

А. Н. ОРАЛОВ. И. Е. ПРОКОПОВИЧ

О ВЛИЯНИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ ГИБКИХ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СТОЕК

В расчете на устойчивость при длительном действии внешних сил необходимо определить нагрузку, при которой скорость перемещений во времени монотонно затухает. Решение задачи в такой постановке приемлемо для систем, развитие перемещений которых во времени приводит к изменению напряженного состояния. Это условие для сжатого стержня выполняется лишь при наличии начальных несовершенств (начальная погибь, внецентренное приложение сжимающей силы и т. д.).

Так как время существования и эксплуатации элементов строительных конструкций исчисляется десятками и сотнями лет, следует исходить из достижения состояния, соответствующего потере устойчивости, при $t = \infty$, т. е. принимать, что критическое время $t_k = \infty$.

Предлагаемое в настоящей статье решение задачи об устойчивости однородных и неоднородных стержней при длительном действии нагрузки выполнено в предположении линейной ползучести и отсутствия трещин.

Обычно при изучении влияния ползучести на устойчивость сжатых стержней рассматриваются стержни, шарнирно опертые по концам; мера ползучести материала $C(t, \tau)$ описывается простейшими функциями, позволяющими решить соответствующие интегральные уравнения в аналитическом виде, но не всегда достаточно полно описывающими экспериментальные кривые ползучести [1], [2], [3], [4].

В статье такая задача решена для однородных и неоднородных стержней при описании кривых ползучести функциями достаточно общего вида. Принято, что граничные условия постоянны во всем рассматриваемом промежутке времени $\tau_1 \leq t \leq \infty$ (шарнирное опирание, жесткое защемление, свободный от связей конец стержня).

Для определения деформаций $\varepsilon^*(t)$, вызванных переменными во времени напряжениями $\sigma^*(t)$, принята зависимость

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \zeta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

Здесь

$$\zeta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$$

$E(-)$ — модуль упруго-мгновенных деформаций,

$C(t, -)$ — мера ползучести.

Значок " — показывает, что соответствующие значения определяются с учетом ползучести.

Рассматривается гибкий железобетонный стержень с постоянным поперечным сечением, имеющим две оси симметрии y и z . Армирование симметричное. Длина стержня — l . Стержень сжат постоянными во времени силами P . Считается, что несовершенство в виде погиби или эксцентриситета приводит к изгибу стержня в направлении оси y . Выпучивание стержня в направлении z исключается. Величина P меньше величин критической силы при мгновенном ее приложении P_k .

Предполагалось, что: а) справедлива гипотеза плоских сечений, б) бетон в растянутой зоне работает без трещин, в) деформации бетона и арматуры в местах контакта одинаковы.

Уравнения равновесия в любом поперечном сечении стержня в момент времени t имеют вид

$$N_a^*(t) = P - F_a[\varepsilon_a^*(t) + \varepsilon_a^*(t)] \quad (2)$$

$$M_a^*(t) = Py^*(t) - F_a h_a [\varepsilon_a^*(t) - \varepsilon_a^*(t)] \quad (3a)$$

$$M_a^*(t) = P[y^*(t) + s] - F_a h_a [\varepsilon_a^*(t) - \varepsilon_a^*(t)] \quad (3б)$$

где $N_a^*(t)$ — продольная сила в бетоне в момент времени t ,

$M_a^*(t)$ — изгибающий момент в бетоне в момент времени t ,

F_a — половина площади арматуры,

$\varepsilon_a^*(t)$ и $\varepsilon_a^*(t)$ — напряжения в арматуре в момент времени t ,

h_a — расстояние от центра тяжести сечения до арматуры,

$y^*(t)$ — прогиб стержня в момент времени t ,

s — эксцентриситет.

Здесь и всюду в дальнейшем, формулы, обозначенные номером с индексом „а“, относятся к стержню с начальной погибью, с индексом „б“ — к стержню с внецентренно приложенной нагрузкой. Формулы без индексов справедливы для двух случаев.

В случае стержня с начальной погибью $y^*(t)$ включает в себя начальное искривление y_0 .

Напряжения в бетоне представляются следующей формулой:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{N_a^*(t)}{F_b} \pm \frac{M_a^*(t)}{Y_b} \eta \quad (4)$$

где

F_b — площадь бетонной части сечения,

J_b — момент инерции бетонной части сечения,

η — координата волокна.

Деформации относительно малы по сравнению с длиной стержня, поэтому возможно воспользоваться приближенным уравнением кривизны

$$\frac{1}{\rho^*(t)} = - \frac{\partial^2 [y^*(x, t) - y_0(x)]}{\partial x^2} \quad (5a)$$

$$\frac{1}{\rho^*(t)} = - \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} \quad (5b)$$

С другой стороны, кривизну можно выразить через деформации бетона на выпуклой и вогнутой гранях стержня

$$\frac{1}{\rho^*(t)} = \frac{\varepsilon_1^*(t) - \varepsilon_2^*(t)}{h} \quad (6)$$

Используя (1), (4), (5a), (5b) и (6), после целого ряда преобразований можно записать:

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{P}{E J_0} y^*(x, t) - \int_0^t \left[\mu n_0 m E \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{P}{J_0} y^*(x, \tau) \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = [1 + \mu n_0 m E \delta(t, \tau_1)] \frac{\partial^2 y_0(x)}{\partial x^2} \quad (7a)$$

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{P}{E J_0} y^*(x, t) - \int_0^t \left[\mu n_0 m E \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{P}{J_0} y^*(x, \tau) \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = - \frac{P}{J_0} \delta(t, \tau_1) \quad (7b)$$

В этих уравнениях $\mu = \frac{F_2}{F_0}$ — половина коэффициента армирования; $m = \frac{E_s}{E}$ — отношение модуля упругости арматуры к модулю уп-

руго-мгновенных деформаций бетона $E(t) = E(\tau_1) = E = \text{Const}$; $n_0 = \frac{2h_1^2 F_0}{J_0}$.

Интегро-дифференциальные уравнения (7a) и (7b) включают в себя дифференциальные уравнения второго порядка по x . В таком виде они могут быть использованы при рассмотрении стержней, шарнирно опертых по концам. После двойного дифференцирования по x эти уравнения пригодны и для решения задач, применительно к стержням с другими условиями опирания.

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^4 y^*(x, t)}{\partial x^4} + \frac{P}{E J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \left[\mu n_0 m E \frac{\partial^4 y^*(x, \tau)}{\partial x^4} + \right. \\ \left. + \frac{P}{J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = [1 + \mu n_0 m E \delta(t, \tau_1)] \frac{\partial^4 y_0(x)}{\partial x^4} \quad (8a)$$

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^4 y^*(x, t)}{\partial x^4} + \frac{P}{E J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \left[\mu n_0 m E \frac{\partial^4 y^*(x, \tau)}{\partial x^4} + \right.$$

$$+ \frac{P}{J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} \bigg|_{\tau=0} \frac{\partial \tau(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 0 \quad (86)$$

Таким образом, величины прогибов стержней в любой момент времени t $y^*(x, t)$ определяются из интегро-дифференциальных уравнений (8а) и (86).

При $t = \tau_1$ в момент приложения нагрузки, интегро-дифференциальные уравнения (8а) и (86) превращаются в дифференциальные уравнения упруго-мгновенной задачи.

При представлении меры ползучести $C(t, \tau)$ в виде ряда типа, предложенного Н. Х. Арутюняном [5],

$$C(t, \tau) = \sum_{i=0}^{t-k} H_i(\tau) [1 - e^{-\tau_i(t-\tau)}] \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_i(\tau)}{\partial \tau} < 0, \quad H_i(\tau) \bigg|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow C_i$$

и приятии $k = 2$, интегро-дифференциальные уравнения (8а), (86) сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных. Продифференцировав уравнения (8а) и (86) по t три раза (т. е. найдя первую, и вторую и третью производные) и сложив первую производную, предварительно умноженную на $\gamma_1 \gamma_2$, со второй, умноженной на $(\gamma_1 + \gamma_2)$, и третьей, можно получить следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$A_1(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^1} + A_2(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^1} + A_3(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t \partial x^1} + \\ + A_4(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + A_5(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + A_6(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (10)$$

В уравнении (10) $A_1(t)$, $A_2(t)$, ..., $A_6(t)$ — функции t , связанные с известными функциями и постоянными, входящими в (8а), (86) и (9), включая величину сжимающей силы P .

Для стержней как с начальной погибью, так и внецентренно приложенной нагрузкой получилось совершенно одинаковое уравнение (10). Но это не говорит о том, что и решения будут одинаковыми, т. к. для двух этих случаев различны как граничные, так и начальные условия.

Дифференциальное уравнение (10) — уравнение медленного движения стержня. Исследуя уравнение (10), можно установить тенденции в развитии перемещений при различных уровнях сжимающих сил. Если прогибы при $t \rightarrow \infty$ стремятся к конечной величине, то состояние стержня можно считать устойчивым; наоборот, если прогибы стремятся к бесконечности, то состояние стержня неустойчиво.

При длительном действии нагрузки будем считать критической силу, вызывающую при $t \rightarrow \infty$ скорость перемещений стержня, стремящуюся к постоянной величине, а перемещения — к бесконечности.

Учитывая это, а также то, что принятые в сформулированном выше определении характеристики перемещений справедливы для любого сечения стержня по его длине, можно определять величину критической силы при длительном действии нагрузки, исходя из условий

$$\begin{aligned} y^*(x, t) \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial y^*(x, t)}{\partial t} \rightarrow \text{Const} \\ \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^3 y^*(x, t)}{\partial t^3} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (11)$$

а также

$$A_3(t) \rightarrow \gamma_{11}\gamma_{12}[1 + \mu n_0 m (1 + c)], \quad A_6(t) \rightarrow \gamma_{11}\gamma_{12} (1 + c) \frac{P}{Ej_0}$$

где $c = E(C_1 + C_2)$ — предельная характеристика нестареющей, полностью обратимой части деформаций ползучести.

При выполнении условий, указанных в (11), из уравнения (10) можно получить дифференциальное уравнение для нахождения величины критической силы при длительном действии нагрузки

$$\frac{\partial^4 y^*(x, t)}{\partial x^4} + \frac{P}{Ej_0} \frac{1 + c}{1 + \mu n_0 m (1 + c)} \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

Из решения уравнения (12), учитывая, что $y^*(x, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, всегда можно получить выражение для определения критической силы при длительном действии нагрузки

$$P_2 = P_0 \left(\mu n_0 m + \frac{1}{1 + c} \right), \quad P_k = P_0 (1 + \mu n_0 m) \quad (13)$$

где P_0 — критическая сила при длительном действии нагрузки,

P_0 — критическая сила при кратковременном действии нагрузки,

P_0 — эйлерова сила для неармированного стержня.

Если стержень однороден, то $\mu = 0$ и

$$P_2 = \frac{P_0}{1 + c}, \quad P_k = P_0 \quad (14)$$

Зависимости (13) и (14) справедливы при различных закреплениях концов стержня. Все отличие заключено в величине P_0 , которая имеет определенные значения при различных граничных условиях.

Выражение для критической силы при длительном действии нагрузки оказывается одинаковым как для случая начальной погиби, так и для случая внецентренно приложенной сжимающей силы.

Полученные формулы (13) и (14) полностью совпадают с результатами, полученными в работах [2] и [4], для частных случаев.

Анализ интегро-дифференциальных уравнений (8а) и (8б) показывает, что формулы (13) и (14) справедливы не только при $k = 2$ в ряде (9), но и при любом количестве членов этого ряда. В общем случае

$$c = E \sum_{i=1}^{n-1} C_i \quad (15)$$

Оказалось также, что и для случая, когда ползучесть описывается теорией упругой наследственности, выражение для P_c остается таким же.

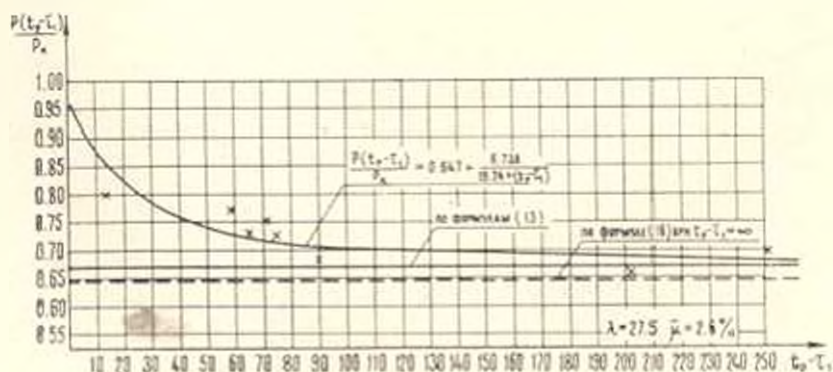
Из всего сказанного очевидно, что полученные выводы являются общими, и критическая сила при длительном действии нагрузки зависит только от нестаренющей части деформации ползучести. Последнее связано с условностью принятой формулировки понятия критической силы, и соответствии с которой величина этой силы определяется по характеру движения стержня при $t \rightarrow \infty$, т. е. тогда, когда закончился процесс старения материала.

Необходимо помнить, что формулы (13) и (14) позволяют проверять только устойчивость стержней при длительном действии сжимающей силы; прочность стержня, даже при $P < P_c$, должна проверяться дополнительно, с учетом разнителя перемещений по времени.

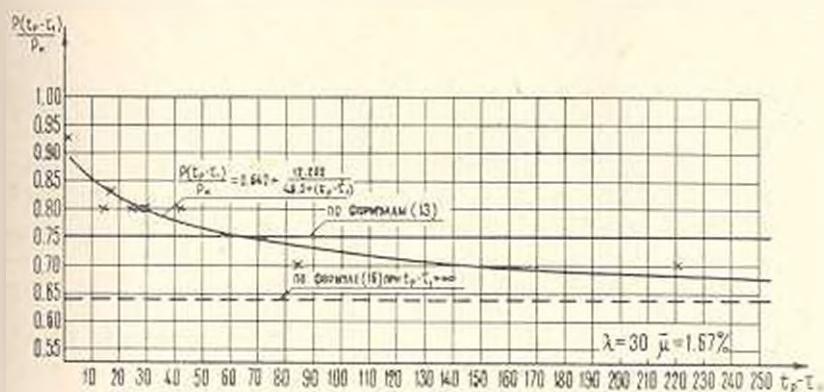
Для выявления возможности использования формул (13) и для оценки влияния ползучести на величины критических сил для гибких железобетонных стоек, проведена обработка экспериментальных данных Д. Н. Пекуса-Сахновского [6], а также К. Э. Таля и Е. А. Чистякова [7].

Более удобными при принятой методике обработки оказались данные [6], относящиеся к стойкам с одинаковыми поперечными сечениями и армированием и содержащие характеристики ползучести бетона; последние позволили выявить величину предельной характеристики обратимой части деформации ползучести, оказавшейся равной для бетона стоек $c = 0.84$. В опытах [7] варьировались размеры поперечных сечений и армирование; принятая в расчете характеристика „с“ определена на основе известных рекомендаций И. И. Улицкого [8].

На фиг. 1 и 2 нанесены экспериментальные точки, показываю-



Фиг. 1



Фиг. 2.

щие зависимость между уровнем сжимающей силы $\frac{P(t_p - t_1)}{P_k}$ и продолжительностью пребывания стойки под нагрузкой до момента разрушения $(t_p - t_1)$. По этим точкам с помощью формулы

$$\frac{P(t_p - t_1)}{P_k} = b_1 + \frac{b_2}{b_3 + (t_p - t_1)} \quad (16)$$

построены кривые. Коэффициенты b_i подобраны, исходя из минимума среднего квадратичного отклонения, и оказались равными

$$b_1 = 0.647, \quad b_2 = 6.738, \quad b_3 = 19.24 \quad (\text{фиг. 1})$$

$$b_1 = 0.642, \quad b_2 = 12.252, \quad b_3 = 48.5 \quad (\text{фиг. 2})$$

при этом средние квадратичные отклонения составляют $\Delta = 0.03045$ и $\Delta = 0.02193$.

Формула (16) позволила при $t_p - t_1 = \infty$ определить отношение критических сил при длительном и кратковременном приложениях нагрузки

$$\frac{P_1}{P_k} = 0.647, \quad \frac{P_2}{P_k} = 0.642 \quad (17)$$

Соответствующие отношения, вычисленные согласно (13), при указанных ранее величинах характеристик „с“

$$\frac{P_1}{P_k} = 0.67, \quad \frac{P_2}{P_k} = 0.75 \quad (18)$$

Из сопоставления (17) и (18) видно, что отношения $\frac{P_1}{P_k}$, полученные теоретически, несколько превышают отношения, вычисленные при обработке экспериментальных данных. Такое положение можно объяснить процессом трещинообразования и развития нелинейных деформаций ползучести. Превышение для опытов [6], содержащих для обработки все необходимые данные, составляет достаточно малую величину—0.23, а для опытов [7], обработанных с привлечением дополнительных источников, это превышение значительно и составляет 0.108.

В ы в о д ы

1. Критические силы при длительном действии нагрузок для однородных и неоднородных гибких стержней, выполненных из материала, обладающего ползучестью и старением, имеющих постоянные во времени условия опирания и применяемых в качестве элементов строительных конструкций, могут определяться на основании формул (13) и (14).

2. Для гибких железобетонных стоек, развитие перемещений в которых сопровождается переходом к нелинейной ползучести и трещинообразованием, эти же формулы позволяют получить оценку величины критических сил сверху.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 2 IV 1968

Ա. Ն. ՕՐԼՈՎ, Ի. Ե. ՊՐՈԿՈՎՈՎԻՉ

ՃԿՈՐԻՆ ԶԱՄԵԱՍԻՆԻ ԵՎ ԱՆՃԱՄԵԱՍԻՆԻ ԿԱՆԳՆԱԿՆԵՐԻ ԶԱՄՈՐ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՈՐԿԵՐԻ ՄԵԿՈՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՍՈՎՔԻ ԵՎ ՄԵՐԱՑՐԱՆ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. վ. ո. վ. ի. ի.

Հոդվածը նվիրված է բերի երկարատև ազդեցության դեպքում, ճկուն համասեռ և անհամասեռ կանգնակներում կրիտիկական ուժերի որոշմանը:

Ստացված են՝ կրիտիկական ուժերի որոշման համար բանաձևեր, հիմնվելով ծերացման ժառանգականության տեսության լարումների և դեֆորմացիաների միջև եղած կախվածությունների վրա:

Խնդիրը լուծված է ձողերի համար, ծալրերով հենման տարբեր պայմանների դեպքում:

A. N. ORLOV, I. E. PROKOPOVICH

ON THE EFFECT OF CREEP AND AGEING ON THE MAGNITUDE OF CRITICAL FORCES FOR FLEXIBLE HOMOGENEOUS AND NONHOMOGENEOUS STANCHIONS

S u m m a r y

The article is devoted to the question of determination of the critical forces for flexible homogeneous and heterogeneous stanchions under long loading.

On the basis of the dependences of the deformations and strains described by the hereditary theory of ageing, formulas for the determination of the critical forces have been obtained.

The task is solved for pivots with various conditions of support.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949.
2. Прокопюк И. Е. О влиянии ползучести и старения на устойчивость стержня, сжатого длительно действующей силой. „Строительная механика и расчет сооружений“, № 1, 1967.
3. Бунацкий Л. Б. Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изд. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, т. 6, № 2, 1953.
4. Яценко Е. А. Потери длительной устойчивости железобетонных систем. Строительные конструкции, вып. 5, „Будівельник“, Киев, 1967.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
6. Пакус-Сахновский Д. Н. Экспериментальное исследование несущей способности центрально сжатых гибких железобетонных стоек при длительном действии нагрузки. Строительные конструкции, вып. 2, „Будівельник“, Киев, 1965.
7. Таль К. Э., Чистяков Е. А. Экспериментальное исследование гибких железобетонных стержней при длительном нагружении. Тр. НИИЖБ АС и А СССР, „Исследования прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций“, вып. 26, Госстройиздат, М., 1962.
8. Улицкий И. И. Определение величин деформаций ползучести и усадки бетонов. К., Госстройиздат УССР, 1963.