

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ

1. Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка радиуса R , длины l , толщины h , шарнирно опертая по торцам, при действии осесимметричной поперечной нагрузки. Деформированное состояние оболочки определяется радиальным перемещением w и силовой функцией Φ , удовлетворяющих дифференциальным уравнениям [1]

$$\begin{cases} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w, w) = 0 \\ D \nabla^4 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - L(w, \Phi) = q \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

q — интенсивность нагрузки, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости материала. Положение произвольной точки цилиндра определяется величиной параметров x и y , где x — расстояние вдоль образующей цилиндра, y — длина направляющей дуги цилиндра.

До потери статической устойчивости деформации оболочки будут осесимметричными.

Обозначив в этом состоянии w и Φ через $w_0 = w_0(x)$ и $\Phi_0 = \Phi_0(x)$, вместо (1.1) будем иметь

$$\begin{cases} \frac{1}{Eh} \frac{d^4 \Phi_0}{dx^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \\ D \frac{d^4 w_0}{dx^4} - \frac{1}{R} \frac{d^2 \Phi_0}{dx^2} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Систему (1.3) можно привести к виду

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dx^2} = - \frac{Eh}{R} w_0 \quad (1.4)$$

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 4\beta^4 w_0 = \frac{q}{D}, \quad \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2} \quad (1.5)$$

Интегрируя уравнение (1.5) при заданной нагрузке q и краевых условиях

$$w_0 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=l \quad (1.6)$$

находим решение для $w_0 = qF(x)$.

Это решение характеризует докритическое моментное состояние оболочки.

Ниже это решение мы будем представлять в виде ряда, как в работах [2] и [3]

$$w_0 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos i_k x, \quad \text{где} \quad i_k = \frac{k\pi}{l} \quad (1.7)$$

При достижении параметром q верхнего критического значения $q = q_{\text{крит. кр.}}$, деформации оболочки перестают быть осесимметричными и в исходных уравнениях (1.1) необходимо принять

$$\begin{cases} w = w_0 + w_1 \\ \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \end{cases} \quad (1.8)$$

где $w_1 = w_1(x, y)$, $\Phi_1 = \Phi_1(x, y)$ будут возмущениями.

Подставив (1.8) в выражение (1.2) для оператора и отбрасывая при этом малые величины, из (1.1) с учетом (1.3) получаем следующие дифференциальные уравнения для возмущений w_1 и Φ_1 :

$$\begin{cases} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \\ D \nabla^4 w_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \frac{d^2 \Phi_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Эти уравнения отличаются от известных уравнений устойчивости наличием членов, содержащих докритические прогибы w_0 и Φ_0 .

Представив возмущения w_1 и Φ_1 в виде рядов

$$w_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin i_m x \quad (1.10)$$

$$\Phi_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin i_m x, \quad \text{где} \quad i_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \mu_n = \frac{n}{R}$$

и подставляя (1.7) и (1.10) в систему (1.9), приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$(V_p - 2S_0 + S_{2p}) a_p - \sum_{m=1}^{p-1} (S_{p-m} - S_{p+m}) a_m - \sum_{m=p+1}^{\infty} (S_{m-p} - S_{m+p}) a_m = 0 \quad (1.11)$$

где

$$V_p = \frac{2}{R_1^2 a_p^2} \left[\frac{(i_p^2 + i_n^2)^2}{49^4} + \frac{i_p^4}{(i_p^2 + i_n^2)^2} \right] \quad (1.12)$$

$$S_i^{m,p} = \left\{ 1 + \left[\frac{i_m^2}{(i_m^2 + i_n^2)^2} + \frac{i_p^2}{(i_p^2 + i_n^2)^2} \right] i^2 \right\} f_i$$

где

$$i = \begin{pmatrix} p-m \\ p+m \\ m-p \end{pmatrix}$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.11)

$$\begin{vmatrix} V_1 - 2S_0 + S_2 & -S_1^{p-1} + S_3^{p-1} & -S_2^{p-3} + S_4^{p-3} & \dots \\ -S_1^{p-1} + S_3^{p-1} & V_2 - 2S_0 + S_4 & -S_1^{p-3} + S_5^{p-3} & \dots \\ -S_2^{p-3} + S_4^{p-3} & -S_1^{p-1} + S_3^{p-1} & V_3 - 2S_0 + S_6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

является условием потери статической устойчивости оболочки.

Соответствующие математические выкладки приведены в работе [3].

Ограничиваясь в разложениях (1.7) и (1.10) несколькими первыми членами и раскрыв определитель (1.13), получим характеристическое уравнение, из которого находим зависимость верхнекритической нагрузки от количества полуволн n в окружном направлении.

2. Приведем приложение изложенной методики к задаче об устойчивости цилиндра при действии равномерно распределенной кольцевой нагрузки P_0 , приложенной по окружности, отстоящей на расстоянии a от левого торца.

Пользуясь методом начальных параметров, представим решение уравнения (1.5) в виде

$$w_0 = A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.1)$$

$$w_0 = A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) + A_6 Y_6(\beta x - \beta a) \quad a \leq x \leq l$$

где $Y_2(\beta x)$ и $Y_4(\beta x)$ — функции Крылова

$$Y_2(\beta x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x) \quad (2.2)$$

$$Y_4(\beta x) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x - \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x)$$

A_2 и A_4 — постоянные, определяемые из условий (1.6), причем

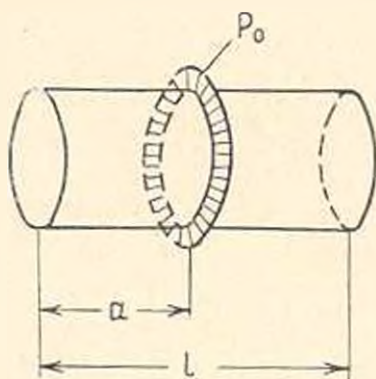
$$A_2 = q \frac{\operatorname{sh} \beta (2l - a) \sin \beta a - \operatorname{sh} \beta a \sin \beta (2l - a)}{\operatorname{ch}^2 \beta l - \cos^2 \beta l} \quad (2.3)$$

$$A_4 = q \frac{\operatorname{ch} \beta (2l - a) \cos \beta a - \operatorname{ch} \beta a \cos \beta (2l - a)}{\operatorname{ch}^2 \beta l - \cos^2 \beta l}$$

где

$$q = \frac{P_0}{D \beta^2} = 4q^* R l^2 \quad (2.4)$$

$q^* = \frac{P_0 R}{E h l}$ — приведенная безразмерная нагрузка.



Фиг. 1.

Коэффициент разложения (1.7) в данном примере при произвольном a $0 < a < l$ определяется формулами

$$f_0 = q^* \left[\frac{A_2}{q} \operatorname{sh} \beta l \sin \beta l - \frac{A_4}{2q} (\operatorname{ch} \beta l \cos \beta l - 1) - \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \beta (l - a) \cos \beta (l - a) - 1) \right] \quad (2.5)$$

$$f_m = 2q^* \left[(-1)^m \operatorname{sh} \beta l \sin \beta l \left(C_1 \frac{A_2}{q} + C_2 \frac{A_4}{2q} \right) + \left((-1)^m \operatorname{ch} \beta l \cos \beta l - 1 \right) \left(C_1 \frac{A_2}{q} - C_2 \frac{A_4}{2q} \right) + \frac{(-1)^m}{2} \left(C_2 \operatorname{sh} \beta (l - a) \sin \beta (l - a) - C_1 \operatorname{ch} \beta (l - a) \cos \beta (l - a) \right) + \frac{1}{2} C_1 \cos \beta x \right]$$

где

$$C_1 = \frac{2\beta - \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} + \frac{2\beta + \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]} \quad (2.6)$$

$$C_2 = \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} - \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]}$$

Ниже приведена таблица значений q , соответствующих потере устойчивости, для оболочки, имеющей следующие характеристики:

$$\frac{h}{R} = 0.331 \cdot 10^2, \quad \frac{l}{R} = 0.1\pi \quad (2.7)$$

Оболочка с такими характеристиками взята в работах [2] и [3].

Таблица 1

n	17	18	19	20	21
I	0.00033601	0.00033577	0.0003329	0.00034277	0.00035838
II	0.0004038	0.00039073	0.00038573	0.00039067	0.00039815

В первой строке табл. 1 даны значения q , соответствующие потере устойчивости оболочки при учете докритических прогибов w_0 .

Во второй строке той же таблицы даны значения q без учета докритических прогибов.

В табл. 2 приведены значения q при $n = 19$ и следующих a :

$$a = \frac{l}{2}, a = \frac{l}{4}, a = \frac{l}{8}$$

Сохранение в уравнениях (1.9) членов, содержащих w_0 , снижает верхнекритическую нагрузку. Для $n = 19$ эта разница составляет $\approx 10\%$.

Таблица 2

n	19		
q^* \ a	$l/2$	$l/4$	$l/8$
I	0.0003329	0.00043472	0.0010607
II	0.00038573	0.0005057	0.0012895

Из табл. 2 видно, что для всех состояний, характеризующихся строками I, II, верхнекритическая нагрузка возрастает с приближением кольцевой нагрузки P_0 к опорам.

При переходе от безразмерной приведенной нагрузки q^* к размерной P_0 имеем

$$P_0 = q^* \frac{E h l^3}{R} = 1.047 \cdot 10^{-4} E h \quad (2.8)$$

В работе [1], стр. 561—565, приведено решение той же задачи для бесконечного цилиндра, при этом для величины критической нагрузки получена формула

$$P_{*}^{*p} = \frac{1}{9} \frac{12}{(1-\mu^2)^{0.75}} \frac{Eh}{R} \left(\frac{h}{R} \right)^{1.5}$$

которая при $h/R = 0.331 \cdot 10^{-2}$, $\mu = 0.3$ дает

$$P_{0}^{*p} = 0.8124 \cdot 10^{-4} Eh$$

Для числа полуволн в названной работе получена формула, которая при принятом h/R дает полученное нами значение, $n = 19$.

3. В заключение отметим, что по изложенной выше методике можно исследовать колебания нагруженной оболочки, описываемые уравнениями

$$\begin{cases} \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w, w) = 0 \\ D \nabla^4 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - L(w, \Phi) = a - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.1)$$

Поступая так же, как и при исследовании статической устойчивости и полагая

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos \omega t \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \lambda_m x \\ \Phi_1 &= \cos \omega t \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \lambda_m x \end{aligned} \quad (3.2)$$

вместо (1.11) здесь приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений, содержащей частоту колебаний ω

$$\begin{aligned} \left(V_p - \frac{2\rho\omega^2 R}{\mu_n^2 E} - 2S_0 + S_{2p} \right) a_p - \sum_{m=1}^{p-1} (S_{p-m} - S_{p+m}) a_m - \\ - \sum_{m=p+1}^{\infty} (S_{m-p} - S_{m+p}) a_m = 0 \end{aligned}$$

где V_p и S_{l-p} имеют те же значения (1.12).

Ниже приводится таблица частот колебаний $\omega^* = \omega \frac{1}{\mu_n} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$

при различных q^* , n и $a = \frac{l}{2}$

Таблица 3

n	q	17	18	19	20	21
	q^*	0	0	0	0	0
n = 1, 2	$q^*/2$	$10^{-2} \cdot 1.9393$	$10^{-2} \cdot 1.9059$	$10^{-2} \cdot 1.8925$	$10^{-2} \cdot 1.9039$	$10^{-2} \cdot 1.9213$
	$q^*/4$	$10^{-2} \cdot 2.3752$	$10^{-2} \cdot 2.3343$	$10^{-2} \cdot 2.3178$	$10^{-2} \cdot 2.3318$	$10^{-2} \cdot 2.3531$
	$q^*/8$	$10^{-2} \cdot 2.5655$	$10^{-2} \cdot 2.5213$	$10^{-2} \cdot 2.5036$	$10^{-2} \cdot 2.51868$	$10^{-2} \cdot 2.5417$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 28 V 1968

Գ. Ի. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ԳԼԱՆԱԶԵՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԲԵՌՆԼԱՄՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Փ Ո Փ

Աշխատանքում քննարկվում է՝ ճակատներում հոդակապալին ամրացում ունեցող, փերջավոր երկարությամբ ղեկավարվող թաղանթը՝ առանց քառաձևորակ շառավղալին բերի ազդեցության տակ:

Թերթում է թաղանթի ստատիկական կայունության և սեփական տատանումների խնդիրների լուծումները: Երկու դեպքում էլ, համապատասխան ճիմնական սխեմներ բերվում է հանրահաշվական համասարումների անփերջ սխեմների, որի ղեկավարման դերով համասար լինելը հանդիսանում է թաղանթի ստատիկ կայունության կրտսեր պայմանը:

G. I. AVANESOVA

ON THE STABILITY AND OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER A HOOP LOAD

S u m m a r y

In the present paper the cylindrical shell of finite length hingely supported at the but-ends under the action of the axialsymmetric hoop load is considered.

The solution of the problem of the static stability and the problem of free oscillations for the given shell with momented initial stressed state is performed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
2. Hoff N.J. Buckling of thin cylindrical shell under Hoop stresses. J. of Applied Mechanics, vol. 24, No 3, 1957.
3. Гнуни В. Ц., Мовсисян А. А. К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Докл. АН АрмССР, XLVI № 4, 1968.