некотором смысле дополнением работы [1]. Здесь найдены зависимости между коэффициентами упругости, при которых рассматриваемое тело действительно является упругим, т. е. удельная элементарная работа внутренних сил является полным дифференциалом. Приводится выражение для удельной потенциальной энергии деформации.

В заключение доказывается также справедливость теоремы Кастильяно для рассматриваемого анизотропного разномодульного материала.

1. Для рассматриваемого анизотропного разномодульного материала физические законы, связывающие напряжения с деформациями, при плоском напряженном состоянии имеют вид [1]

$$
\begin{array}{ll}
\text{при } \sigma_\alpha > 0, \ \sigma_\beta < 0 & \text{при } \sigma_\alpha < 0, \ \sigma_\beta > 0 \\
e_\alpha = b_{11}^{+} \sigma_\alpha + b_{12}^{-} \sigma_\beta & e_\alpha = b_{11}^{-} \sigma_\alpha + b_{12}^{+} \sigma_\beta \\
e_\beta = b_{21}^{+} \sigma_\alpha + b_{22}^{-} \sigma_\beta & e_\beta = b_{21}^{-} \sigma_\alpha + b_{22}^{+} \sigma_\beta \\
e_{\alpha\beta} = b_{16}^{+} \sigma_\alpha + b_{26}^{-} \sigma_\beta & e_{\alpha\beta} = b_{16}^{-} \sigma_\alpha + b_{26}^{+} \sigma_\beta
\end{array}
\qquad (1.1)
$$

где α и β — главные с точки зрения напряжений направления.

Считается, что при одновременном растяжении ($\sigma_\alpha > 0$, $\sigma_\beta > 0$) или сжатии ($\sigma_\alpha < 0$, $\sigma_\beta < 0$) соотношения (1.1) совпадают с обобщенным законом Гука для обыкновенного (одномодульного) анизотропного материала.

Коэффициенты деформаций b_{ik} в (1.1) являются функциями напряженного состояния данной точки, т. е. зависят от некоторого угла φ, характеризующего главные направления α и β в данной точке.

Пусть x, y — исходная система координат. Расположение главной системы координат α, β в данной точке относительно исходной определяется углом φ между осями x и α.

Тогда для определения коэффициентов b_{ik} существуют следующие формулы, которые получены из известных формул преобразования упругих постоянных [1, 2]

$$b_{11} = \frac{1}{4}(d_1 + a_{16} - a_{26}) + \frac{1}{2}(a_{16} - a_{26})\sin 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\cos 2\varphi -$$

$$-\frac{1}{4}(a_{26} - a_{16})\sin 4\varphi + \frac{1}{4}(d_2 + a_{16} + a_{26})\cos 4\varphi$$

$$b_{22} = \frac{1}{4}(d_1 - a_{16} - a_{26}) - \frac{1}{2}(a_{16} + a_{26})\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\cos 2\varphi -$$

$$-\frac{1}{4}(a_{26} - a_{16})\sin 4\varphi + \frac{1}{4}(d_2 + a_{16} + a_{26})\cos 4\varphi \qquad (1.2)$$

$$b_{12} = a_{12} + \frac{1}{4}(d_1 + a_{16} - a_{26}) + \frac{1}{4}(a_{26} - a_{16})\sin 4\varphi -$$

$$-\frac{1}{4}(d_2 + a_{16} + a_{26})\cos 4\varphi$$

$$b_{16} = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{16} + a_{26})\cos 2\varphi -$$

$$-\frac{1}{2}(d_2 + a_{16} + a_{26})\sin 4\varphi - \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16})\cos 4\varphi$$

$$b_{26} = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{16} - a_{26})\cos 2\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}(d_2 + a_{16} + a_{26})\sin 4\varphi + \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16})\cos 4\varphi$$

где

$$d_1 = a_{11} + a_{22} + 2a_{11_*}, \qquad d_2 = a_{11} + a_{22} - 2a_{11_*}$$

a_{1k} и a_{1k_*} — экспериментально определяемые коэффициенты в направлениях x, y и под углом 45° к ним.

Приведем необходимые в дальнейшем формулы преобразования компонентов деформации и напряжения в данной точке при переходе от главных направлений α, β к исходной системе координат x, y и обратно

$$e_x = e_\alpha \cos^2\varphi + e_\beta \sin^2\varphi - \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} \sin 2\varphi$$

$$e_y = e_\alpha \sin^2\varphi + e_\beta \cos^2\varphi + \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} \sin 2\varphi \qquad (1.3)$$

$$e_{xy} = (e_\alpha - e_\beta)\sin 2\varphi + e_{\alpha\beta} \cos 2\varphi$$

$$e_\alpha = e_x \cos^2\varphi + e_y \sin^2\varphi + \frac{1}{2} e_{xy} \sin 2\varphi$$

$$e_\beta = e_x \sin^2\varphi + e_y \cos^2\varphi - \frac{1}{2} e_{xy} \sin 2\varphi \qquad (1.4)$$

$$e_{\alpha\beta} = -(e_x - e_y) \sin 2\varphi + e_{xy} \cos 2\varphi$$

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2\varphi + \sigma_2 \cos^2\varphi \qquad (1.5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \qquad (1.6)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

Запишем соотношения (1.1), разрешенные относительно напряжений

$$\sigma_\alpha = c_{11} e_\alpha + c_{12} e_\beta$$

$$\sigma_\beta = c_{21} e_\alpha + c_{22} e_\beta \qquad (1.7)$$

где

$$c_{11} = \frac{b_{22}}{\Omega}, \qquad c_{22} = \frac{b_{11}}{\Omega}, \qquad c_{12} = -\frac{b_{21}}{\Omega}, \qquad c_{21} = -\frac{b_{12}}{\Omega}$$

$$\Omega = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \qquad (1.8)$$

Здесь и далее коэффициенты b_{ik} приведены без верхних индексов (+ или —). Однако, необходимо учитывать, что

$$\text{при} \quad \sigma_\alpha > 0, \quad \sigma_\beta < 0; \qquad b_{11}^+, \quad b_{12}^-, \quad b_{21}^+, \quad b_{22}^-, \quad b_{16}^+, \quad b_{26}^-$$

$$\text{при} \quad \sigma_\alpha < 0, \quad \sigma_\beta > 0; \qquad b_{11}^-, \quad b_{12}^+, \quad b_{21}^-, \quad b_{22}^+, \quad b_{16}^-, \quad b_{26}^+ \qquad (1.9)$$

Из последнего соотношения (1.1) с учетом (1.7) получим

$$e_{\alpha\beta} = c_{16} e_\alpha + c_{26} e_\beta \qquad (1.10)$$

где

$$c_{16} = c_{11} b_{16} + c_{21} b_{26}, \qquad c_{26} = c_{12} b_{16} + c_{22} b_{26} \qquad (1.11)$$

В дальнейшем понадобятся также следующие зависимости между компонентами напряжения и деформации

$$\sigma_x = (c_{11}\cos^2\varphi + c_{12}\sin^2\varphi)\,e_\alpha + (c_{21}\cos^2\varphi + c_{22}\sin^2\varphi)\,e_\beta$$

$$\sigma_y = (c_{11}\sin^2\varphi + c_{12}\cos^2\varphi)\,e_\alpha + (c_{21}\sin^2\varphi + c_{22}\cos^2\varphi)\,e_\beta \qquad (1.12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}\left[(c_{11} - c_{12})\,e_\alpha + (c_{21} - c_{22})\,e_\beta\right]\sin 2\varphi$$

2. Относительно рассматриваемого здесь материала принимаем, что в пределах малых деформаций он является упругим. Это равносильно предположению, что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации и обратно.

Предположим теперь, что внутренние упругие силы имеют потенциал, т. е. существует некоторая функция U, для которой имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial e_x} = \sigma_x, \qquad \frac{\partial U}{\partial e_y} = \sigma_y, \qquad \frac{\partial U}{\partial e_{xy}} = \tau_{xy} \qquad (2.1)$$

В дальнейшем мы выясним физический смысл функции U и вычислим ее. А пока найдем те зависимости между коэффициентами упругости, при которых имеют место равенства (2.1).

Из (2.1) следует

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial e_y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial e_x}, \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial e_x}, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial e_y} \qquad (2.2)$$

При подстановке сюда значений напряжений, скажем, из (1.12), следует учитывать, что коэффициенты упругости c_{ik} в этих формулах зависят от угла φ, а последний в свою очередь является функцией от напряженного и деформированного состояния данной точки.

Приведем некоторые формулы и соотношения, необходимые для раскрытия равенств (2.2).

Вычисляя производные e_α, e_β и $e_{\alpha\beta}$ (1.4) по e_x, e_y и e_{xy}, получим

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial e_x} = \cos^2\varphi + e_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial e_x}, \qquad \frac{\partial e_\beta}{\partial e_x} = \sin^2\varphi - e_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial e_x}$$

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial e_y} = \sin^2\varphi + e_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial e_y}, \qquad \frac{\partial e_\beta}{\partial e_y} = \cos^2\varphi - e_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial e_y} \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial e_{xy}} = -\frac{\partial e_\beta}{\partial e_{xy}} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi + e_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial e_{xy}}$$

$$\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial e_x} = -\sin 2\varphi - 2(e_\alpha - e_\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial e_x}$$

$$\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial e_y} = \sin 2\varphi - 2(e_\alpha - e_\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial e_y} \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial e_{xy}} = \cos 2\varphi - 2(e_\alpha - e_\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial e_{xy}}$$

В эти формулы входят производные угла φ по e_x, e_y и e_{xy}, для определения которых еще раз вычислим производные $e_{\alpha\beta}$ по e_x, e_y и e_{xy}, пользуясь уже формулой (1.10)

$$\frac{\partial e_{13}}{\partial e_x} = c_{16}\cos^2\varphi + c_{26}\sin^2\varphi + \left[(c'_{16}e_1 + c'_{26}e_2) + (c_{16} - c_{26})\, e_{13}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial e_x}$$

$$\frac{\partial e_{13}}{\partial e_y} = c_{16}\sin^2\varphi + c_{26}\cos^2\varphi + \left[(c'_{16}e_1 + c'_{26}e_2) + (c_{16} - c_{26})\, e_{13}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial e_y} \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial e_{13}}{\partial e_{xy}} = \frac{1}{2}(c_{16} - c_{26})\sin 2\varphi + \left[(c'_{16}e_1 + c'_{26}e_2) + (c_{16} - c_{26})\, e_{13}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial e_{xy}}$$

Здесь c'_{ik} представляет собой производную c_{ik} по φ.

Из (2.4) и (2.5) получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e_x} = -\frac{1}{\Delta}\left(\sin 2\varphi - c_{16}\cos^2\varphi - c_{26}\sin^2\varphi\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e_y} = \frac{1}{\Delta}\left(\sin 2\varphi - c_{16}\sin^2\varphi - c_{26}\cos^2\varphi\right) \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e_{xy}} = \frac{1}{\Delta}\left(\cos 2\varphi - \frac{c_{16} - c_{26}}{2}\sin 2\varphi\right)$$

где

$$\Delta = c'_{16}e_1 + c'_{26}e_2 + (c_{16} - c_{26})\, e_{13} + 2(e_1 - e_2) \qquad (2.7)$$

Подставляя теперь значения напряжений из (1.12) в равенства (2.2), с учетом формул (2.3)—(2.7), получаем следующие три уравнения

$$\left[c'_{11} + 2c_{12}c_{16} - c_{16}(c_{12} + c_{21})\right]A_{i1} + \left[c'_{22} - 2c_{22}c_{26} + c_{26}(c_{12} + c_{21})\right]A_{i2} +$$
$$+ \left[(c_{12} + c_{21})' + 2(c_{11}c_{26} - c_{22}c_{16}) + (c_{16} - c_{26})(c_{12} + c_{21})\right]A_{i3} +$$
$$+ (c_{12} - c_{21})A_{i4} + (c_{12} - c_{21})'A_{i5} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (2.8)$$

Здесь A_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \cdots, 5$) — некоторые, отличные от нуля, выражения, содержащие различные комбинации коэффициентов упругости c_{ik}, компонентов деформации e_1, e_2 и тригонометрических функций угла φ. Например, при $i = 1$ имеем

$$A_{11} = \left(\cos^2\varphi + \frac{c_{26}}{2}\sin 2\varphi\right)e_1, \qquad A_{12} = -\left(\sin^2\varphi + \frac{c_{16}}{2}\sin 2\varphi\right)e_1$$

$$A_{13} = -\frac{1}{2}\left[\left(\sin^2\varphi + \frac{c_{16}}{2}\sin 2\varphi\right)e_1 - \left(\cos^2\varphi + \frac{c_{26}}{2}\sin 2\varphi\right)e_2\right]$$

$$A_{14} = \frac{1}{2}\left[(c_{16} - c_{26})\left(\sin^2\varphi + \frac{c_{16}}{2}\sin 2\varphi\right) + (c'_{16} + 2)\sin 2\varphi\right]e_1 -$$
$$- \frac{1}{2}\left[(c_{16} - c_{26})\left(\cos^2\varphi - \frac{c_{26}}{2}\sin 2\varphi\right) - (c'_{26} - 2)\sin 2\varphi\right]e_2 \qquad (2.9)$$

$$A_{15} = -\frac{1}{2}\left[\left(\sin^2\varphi + \frac{c_{16}}{2}\sin 2\varphi\right)e_1 + \left(\cos^2\varphi + \frac{c_{26}}{2}\sin 2\varphi\right)e_2\right]$$

Остальные коэффициенты A_{ij} не приводим, считая, что в этом нет необходимости.

Рассматривая уравнения (2.8), нетрудно заметить, что для их одновременного удовлетворения достаточно, чтобы коэффициенты при A_{ij} одновременно обращались в нуль, т.е.

$$
\begin{aligned}
& c_{11}' + 2c_{11}c_{16} - c_{16}(c_{12} - c_{21}) = 0 \\
& c_{22}' - 2c_{22}c_{26} + c_{26}(c_{12} + c_{21}) = 0 \\
& (c_{12} + c_{21})' + 2(c_{11}c_{26} - c_{22}c_{16}) + (c_{16} - c_{26})(c_{12} + c_{21}) = 0 \\
& c_{12} - c_{21} = 0
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Таким образом, получены искомые зависимости между коэффициентами упругости c_{ik}, необходимые для существования упругого потенциала. Эти зависимости (2.10), с учетом последнего из них, можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
& c_{12} = c_{21} \\
& c_{11}' + 2c_{16}(c_{11} - c_{12}) = 0 \\
& c_{22}' + 2c_{26}(c_{12} - c_{22}) = 0 \\
& c_{12}' + c_{16}(c_{12} - c_{22}) + c_{26}(c_{11} - c_{12}) = 0
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Подставляя значения коэффициентов c_{ik} из (1.8) в (2.11), получим соответствующие зависимости уже между коэффициентами упругости b_{ik}. Первая из зависимостей (2.11), в рассматриваемых вариантах (1.9), приводит к условиям

$$b_{12}^{-} = b_{21}^{+}, \qquad b_{12}^{+} = b_{21}^{-}$$

Учитывая также [1], что $b_{12}^{+} = b_{21}^{+}$ и $b_{12}^{-} = b_{21}^{-}$, независимо от вариантов (1.9), окончательно получим

$$b_{12}^{-} = b_{12}^{+} = b_{21}^{+} = b_{21}^{-} = b_{12} \tag{2.12}$$

Остальные три зависимости (2.11), с учетом (2.12) и следующих связей

$$b_{11} = 2b_{16}, \qquad b_{22} = -2b_{26} \tag{2.13}$$

получаемых из формул преобразования (1.2), приводят в рассматриваемых вариантах (1.9) к условиям

$$b_{12} = b_{26}^{-} - b_{16}^{+}, \qquad b_{12} = b_{26}^{+} - b_{16}^{-} \tag{2.14}$$

С другой стороны, из формул преобразовании (1.2), с учетом (2.12), имеем

$$b_{12} = b_{26}^{+} - b_{16}^{+} = b_{26}^{-} - b_{16}^{-} \tag{2.15}$$

Сравнивая (2.14) и (2.15), можно получить

$$b_{16}^{+} = b_{16}^{-} = b_{16}, \qquad b_{26}^{+} = b_{26}^{-} = b_{26} \tag{2.16}$$

Таким образом, получены искомые зависимости между коэффициентами упругости b_{ik} (2.12) и (2.16), при которых существует упругий потенциал. Эти зависимости можно объединить и представить в таком виде

$$b_{ik}^+ = b_{ik}^- = b_{ik} \qquad (i \neq k) \tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь искомые зависимости между коэффициентами упругости a_{ik}. Не останавливаясь на подробностях, приведем эти окончательные зависимости, которые получаются из (2.17) с учетом формул преобразования (1.2)

$$\begin{gathered} a_{ik}^+ = a_{ik}^- = a_{ik} \qquad (i \neq k) \\ a_{11}^+ - a_{11}^- = a_{22}^+ - a_{22}^- = a_{11*}^+ - a_{11*}^-. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Вычисляя теперь разности $(b_{11}^+ - b_{11}^-)$ и $(b_{22}^+ - b_{22}^-)$ и учитывая зависимости (2.18), замечаем, что

$$b_{11}^+ - b_{11}^- = b_{22}^+ - b_{22}^- = a_{11}^+ - a_{11}^- = a_{22}^+ - a_{22}^- \tag{2.19}$$

Другими словами, для рассматриваемого материала разность $(b_{ik}^+ - b_{ik}^-)$ $(i = k)$ есть инвариант относительно угла φ.

Как видно из (1.1) и (1.2), первоначально предполагалось, что для установления зависимостей между напряжениями и деформациями необходимы 12 экспериментально определяемых коэффициентов a_{ik}. Однако, в дальнейшем, исходя из условия существования упругого потенциала, было получено пять зависимостей (2.18) между этими коэффициентами. Поэтому число независимых упругих постоянных сократится с 12 до 7. Таким образом, достаточно, например, определить из опытов следующие 7 коэффициентов упругости:

$$a_{11}^+, \quad a_{22}^+, \quad a_{11*}^+, \quad a_{11}^-, \quad a_{12}, \quad a_{16}, \quad a_{26}$$

3. Запишем выражение для элементарной работы внутренних упругих сил, отнесенной к единице объема [3], при плоском напряженном состоянии

$$\delta A = \sigma_x \delta e_x + \sigma_y \delta e_y + \tau_{xy} \delta e_{xy} \tag{3.1}$$

Учитывая соотношения (2.1), можно заметить, что выражение (3.1) представляет собой полный дифференциал, т. е.

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial e_x} \delta e_x + \frac{\partial U}{\partial e_y} \delta e_y + \frac{\partial U}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy} = \delta U \tag{3.2}$$

Так как для рассматриваемого упругого тела работа внутренних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации (W), то

$$\delta A = \delta U = \delta W \tag{3.3}$$

Отсюда понятен физический смысл потенциальной функции U: это есть удельная потенциальная энергия деформации W, т. е.

$$U = W \tag{3.4}$$

Пользуясь формулами (1.7), (1.12), (2.3), (2.6), а также учитывая найденные зависимости между коэффициентами упругости (2.11), непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_x}\left[\frac{1}{2}(\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_\beta e_\beta)\right] &= \sigma_x \\ \frac{\partial}{\partial e_y}\left[\frac{1}{2}(\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_\beta e_\beta)\right] &= \sigma_y \\ \frac{\partial}{\partial e_{xy}}\left[\frac{1}{2}(\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_\beta e_\beta)\right] &= \tau_{xy} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Учитывая (2.1), (3.4) и (3.5), для удельной потенциальной энергии деформации получим

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_\beta e_\beta) = \frac{1}{2}(\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \tau_{xy} e_{xy}) \tag{3.6}$$

Подставляя в (3.6) сначала зависимости (1.7), а потом — обратные им зависимости (1.1), получаем выражения упругой потенциальной энергии:

в функции компонентов деформации

$$W = \frac{1}{2}(c_{11} e_\alpha^2 + c_{22} e_\beta^2 + 2c_{12} e_\alpha e_\beta) \tag{3.7}$$

и в функции компонентов напряженного состояния

$$W = \frac{1}{2}(b_{11}\sigma_\alpha^2 + b_{22}\sigma_\beta^2 + 2b_{12}\sigma_\alpha \sigma_\beta) \tag{3.8}$$

4. Выше было принято, что для рассматриваемого тела существует упругий потенциал, и показано, что потенциальная функция U представляет собой удельную потенциальную энергию деформации W. Поэтому на основании формул (2.1) и (3.4) можно заключить, что для рассматриваемого тела имеют место формулы Грина

$$\frac{\partial W}{\partial e_x} = \sigma_x, \qquad \frac{\partial W}{\partial e_y} = \sigma_y, \qquad \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} = \tau_{xy} \tag{4.1}$$

Докажем теперь, что для рассматриваемого анизотропного разномодульного материала имеют место также и формулы Кастильяно

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = e_x, \qquad \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} = e_y, \qquad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} = e_{xy} \tag{4.2}$$

Для вычисления производных W (3.8) по σ_x, σ_y и τ_{xy} приведем некоторые необходимые формулы и соотношения.

Вычисляя производные σ_1 и σ_2 (1.6) по σ_x, σ_y, τ_{xy}, получим

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_x}=\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_y}=\cos^2\varphi,\qquad \frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma_y}=\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_x}=\sin^2\varphi$$
$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\tau_{xy}}=-\frac{\partial\sigma_2}{\partial\tau_{xy}}=\sin 2\varphi \tag{4.3}$$

Производные угла φ по σ_x, σ_y и τ_{xy} можно определить, вычисляя соответствующие производные от τ_{xy} (1.6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y}=-\frac{\sin 2\varphi}{2(\sigma_1-\sigma_2)},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}}=\frac{\cos 2\varphi}{\sigma_1-\sigma_2} \tag{4.4}$$

Приведем также выражения для компонентов деформации e_x, e_y, e_{xy}, которые получаются из (1.1) и (1.3) с учетом полученных выше зависимостей между коэффициентами упругости b_{ik} (2.17)

$$e_x=\left(b_{11}\cos^2\varphi+b_{12}\sin^2\varphi-\frac{b_{16}}{2}\sin 2\varphi\right)\sigma_1+$$
$$+\left(b_{12}\cos^2\varphi+b_{22}\sin^2\varphi-\frac{b_{26}}{2}\sin 2\varphi\right)\sigma_2$$
$$e_y=\left(b_{11}\sin^2\varphi+b_{12}\cos^2\varphi+\frac{b_{16}}{2}\sin 2\varphi\right)\sigma_1+$$
$$+\left(b_{12}\sin^2\varphi+b_{22}\cos^2\varphi+\frac{b_{26}}{2}\sin 2\varphi\right)\sigma_2 \tag{4.5}$$
$$e_{xy}=[(b_{11}-b_{12})\sin 2\varphi+b_{16}\cos 2\varphi]\,\sigma_1+$$
$$+[(b_{12}-b_{22})\sin 2\varphi+b_{26}\cos 2\varphi]\,\sigma_2$$

Вычисляя теперь производные W (3.8) по компонентам напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, с учетом приведенных в этом пункте формул и соотношений, а также формул (2.13) и (2.14), и сравнивая полученные выражения с (4.5), можно убедиться в справедливости формул Кастильяно (4.2).

Институт математики и механики
АН АрмССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 30 IV 1969

Ն. Հ. ԻՍԱԲԵԿՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻ ՀԱՐԹ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Անիզոտրոպ տարամոդուլ մարմնի հարթ լարվածային վիճակի դեպքում առաձգականության գործակիցների միջև ստացված են կապեր, որոնք անհրաժեշտ են առաձգական պոտենցիալի գոյության համար։ Ստացված է դեֆորմացիայի տեսակարար պոտենցիալ էներգիայի արտահայտությունը։ Ապացուցված է նաև, որ դիտարկվող նյութի համար տեղի ունի Կաստիլիանոյի թեորեմը։

N. H. ISABEKIAN, A. A. KHACHATRIAN

ON THE DIFFERENTMODUL THEORY OF ELASTICITY OF AN ANISOTROPICAL BODY IN A PLANE STRESS STATE

S u m m a r y

Dependences between elasticity coefficients of an anisotropical differentmodul body in a plane stress state, necessary for the existence of the elasticity potential are deduced.

An expression for the specific potential energy of deformation is obtained. The correctness of Castiliano's theorem for anisotropical differentmodul material under review has been proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела. Инж. ж., МТТ, 3, 1969.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостздат, М., 1957.
3. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. Госиздат, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 5, 1969 Механика

Б. Л. ПЕЛЕХ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК, ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В работе приводятся результаты исследований концентрации напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин на базе обобщенной теории С. А. Амбарцумяна [1].

1. Исходные соотношения. Решение задачи изгиба трансверсально-изотропных пластин сводится к интегрированию уравнений

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) = 0$$

$$\Delta\varphi - \delta^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \delta^2\varphi = 0 \tag{1.1}$$

Все расчетные величины выражаются через функции w и φ следующим образом (в однородном случае):
углы поворота нормального волокна

$$\gamma_\rho = -\frac{\partial}{\partial\rho}(w + s\Delta w) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

$$\gamma_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}(w + s\Delta w) - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \tag{1.2}$$

перерезывающие усилия

$$N_\rho = -D\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta w - \frac{1}{s\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right), \qquad N_\theta = -D\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta w + \frac{1}{s}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) \tag{1.3}$$

изгибающие и крутящий моменты

$$M_\rho = -D\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \nu_a\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right](w + s\Delta w) - (1 - \nu_a)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right\}$$

$$M_\theta = -D\left\{\left[\nu_a\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right](w + s\Delta w) + (1 - \nu_a)\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right\} \tag{1.4}$$

$$H_{\rho\theta} = -D(1 - \nu_a)\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}(w + s\Delta w) + \frac{1}{2}\left[\Delta\varphi - 2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)\right]\right\}$$

Здесь w, φ — функции прогибов и углов поворота, $\gamma^2 = \frac{5G_z}{2G_a} h^{-2}$, $\varepsilon = \frac{4h^2}{5(1-\nu_a)} \frac{G_a}{G_z}$ (I-ый вариант теории С. А. Амбарцумяна); $\varepsilon = \frac{2h^2}{5(1-\nu_a)} \left(2 \frac{G_a}{G_z} - \nu_z \frac{E_a}{E_z}\right)$ (II-ой вариант теории С. А. Амбарцумяна); E_a, G_a, ν_a и E_z, G_z, ν_z — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно в плоскостях, параллельных и нормальных к срединной.

2. Постановка задачи. Поставим цель на базе уравнений (1.1)—(1.4) исследовать характер концентрации напряжений, создаваемой в бесконечной трансверсально-изотропной плите круговой неоднородностью радиуса a.

Обозначим решение соответствующей задачи для сплошной плиты через w', φ'. Наложим теперь на решение w', φ' такое решение w'', φ'' уравнений (1.1), которое на контуре неоднородности (при $\rho = a$) удовлетворяло бы условиям:

а) для отверстия, в которое впаяно абсолютно-жесткое ядро

$$\frac{\partial w'}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w''}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \gamma'_\rho + \gamma''_\rho = 0, \qquad \gamma'_\vartheta + \gamma''_\vartheta = 0 \tag{2.1}$$

б) для свободного отверстия:

$$N'_\rho + N''_\rho = 0, \qquad M'_\rho + M''_\rho = 0, \qquad H'_{\rho\vartheta} + H''_{\rho\vartheta} = 0 \tag{2.2}$$

Накладываемое решение w'', φ'' должно, кроме того, исчезать на бесконечности [2, 3].

Ниже рассмотрим наиболее важные случаи нагружения плиты, приводящие к однородному напряженному состоянию на бесконечности. Для таких случаев вышеназванные решения запишутся так:

А) цилиндрический изгиб плиты моментами M $(M_x^\infty = M,\ M_y^\infty = H_{xy}^\infty = N_x^\infty = N_y^\infty = 0)$:

$$\begin{gathered} w' = -\frac{M\rho^2}{4D(1-\nu_a^2)}\left[(1-\nu_a) + (1+\nu_a)\cos 2\vartheta\right], \qquad \varphi' = 0 \\ w'' = c_1 \ln\rho + (c_2\rho^{-2} + c_3)\cos 2\vartheta \\ \varphi'' = c_4 K_0(\gamma\rho) + c_5 K_2(\gamma\rho)\sin 2\vartheta \end{gathered} \tag{2.3}$$

Б) кручение плиты равномерно-распределенными моментами H $(H_{xy}^\infty = H,\ M_x^\infty = M_y^\infty = N_x^\infty = N_y^\infty = 0)$:

$$\begin{gathered} w' = -\frac{H\rho^2}{2D(1-\nu_a)}\sin 2\vartheta, \qquad \varphi' = 0 \\ w'' = (c_2\rho^{-2} + c_3)\sin 2\vartheta, \qquad \varphi'' = c_4 K_2(\gamma\rho)\cos 2\vartheta \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $K_j(\delta\rho)$ — модифицированные функции Бесселя II рода j-ого порядка от аргумента $\delta\rho$. Углы поворота γ_ρ и γ_θ, а также усилия-моменты, соответствующие (2.3) и (2.4), находятся по формулам (1.2)—(1.4). Постоянные c_j, фигурирующие в (2.3)—(2.4), должны быть определены из условий на краю отверстий (2.1) либо (2.2).

3. Плита с жестким включением. С учетом (1.3), (1.4) и (2.3) условие (2.1) дает для постоянных следующие значения:

$$c_1 = \frac{Ma^2}{2D(1+\nu_a)}, \qquad c_2 = \frac{Ma^4}{4D(1-\nu_a)}\left(1-\frac{2}{\Omega_m}\right)$$
$$c_3 = \frac{Ma^2}{2D\Omega_m(1-\nu_a)}, \qquad c_4 = 0, \qquad c_5 = -\frac{8h^*}{K_2(t)(1-\nu_a)}c_3 \tag{3.1}$$

где

$$\Omega_m = 1 + \frac{4h^*}{1-\nu_a}\left[1+\frac{2K_1(t)}{tK_2(t)}\right]$$
$$h^* = \frac{2h^2}{5a^2}\left(2\frac{G_a}{G_z} - \nu_z\frac{E_a}{E_z}\right), \qquad t = \delta a \tag{3.2}$$

Для усилий и моментов согласно (1.3)—(1.5), (2.3) и (3.1) имеем (в случае цилиндрического изгиба):

$$M_\rho = \frac{M}{2}\left\{1 + \frac{1-\nu_a}{1+\nu_a}\frac{a^2}{\rho^2} + \left[1+\frac{a^2}{\rho^2\Omega_m(1-\nu_a)}\left(4\nu_a + 24h^*\frac{a^2}{\rho^2} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - 16h^*\frac{Q_1(t\rho/a)}{Q_1(t)}\right) - \frac{3a^4}{\rho^4}\left(1-\frac{2}{\Omega_m}\right)\right]\cos 2\theta\right\}$$
$$M_\theta + M_\rho = M\left[1+\frac{2a^2(1+\nu_a)}{\rho^2(1-\nu_a)\Omega_m}\cos 2\theta\right]$$
$$H_{\rho\theta} = \frac{M}{2}\left\{-1 - \frac{2a^2}{\rho^2(1-\nu_a)\Omega_m}\left[1-\nu_a - 12h^*\frac{a^2}{\rho^2} + 2h^*\frac{Q_2(t\rho/a)}{tK_2'(t)}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{3a^4}{\rho^4}\left(1-\frac{2}{\Omega_m}\right)\right\}\sin 2\theta \tag{3.3}$$
$$N_\rho = -\frac{4Ma^2}{\rho^3(1-\nu_a)\Omega_m}\left[1+\frac{2\rho^2K_2(t\rho/a)}{a^2tK_2'(t)}\right]\cos 2\theta$$
$$N_\theta = -\frac{4Ma^2}{\rho^3(1-\nu_a)\Omega_m}\left[1-\frac{\rho^3K_2'(t\rho/a)}{a^3K_2'(t)}\right]\sin 2\theta$$

Здесь введены следующие обозначения для комбинаций от функций Бесселя $K_2(z)$:

$$Q_1(z) = zK_2'(z) - K_2(z), \qquad Q_2(z) = -z^2K_2(z) + zK_2'(z) - 4K_2(z)$$

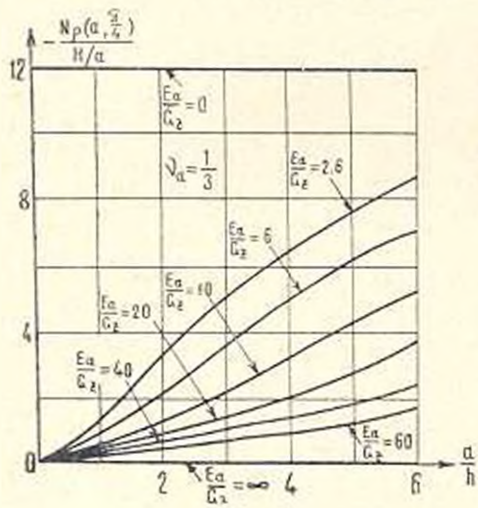
На контуре жесткого включения (при $\rho = a$)

$$M_\rho(a,\theta) = M\left\{\frac{1}{1+\nu_a} + \left[-1 + \frac{1}{\Omega_m}\left(3-\nu_a+12h^*-8h^*\frac{Q_1(t)}{tK_2(t)}\right)\right]\cos 2\theta\right\}$$

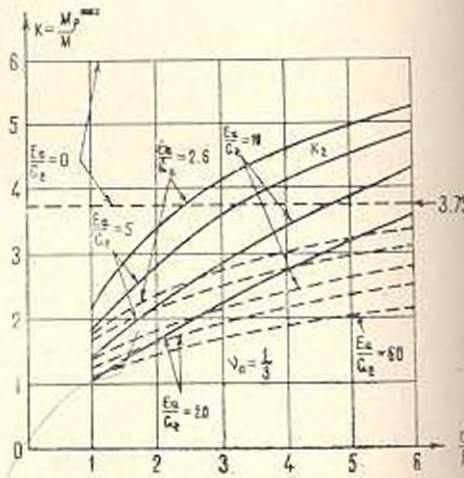
$$M_\theta(a,\theta) + M_\rho(a,\theta) = M\left[1 + \frac{2(1+\nu_a)}{(1-\nu_a)\Omega_m}\cos 2\theta\right] \tag{3.4}$$

$$H_{\rho\theta}(a,\theta) = -2M\left\{-1 + \frac{1}{\Omega_m(1-\nu_a)}\left[1-\nu_a+12h^*-2h^*\frac{Q_1(t)}{tK_2(t)}\right]\right\}\sin 2\theta$$

$$N_\rho(a,\theta) = -\frac{4M}{a\Omega_m(1-\nu_a)}\frac{K_1(t)}{tK_2(t)}\sin 2\theta, \qquad N_\theta(a,\theta) = 0$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Случай кручения плиты равномерно-распределенными моментами H получается суперпозицией из известного решения (3.1) (3.4). На контуре включения имеем

$$M_\rho(a,\theta) = 2H\left[-1 + \frac{1}{\Omega_m(1-\nu_a)}\left(3-\nu_a+12h^*-8h^*\frac{Q_1(t)}{tK_2(t)}\right)\right]\sin 2\theta$$

$$N_\rho(a,\theta) = \frac{8H}{a\Omega_m(1-\nu_a)}\frac{K_1(t)}{tK_2(t)}\sin 2\theta \qquad N_\theta(a,\theta) = 0 \tag{3.5}$$

На фиг. 1 представлен график изменения перерезывающего усилия $N_\rho\left(a,\frac{\pi}{4}\right)$ по (3.5) (в случае кручения плиты) в зависимости от $\frac{a}{h}$ для различных $\frac{E_a}{G_z}$ при $\nu_a = \frac{1}{3}$, $\nu_z = 0$.

На фиг. 2 представлены графики изменения коэффициентов концентрации $k_* = \left(\frac{\sigma_\rho^{\max}}{\sigma_0}\right)_{\theta=\alpha}$ в зависимости от параметров $\frac{a}{h}$ и $\frac{E_a}{G_z}$ при $\nu_a = \frac{1}{3}$, $\nu_z = 0$ для изгиба (k_1) и кручения (k_2) плиты.

4. Пластинка со свободным отверстием. В этом случае для постоянных c_i из (2.2) получаем

$$c_1 = \frac{Ma^2}{2D(1-\nu_a)}, \qquad c_2 = \frac{Ma^4}{12D(1-\nu_a)}\left(1-\frac{2\gamma_0}{\Omega_0}\right)$$
$$c_3 = -\frac{Ma^2}{D\Omega_0}, \qquad c_4 = 0, \qquad c_5 = -\frac{4h^*}{K_2(t)(1-\nu_a)}c_3 \tag{4.1}$$

где

$$\Omega_0 = \frac{2h^*}{K_2(t)}\left(t^2K_1(t) + 3tK_2(t)\right)$$
$$\gamma_0 = 4\nu_a + 8h^*\left(3 + \frac{Q_1(t)}{K_2(t)}\right) \tag{4.2}$$

Усилия и моменты, соответствующие (4.1) и (1.3)—(1.5) определяются по формулам

$$M_\rho = \frac{M}{2}\left\{1 + \frac{a^2}{\rho^2} + \left[-1 + \frac{2a^2}{\rho^2\Omega_0}\left(4\nu_a - 24h^*\frac{a^2}{\rho^2} - 8h^*\frac{Q_1(t\rho/a)}{K_2(t)}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{a^4}{\rho^4}\left(1-\frac{2\gamma_0}{\Omega_0}\right)\right]\cos 2\vartheta\right\}$$
$$M_\rho + M_\vartheta = M\left(1 - \frac{4\nu_a a^2}{\rho^2\Omega_0}\cos 2\vartheta\right)$$
$$H_{\rho\vartheta} = \frac{M}{2}\left\{-1 - \frac{2a^2}{\rho^2\Omega_0}\left(1-\nu_a - 24h^*\frac{a^2}{\rho^2} - 2h^*\frac{Q_1(t\rho/a)}{K_2(t)}\right) - \frac{a^4}{\rho^4}\left(1-\frac{2\gamma_0}{\Omega_0}\right)\right\}\sin 2\vartheta \tag{4.3}$$
$$N_\rho = -\frac{8Ma^2}{\rho^3\Omega_0}\left[1 - \frac{\rho^2K_1(t\rho/a)}{a^2K_2(t)}\right]\cos 2\vartheta$$
$$N_\vartheta = \frac{8Ma^2}{\rho^3\Omega_0}\left[1 - \frac{t\rho^3K_2'(t\rho/a)}{2a^3K_2(t)}\right]\sin 2\vartheta$$

На контуре отверстия при $\rho = a$ из (4.3) получаем

$$M_\rho(a, \vartheta) = H_{\rho\vartheta}(a, \vartheta) = N_\rho(a, \vartheta) = 0$$
$$M_\vartheta(a, \vartheta) = M\left[1 - \frac{4(1-\nu_a)}{\Omega_0}\cos 2\vartheta\right] \tag{4.4}$$
$$N_\vartheta(a, \vartheta) = \frac{8M}{a\Omega_0}\left[1 + \frac{tK_2'(t)}{2K_2(t)}\right]\sin 2\vartheta$$

Использованием известной формулы для производной от функции Бесселя $K_2(z)$

$$K_2'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z}K_2(z)$$

выражение (4.4 в) можно привести к виду

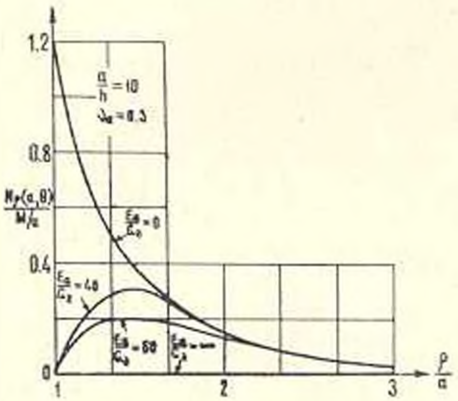
$$N_\theta(a, \theta) = -\frac{8MtK_1(t)}{a\Omega_0 K_2(t)} \sin 2\theta \tag{4.5}$$

Не приводя выкладок, запишем также окончательные выражения для усилий и моментов на контуре отверстий в случае кручения плиты

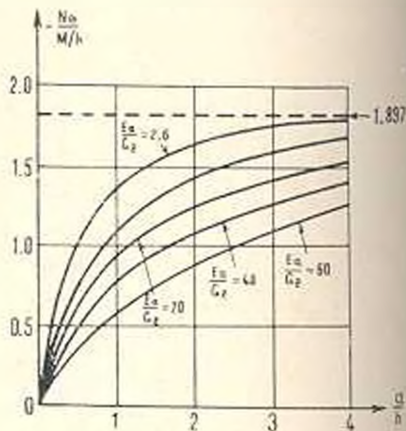
$$M_\rho(a, \theta) = H_{\rho\theta}(a, \theta) = N_\rho(a, \theta) = 0$$

$$M_\theta(a, \theta) = -\frac{8H(1+\nu_a)}{\Omega_0} \sin 2\theta \tag{4.6 абв}$$

$$N_\theta(a, \theta) = \frac{16HtK_1(t)}{a\Omega_0 K_2(t)} \cos 2\theta$$



Фиг. 3.



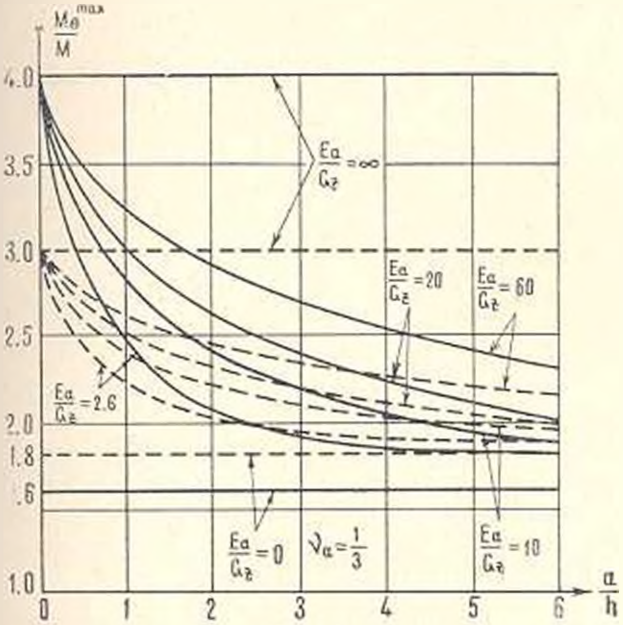
Фиг. 4.

На фиг. 3 и 4 показано изменение перерезывающих усилий $N_\rho\left(a, \frac{\pi}{4}\right)$ в зависимости от $\frac{\rho}{a}$, $\frac{a}{h}$, $\frac{E_a}{G_z}$ и $N_\theta(a, \theta)$ в зависимости от $\frac{E_a}{G_z}$ и $\frac{a}{h}$ при $\nu_a = \frac{1}{3}$, $\nu_z = 0$. На фиг. 5 представлены графики коэффициентов концентрации моментов $K_\theta = \left(\frac{M_\theta}{M}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$ для цилиндрического изгиба (k_1) и кручения (k_2) в зависимости от параметра $\frac{a}{h}$ и различных $\frac{E_a}{G_z}$ при $\nu_a = \frac{1}{3}$, $\nu_z = 0$.

5. **Обсуждение результатов.** Перейдем к обсуждению результатов, полученных в §§ 3 и 4.

1. Все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние плиты, ослабленной отверстием, зависят от параметров h^* и t, т. е. от отношений $\frac{a}{h}$, $\frac{E_a}{G_z}$. Некоторые из таких зависимостей представлены на фиг. 1—5.

2. Предельный переход $h^* \to 0$, $l \to \infty$ можно трактовать либо как переход к бесконечно тонкой пластинке $\left(\frac{a}{h} \to \infty\right)$, либо как переход к пластинке с бесконечно-большой сдвиговой жесткостью $\left(\frac{E_a}{G_z} \to 0\right)$.



Фиг. 5.

Используя ассимптотические представления функций Бесселя II рода для входящих в выражения (3.3)—(3.5) и (4.3)—(4.5) ядер установлено, что

$$\lim_{\substack{h^* \to 0 \\ l \to \infty}} \Omega_m = 1, \qquad \lim_{\substack{h^* \to 0 \\ l \to \infty}} \Omega_0 = 2(1 + \nu_a) \tag{5.1}$$

3. На основании (5.1) можно доказать справедливость следующего утверждения: во всех точках плиты, не принадлежащих краю отверстия, из выражений усилий и моментов (3.3) и (4.3) при асимптотическом устремлении параметра $\frac{a}{h}$ к бесконечности либо $\frac{E_a}{G_z}$ к нулю следуют все соответствующие характеристики классической теории Кирхгоффа [2, 3]

$$\lim_{\substack{a/h \to \infty \\ E_a/G_z \to 0}} \{M_r(\rho, \theta), \cdots, N_\theta(\rho, \theta)\} = \{M_r^{(k)}(\rho, \theta), \cdots, N_\theta^{(k)}(a, \theta)\} \tag{5.2}$$

$$(\rho > a)$$

На фиг. 3 поэтому перерезывающая сила по Кирхгоффу соответствует $\frac{E_a}{G_z} = 0$.

4. Несколько по-иному обстоит дело на граничном контуре. Из (3.4)—(3.5) и (4.4)—(4.5) при $\frac{E_a}{G_z} \to 0$ следует также ряд зависимостей теории Кирхгоффа. Это относится, в частности, к изгибающим моментам $M_r(a, \theta)$ и $M_\theta(a, \theta)$. Например, в случае цилиндрического изгиба пластины:

а) с жестким включением

$$\lim_{E_a/G_z \to 0} M_\theta(a, \theta) = M_\theta^{(0)}(a, \theta) = M\left(\frac{1}{1+\nu_a} + \frac{2}{1-\nu_a}\cos 2\theta\right) \quad (5.3)$$

б) со свободным отверстием

$$\lim_{E_a/G_z \to 0} M_\theta(a, \theta) = M_\theta^{(0)}(a, \theta) = M\left|1 - \frac{2(1+\nu_a)}{3+\nu_a}\cos 2\theta\right| \quad (5.4)$$

На фиг. 1, 2 и 5 соответствующие характеристики теории Кирхгоффа обозначены $\frac{E_a}{G_z} = 0$ и выглядят как асимптоты для полученных кривых. В частности, прямые-асимптоты $k_1 = 3.75$ и $k_2 = 6$ (фиг. 2), а также $k_1 = 1.8$ и $k_2 = 1.6$ (фиг. 5), обозначенные $\frac{E_a}{G_z} = 0$, представляют коэффициенты концентрации при изгибе и кручении пластинки с жестким включением и свободным отверстием, вычисленные на базе теории Кирхгоффа [2, 3].

Как видно из графиков, численные отличия полученных результатов от соответствующих величин в теории Кирхгоффа могут стать значительными для отношений $\frac{E_a}{G_z} \sim 10 - 60$, что характерно для ориентированных стеклопластиков; при этом указанные отличия в случае кручения пластинки больше, чем в случае цилиндрического изгиба.

5. Исключение из утверждения 4) составляют перерезывающие усилия $N_\theta(a, \theta)$, действующие в площадках, перпендикулярных к краю отверстия.

Эти усилия равны нулю в случае жесткого включения (см. формулы (3.4)—(3.5)).

Анализируя формулы (4.5) и (4.6в) легко показать, что порядок перерезывающего усилия на контуре свободной полости равен h^{-1}.

Следовательно, касательные срезывающие напряжения $\tau_{\theta z}$

а) равны нулю в случае жесткого включения,

б) порядка h^{-2} на контуре свободного отверстия.

Соответствующие касательные напряжения, определяемые классической теорией, в обоих случаях — порядка h^{-1}.

Таким образом, в рассматриваемых случаях теория Кирхгоффа не указывает даже порядка срезывающих напряжений $\tau_{\theta z}$.

На фиг. 4 поэтому случай $\frac{E_s}{G_z} = 0$ не соответствует теории Кирхгоффа [2, 3].

Аналогичный эффект получен для свободной полости в работах [4, 5] на основе общего подхода теории упругости, и для свободно-опертого края в [6] – на базе уравнений теории С. А. Амбарцумяна [1].

6. В случае малых отверстий $(a \approx h)$ обобщенные прикладные (двумерные) теории изгиба пластинок, в том числе и применяемая здесь, могут не давать удовлетворительных результатов, касающихся коэффициентов концентрации. Поэтому графики на фиг. 2, изображающие коэффициенты концентрации, в случае жесткого включения не доведены до конца, хотя и при $\frac{a}{h} \to 0$ получены конечные пределы, близкие к единице и зависящие от ν_s.

Случай изгиба плиты с малым отверстием следовало бы исследовать на основе общих уравнений теории упругости.

7. Небезынтересно отметить также, что в случае обратного к 2) граничного перехода $\frac{E_s}{G_z} \to \infty$ из полученных соотношений переходим к результатам, как бы соответствующим плоской задаче теории упругости. На фиг. 1, 3, 4 этот случай характеризуется отсутствием перерезывающих усилий N_r и N_θ. Для свободного отверстия коэффициенты концентрации становятся при этом равными $k_1 = 3$ (цилиндрический изгиб) и $k_2 = 4$ (кручение) (фиг. 5), что соответствует коэффициентам концентрации при растяжении и сдвиге (на бесконечности) плоскости с отверстием (задача Кирша).

8. Во всех приведенных результатах случай $\frac{E_s}{G_z} = 2(1 + \nu_s)$, $\nu_z = \nu_s$ соответствует изотропной пластинке.

Львовский политехнический институт

Поступила 25 II 1969

Ի. Լ. ԳԵԼԵՆ

ԿԼՈՐ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում, հիմնվելով Ս. Ա. Համբարձումյանի տեսության վրա, բերված են տրանսվերսալ-իզոտրոպ սալերի ծռման ժամանակ անցքերի մոտ առաջացող լարումների կոնցենտրացիայի ուսումնասիրության արդյունքները։

Ստացված են՝ անվերջ տրանսվերսալ-իզոտրոպ սալի ծռման (ոլորման) խնդիրների լուծումները, երբ սալն ունի ազատ կլոր անցք, որին ներդրված է բացարձակ կոշտ միջուկ։

Ստացված արդյունքները մանրամասն ուսումնասիրված և համեմատված են Կիրխհոֆի տեսության արդյունքների հետ։ Նկատված է զգալի որակական և քանակական տարբերություններ համեմատվող արդյունքների միջև։

B. L. PELEKH

SOME PROBLEMS OF BENDING OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATES WITH CIRCULAR HOLES

S u m m a r y

In this paper some results of the investigation of stress-concentrations around the holes in transversal-isotropic plates on the basis of the generalized Ambartsumyan's theory are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1967.
2. *Лехницкий С. Г.* О некоторых случаях изгиба изотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием. Вестн. инж. и техн., № 12, 1936.
3. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
4. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Об определении коэффициентов концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, т. XXVIII, в. 3, 1964.
5. *Колос А. В.* Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, т. XXVIII, в. 3, 1964.
6. *Пелех Б. Л.* Об одной задаче несимметричного изгиба круглых трансверсально-изотропных пластин. Изв. АрмССР, т. XXII, № 2, 1969.
7. *Пелех Б. Л.* К исследованию концентрации напряжений около отверстий при изгибе плит. „Концентрация напряжений", в. 1, Киев, 1965.