

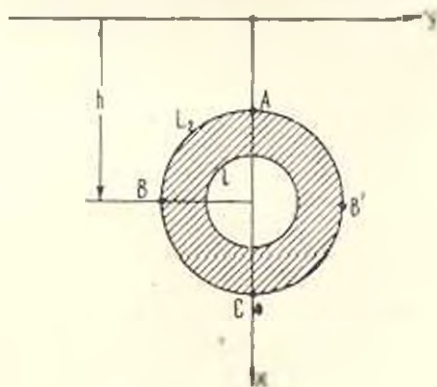
С. А. КАЛОЕРОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе [2] изучено распределение напряжений в анизотропной полуплоскости с эллиптическим (круговым) отверстием, заполненным упругим ядром из другого анизотропного материала. В данной статье рассматривается напряженное состояние анизотропной полуплоскости с круговым отверстием, подкрепленным кольцом (ядром) из изотропного материала. Проведено исследование полей напряжений в ортотропной полуплоскости и в изотропном кольце (ядре) при растяжении полуплоскости и в случае действия равномерного нормального давления на внутреннем контуре кольца.

Аналогичная задача, когда полуплоскость и кольцо были изготовлены из различных изотропных материалов, решена И. Г. Арамановичем [1].

§ 1. Рассмотрим анизотропную полуплоскость с круговым отверстием L_1 , центр которого находится на расстоянии h от прямолинейной границы L (фиг. 1). Пусть в отверстие без предварительного натяжения вклеено или впаяно упругое кольцо из изотропного материала. Радиус отверстия $R = 1$; внутренний радиус кольца равен r . Внешние усилия приложены к полуплоскости на бесконечности и на внутреннем контуре кольца. Объемные силы отсутствуют.



Фиг. 1.

Определение напряженно-деформированного состояния полуплоскости и ядра приводится к нахождению функций комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2$), $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, удовлетворяющих следующим граничным условиям на контуре сая [3, 4]:

$$(1 + i\mu_1)\Phi_1(z_1) + (1 + i\bar{\mu}_1)\overline{\Phi_1(z_1)} + (1 + i\mu_2)\Phi_2(z_2) + (1 + i\bar{\mu}_2)\overline{\Phi_2(z_2)} = \\ = \varphi(z) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi(z)} - \frac{\partial F^0}{\partial x} - i \frac{\partial F^0}{\partial y} + c \quad (1.1)$$

$$(p_1 + iq_1)\Phi_1(z_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\overline{\Phi_1(z_1)} + (p_2 + iq_2)\Phi_2(z_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\overline{\Phi_2(z_2)} = \\ = \frac{1}{2u} [u\overline{\varphi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi(z)}] - u^0 - iu^1 + i(m^1 - m)z - \\ - u_0 - iv_0 + u_0^1 + iv_0^1$$

и на внутреннем контуре кольца

$$\varphi(z) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi(z)} = f_1 \quad (1.2)$$

где

$$p_j = a_{11}u_j^0 + a_{12} - a_{13}u_j^1; \quad q_j = a_{12}u_j^0 + \frac{a_{22}}{2} - a_{23}u_j^1$$

$$z = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad u = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \mu_1 = \alpha + i\beta, \quad \mu_2 = \gamma + i\delta$$

Здесь

a_{ik}, μ_j — коэффициенты деформации и комплексные параметры, зависящие от свойств материала полуплоскости;

E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала изотропного ядра;

$F^0(x, y), u^0, u^1$ — функция напряжений, характеризующая напряженное состояние сплошной полуплоскости, и смещения, возникшие в ней под действием внешних усилий;

f_1 — функция, зависящая от нагружения внутреннего контура кольца;

$u_0, v_0, m, u_0^1, v_0^1, m^1$ — „жесткие“ смещения полуплоскости и ядра;

c — произвольная постоянная.

Функции обобщенных комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$ определены и голоморфны в областях S_j , получаемых из заданной полуплоскости с круговым отверстием аффинными преобразованиями. Эти функции имеют вид [2]

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{[\zeta_1(z_1)]^k} + \frac{l_1 \bar{a}_k}{[\bar{\zeta}_1(z_1)]} + \frac{n_1 \bar{b}_k}{[\bar{\zeta}_2(z_1)]^k} \right\} \quad (1.3)$$

$$\Phi_2(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{b_k}{[\zeta_2(z_2)]^k} + \frac{n_2 \bar{b}_k}{[\bar{\zeta}_2(z_2)]^k} + \frac{l_2 \bar{a}_k}{[\bar{\zeta}_1(z_2)]^k} \right\}$$

Здесь a_k, b_k — произвольные комплексные коэффициенты, а $\zeta_j(z_j), \bar{\zeta}_j(z_j)$ — переменные, связанные с z_j следующими зависимостями:

$$z_j - h = R_j \left(\zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j} \right)$$

$$s_j z_j - h = \bar{R}_1 \left(\bar{z}_1 + \frac{\bar{m}_1}{\bar{z}_1} \right)$$

$$t_j z_j - h = \bar{R}_2 \left(\bar{z}_2 + \frac{\bar{m}_2}{\bar{z}_2} \right)$$

где

$$R_j = \frac{1 - ip_j}{2}, \quad m_j = \frac{1 + ip_j}{1 - ip_j}, \quad s_j = \frac{\bar{p}_j}{p_j}, \quad t_j = \frac{\bar{p}_2}{p_j}$$

$$l_1 = \frac{p_1 - \bar{p}_1}{p_1 - p_1}, \quad n_1 = \frac{p_2 - \bar{p}_2}{p_1 - p_2}, \quad n_2 = \frac{p_2 - \bar{p}_2}{p_2 - p_1}, \quad l_2 = \frac{p_1 - \bar{p}_1}{p_2 - p_1}.$$

Функции $\bar{z}(z)$ и $\gamma(z)$, характеризующие напряженное состояние кольца, представим так:

$$\bar{z}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k (z - h)^k + \frac{c_{-k}}{(z - h)^k} \right], \quad \gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[d_k (z - h)^k + \frac{d_{-k}}{(z - h)^k} \right] \quad (1.4)$$

Функции $[\bar{z}_n(z_j)]^{-1}$ разложим в ряды по полиномам Фабера для эллипсов L_{11} , получаемых из L_1 аффинными преобразованиями

$$[\bar{z}_1(z_j)]^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl}^{(1)} P_l(z_j), \quad [\bar{z}_2(z_j)]^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} B_{kl}^{(1)} P_l(z_j) \quad (1.5)$$

Принимая во внимание (1.3)–(1.5), из граничных условий (1.1) и (1.2) методом рядов получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных a_k, b_k, c_k, d_k :

$$\begin{aligned} (1 - ip_1)a_k + (1 + ip_2)b_k + k(1 - \gamma^{2k})c_k + (k + 2)(1 - \gamma^{2k+2})c_{k+2} - \\ - (1 - \gamma^{2k})d_k + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 \bar{z}_{11} A_{pk}^{(1)} + l_2 s_{12} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p + [\bar{l}_1 s_{21} \bar{A}_{pk}^{(1)} + \bar{l}_2 s_{11} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + \\ + [n_1 s_{12} B_{pk}^{(1)} + n_2 s_{12} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [\bar{n}_2 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(1)} + \bar{n}_1 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = d_k + \gamma^k \beta_{1k} \\ (1 - ip_1)a_1 + (1 + ip_2)b_1 + [1 - \gamma^{2k} + \gamma_k(k - 2)k\gamma^{2k-2}(1 - \gamma^2)]c_k - \gamma_k(1 - \\ - \gamma^2)c_k + \gamma_k(k - 2)\gamma^{2k-4}(1 - \gamma^2)c_{k-2} - \gamma_k(k - 2)\gamma^{2k-4}(1 - \gamma^2)d_{k-2} + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 \bar{z}_{11} A_{pk}^{(1)} + l_2 s_{12} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p + [\bar{l}_1 s_{21} \bar{A}_{pk}^{(1)} + \bar{l}_2 s_{11} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + \\ + [n_1 s_{12} B_{pk}^{(1)} + n_2 s_{12} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [\bar{n}_2 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(1)} + \bar{n}_1 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = \\ = \bar{\gamma}_k + \gamma^k \bar{\gamma}_{1k} - \gamma_k(k - 2)\gamma^{2k-4}(1 - \gamma^2)\bar{\beta}_{1k-2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
& (p_1 + iq_1)a_k + (p_2 + iq_2)b_k - \frac{k}{2^n} (1 + \gamma_k^{2k}) \bar{c}_k + \frac{k-2}{2^n} (1 + \gamma_k^{2k-2}) \bar{c}_{k-2} + \\
& + \frac{1}{2^n} (1 + \gamma_k^{2k}) \bar{d}_k + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 t_{11} A_{pk}^{(1)} + l_2 t_{12} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p - [\bar{l}_1 t_{13} \bar{A}_{pk}^{(1)} + \\
& - \bar{l}_2 t_{14} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + [n_1 t_{11} B_{pk}^{(1)} + n_2 t_{12} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [\bar{n}_1 t_{13} \bar{B}_{pk}^{(1)} + \bar{n}_2 t_{14} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = \gamma_k + \\
& + \frac{\gamma_k^k}{2^n} \beta_{kk} \\
& (p_1 - iq_1)a_k + (p_2 - iq_2)b_k - \frac{1}{2^n} \{ \alpha + \gamma^{2k} - \gamma_k (k-2) \gamma_k^{2k-2} (1 - \gamma^2) \bar{c}_k + \\
& + \frac{\gamma_k}{2^n} (1 - \gamma^{2k}) \bar{c}_k - \frac{\gamma_k}{2^n} (k-2) \gamma_k^{2k-4} (1 - \gamma^2) \bar{c}_{k-2} + \frac{\gamma_k}{2^n} (k-2) \gamma_k^{2k-4} (1 - \\
& - \gamma^2) \bar{d}_{k-2} + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 t_{21} A_{pk}^{(1)} + l_2 t_{22} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p + [\bar{l}_1 t_{23} \bar{A}_{pk}^{(1)} + \bar{l}_2 t_{24} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + \\
& + [n_1 t_{21} B_{pk}^{(1)} + n_2 t_{22} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [\bar{n}_1 t_{23} \bar{B}_{pk}^{(1)} + \bar{n}_2 t_{24} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = \bar{\gamma}_k - \\
& - \frac{\bar{\gamma}_k^k}{2^n} (k-2) \gamma_k^{2k-2} (1 - \gamma^2) \beta_{kk-2}
\end{aligned}$$

где

$$l_1 = \gamma_k = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0 \quad (k \geq 3, \quad i \geq 2)$$

$$t_{1j} = (p_j + iq_j) m_j, \quad t_{2j} = (p_j - iq_j) m_j,$$

$$t_{1j+2} = \bar{p}_j + i \bar{q}_j, \quad t_{2j+2} = \bar{p}_j - i \bar{q}_j, \quad j = 1, 2$$

Коэффициенты s_{ik} получаются из l_{ik} , если в последних заменить p_j и q_j на 1 и m_j , постоянные $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k$ зависят от способа нагружения полуплоскости, а α_k, β_k — от способа нагружения внутреннего контура кольца.

После определения коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k неизвестные постоянные $s_k, \bar{s}_k$ находятся из следующих соотношений:

$$s_{-k} = \gamma^k \beta_{kk} + k \gamma^{2k} \bar{c}_k - (k+2) \gamma^{2k-2} \bar{c}_{k-2} - \gamma^{2k} \bar{d}_k$$

$$\begin{aligned}
d_{-k} = & \gamma^k (\alpha_{kk} - k \beta_{kk} + \gamma_k (k-2) \beta_{kk-2} - \gamma^{2k} [1 + k^2 + \\
& + \gamma_k (k-2) k] \bar{c}_k - \gamma_k \gamma^{2k-2} \bar{c}_{k-2} + k(k+2) \gamma^{2k-2} \bar{c}_{k-2} - \\
& + \gamma_k (k-2) \gamma^{2k-2} \bar{c}_{k-2} + k \gamma^{2k} d_k - \gamma_k (k-2) \gamma^{2k-2} d_{k-2}
\end{aligned}$$

При $r = 0$ из (1.6) получим систему для полуплоскости с ядром.

После нахождения коэффициентов из системы (1.6) и соотношений (1.7) искомые функции (1.3) и (1.4) становятся известными, что позволяет определить напряжения в полуплоскости и в ядре.

Если полуплоскость изготовлена из ортотропного материала и главные направления упругости совпадают с направлениями осей координат, то $a_{16} = a_{26} = 0$. Если, кроме того, комплексные параметры

являются чисто мнимыми, т. е. $\mu_1 = i\beta$, $\mu_2 = i\delta$, то все приведенные формулы несколько упрощаются. В этом случае все коэффициенты, стоящие перед неизвестными в системе (1.6), становятся вещественными.

§ 2. Пусть ортотропная полуплоскость с изотропным круговым кольцом растягивается усилиями p , приложенными к ней на бесконечности параллельно прямолинейной границе, а внутренний контур кольца не загружен. В этом случае

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \beta_1 = -\frac{p}{2}, \quad \gamma_1 = -\frac{p}{2}(\alpha_{11} - \alpha_{22}), \quad \delta_1 = -\frac{p}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \\ \alpha_k = \beta_k = \gamma_k = \delta_k = 0 \quad (k \geq 2), \quad \alpha_k = \beta_{1k} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В случае, если внешние усилия в виде равномерного давления q приложены к внутреннему контуру кольца, а полуплоскость не загружена, эти коэффициенты получаются такими:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = -q, \quad \alpha_{12} = 0 \quad (k \geq 2) \\ \alpha_k = \beta_k = \gamma_k = \delta_k = \beta_{1k} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для этих двух способов загрузки проводилось подробное исследование полей напряжений, возникающих в полуплоскости и в кольце. При этом полуплоскость считалась изготовленной из трехслойной авиационной фанеры, для которой [3]

$$\begin{aligned} E_1 = 1.2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \quad E_2 = 0.6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \\ \nu_1 = 0.071; \quad \nu_2 = 0.036; \quad \mu_1 = 4.11i; \quad \mu_2 = 0.343i \end{aligned}$$

Для материала же ядра принималось

$$\nu = 2; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

В полученном решении граничные условия на прямолинейной границе L удовлетворяются точно, а на поверхности контакта L_1 и на внутреннем контуре кольца — приближенно. О точности выполнения граничных условий на L_1 (граничные условия на внутреннем контуре кольца выполняются гораздо точнее) можно судить на основании результатов, приводимых в табл. 1. В этой таблице даны значения

Таблица 1

Точки	А	В		С
	$z_1(z_1^1)$	$z_r(z_r^1)$	$z_{r0}(z_{r0}^1)$	$z_r(z_r^1)$
2	0.1336	1.2350	0.0023	0.1534
	0.1336	1.2350	0.0023	0.1534
1.1	0.0303	1.1998	0.0178	0.1336
	0.0302	1.1995	0.0182	0.1338
1.05	0.0116	1.1976	0.0199	0.1337
	0.0122	1.1968	0.0202	0.1339

напряжений σ_r , σ_θ и $\sigma_{r\theta}$ (последние под первыми в скобках), возникающих на поверхности контакта и некоторых точках полуплоскости и ядра. В таблице не приведены значения напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta r}$ в концах вертикального диаметра. В этих точках они равны нулю.

Численные расчеты показывают, что при подкреплении отверстия влияние прямолинейной границы на величину напряжений в полуплоскости около спая и в кольце незначительно; при сближении контура спая с прямолинейной границей напряжения в полуплоскости около кольца и в самом кольце изменяются медленно; большая концентрация напряжений возникает в кольце и особенно вблизи его внутреннего контура. При сужении ширины кольца ($\gamma \rightarrow 1$) концентрация этих напряжений резко возрастает. При этом наблюдается рост напряжений и в полуплоскости.

Донецкий государственный
университет

Поступила 12 VI 1964

Ս. Ա. ԿԱԼՈՅԵՐՈՎ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽԱՌՄԸ ԱՆԻՍՏՐՈՓԱՅ ԿԼՈՐ ԱՆՅՔՈՎ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ
ԿԻՍՈՏԱՐՔԻՆԻՔՅՈՒՆԻՅՈՒՆԻՄ

Ս. մ Վ ի ո Վ ի ո Վ

Դիտարկվում է կլոր անցքով, անիզոտրոպ կիսահարթի լարվածա-
լին վիճակի խնդիրը, երբ անցքըամրացված է իզոտրոպ նյութից պատրաստ-
ված օղակով (միջուկ)։

Խնդիրը բերվում է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխեմի
լուծմանը։

Ամրամասն ուսումնասիրվում է լարումների բաշխվածությունը օրի-
տրոպ կիսահարթի լուծում և իզոտրոպ օղակում կիսահարթի ձգման
դեպքում և այն դեպքում, երբ օղակի ներքի եզրում աղգում է հավասարաչափ
ճնշում։

S. A. KALOEROV

DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE ANISOTROPIC
SEMI-PLANE WITH A STRENGTHENED CIRCULAR HOLE

S u m m a r y

The strain state in an anisotropic semi-plane with a circular hole
strengthened by an isotropic ring is considered.

The problem is reduced to the solution of an infinite system of
algebraic equations.

A detail analysis of the stress distribution in the orthotropic semi-plane and in the isotropic ring is given when the semi-plane is extended and the ring is found under the action of pressure uniformly distributed along its contour.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Араманович И. Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. Докл. АН СССР, т. 104, №3, 1955.
2. Калосеров С. А. Распределение напряжений в анизотропной полуплоскости с эллиптическим упругим ядром. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 20, №3, 1967.
3. Леонидский С. Г. Анизотропные пластины. Гостехиздат, М., 1957.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во "Наука", М., 1966.