

С. Р. САРОЯН

КРУЧЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА, НЕСООСНО АРМИРОВАННОГО КРУГОВЫМ СТЕРЖНЕМ

В настоящей работе рассматривается задача кручения призматического бруса, армированного несоосным круговым стержнем. Поперечное сечение рассматриваемого бруса представляет собой область, ограниченную криволинейным прямоугольником, с нецентральной ядром из другого материала.

Поставленная задача решается методом конформного отображения. Получены численные значения касательных напряжений и жесткостей для прямоугольников с различными соотношениями сторон.

Отметим, что задача о кручении призматического стержня квадратного профиля, армированного несоосным круговым стержнем, была решена Ю. А. Амензаде [1].

1. Как известно [2], отображение внутренней области единичного круга $|z| < 1$ на внутреннюю область G многоугольника осуществляется функцией Кристоффеля-Шварца

$$z = w(\zeta) = A \int_{\zeta_0}^{\zeta} (a_1 - t)^{\alpha_1-1} (a_2 - t)^{\alpha_2-1} \dots (a_n - t)^{\alpha_n-1} dt + B \quad (1.1)$$

где z и ζ — комплексные координаты, соответственно для областей многоугольника и единичного круга $|z| < 1$; n — число сторон многоугольника; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — комплексные координаты точек на окружности единичного круга, соответствующие вершинам многоугольника; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника; A и B — вообще, комплексные постоянные, характеризующие положение многоугольника и его размеры.

В дальнейшем, следуя (3), будем представлять функцию (1.1) в виде

$$z = w(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^k \quad (1.2)$$

Коэффициенты B_k определяются по рекуррентным соотношениям, полученным в [3]

$$B_k = \frac{1}{k(k-1)} \left[(k-1) B_{k-1} \sum_{j=1}^n \frac{1-\alpha_j}{\alpha_j} + \right]$$

$$+ (k-2) B_{k-2} \sum_{s=1}^n \frac{1-z_s}{1-\bar{z}_s} + \dots + B_1 \sum_{s=1}^n \frac{1-z_s}{1-\bar{z}_s} \quad (1.3)$$

$$B_1 = 1 \quad (k=2, 3, \dots)$$

В случае произвольного расположения по отношению к границе области G начала координат в плоскости z величина γ_s , входящая в (1.3), определяется по формуле, полученной в [4]

$$\gamma_s = \frac{d_s + z_0}{1 + d_s z_0} \quad (1.4)$$

где $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ — комплексные координаты точек единичной окружности $|\zeta| = 1$, соответствующие вершинам многоугольника $D_1, D_2, \dots, D_n$; $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника; а z_0 — произвольная точка круга.

В рассматриваемой задаче производится отображение внутренней области единичного круга $|\zeta| < 1$ на внутреннюю область прямоугольника. При этом для малых значений $\rho_2 < 1$ окружностям на плоскости ζ будут соответствовать замкнутые кривые на плоскости z , близкие к окружности. Поэтому (1.2) можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую кольцо $\rho_2 < |\zeta| < 1$ на двусвязную область, ограниченную извне криволинейным прямоугольником, а изнутри — окружностью.

Поэтому, окружности γ_1 и γ_4 плоскости ζ отображаются соответственно на контуры Γ_1 и Γ_4 плоскости z . Для получения достаточно точного контура Γ_1 прямоугольника в отображающей функции (1.2) взято 100 членов.

Внутренний контур Γ_2 независимо от внешнего контура Γ_4 , при малых $\rho_2 < 1$, близок к окружности с любой заданной точностью, которая возрастает с уменьшением ρ_2 .

Так как в данной задаче производится отображение внутренней области единичного круга на внутреннюю область прямоугольника, то в качестве исходных данных в (1.4) примем

$$d_1 = e^{i\varphi}, \quad d_2 = -e^{-i\varphi}, \quad d_3 = -e^{i\varphi}, \quad d_4 = e^{-i\varphi}, \quad z_0 = -0.6$$

Вычисляя по (1.4) значение γ_s ($s=1, 2, 3, 4$), получим

$$\gamma_1 = e^{i\theta_1}, \quad \gamma_2 = e^{i\theta_2}, \quad \gamma_3 = e^{-i\theta_1}, \quad \gamma_4 = e^{-i\theta_2} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctg \frac{0.16 \sin \varphi}{0.34 \cos \varphi - 0.3} \\ \theta_2 &= \arctg \frac{0.16 \sin \varphi}{0.34 \cos \varphi + 0.3} \end{aligned} \quad (1.6)$$

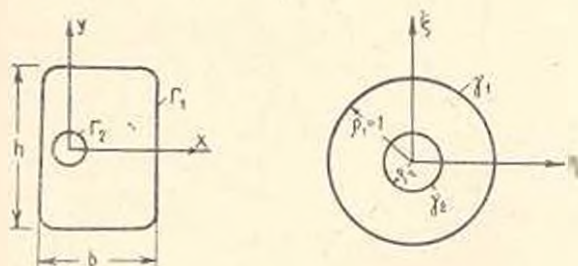
Подставляя (1.5) в (1.3) и принимая $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = \frac{1}{2}$, для коэффициентов B_k получим

$$B_k = \frac{1}{k(k-1)} \{ (k-1) B_{k-1} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + (k-2) B_{k-2} (\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2) + \dots + B_1 [\cos (k-1) \theta_1 + \cos (k-1) \theta_2] \} \quad (1.7)$$

Придавая значения параметру φ и вычисляя по (1.7) с учетом (1.6) коэффициенты B_k , получим прямоугольники с разными отношениями сторон. В табл. 1 приведены значения отношения сторон h/b прямоугольника в зависимости от параметра φ .

Таблица 1

φ	0.25π	0.38π	0.442π	0.473π	0.487π
h/b	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0



Фиг. 1.

2. Задача свободного кручения составных призматических стержней, поперечные сечения которых представляют собой двусвязные области, сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 \Psi_j = -2 \quad (j = 1, 2) \quad (\nabla^2 - \text{оператор Лапласа}) \quad (2.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{на } \gamma_1 \quad (r = r_1 = 1) \quad & \Psi_1 = 0 \\ \text{на } \gamma_2 \quad (r = r_2) \quad & \mu_1 \Psi_1 = \mu_2 \Psi_2, \quad \text{Re } \Phi_1 = \text{Re } \Phi_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Входящая в (2.1) $\Psi_j(x, y)$ — функция напряжений. Индекс $j = 1$ имеет место для области сечения, ограниченной контурами Γ_1 и Γ_2 (соответствующий модуль сдвига μ_1), а индекс $j = 2$ — для области сечения, ограниченной извне контуром Γ_2 (соответствующий модуль сдвига μ_2).

Представим функцию напряжений $\Psi_j(x, y)$ в комплексном виде

$$\Psi_j(x, y) = -\frac{i}{2} [\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - iz\bar{z}] \quad (2.3)$$

где

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

Функция

$$\Phi_j(z) = \varphi_j(x, y) + i\psi_j(x, y) \quad (2.4)$$

есть комплексный потенциал кручения, причем $\varphi_1(x, y)$ — функция кручения, а $\varphi_2(x, y)$ — функция, сопряженная с $\varphi_1(x, y)$.

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^N B_k \zeta^k \quad (2.5)$$

составленная из первых N членов разложения (1.2), реализует отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на внутреннюю область прямоугольника.

Подставляя (2.5) в (2.3), получим

$$\Psi_f = -\frac{i}{2} [\Phi_f(\zeta) - \overline{\Phi_f(\zeta)} - i\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}] \quad (2.6)$$

Функции $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$, регулярные соответственно в кольце $r_2 < \rho < 1$ и в круге $0 < \rho < r_2$ будем искать в виде

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n \quad (2.7)$$

$$\Phi_2(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \quad (2.8)$$

Фигурирующие в (2.7) и (2.8) коэффициенты a_n и b_n — чисто мнимые.

Произведение $\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}$, входящее в (2.6), на линиях $\rho = \text{const}$ разложим в ряд Фурье

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{2} B_0^2 \sum_{k=1}^N B_k^2 \rho^{2k} \\ \gamma_n &= B_0^2 \sum_{k=1}^{N-n} B_k B_{k+n} \rho^{2k+2n} \\ \beta_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

При $\rho = \rho_1 = 1$ коэффициенты γ_0 и γ_n будут снабжены сверху индексом 1, а при $\rho = \rho_2$ — индексом 2.

Удовлетворяя граничным условиям (2.2), определим коэффициенты a_n и b_n , фигурирующие в (2.7) и (2.8)

$$a_n = \frac{(\rho_1 - \rho_2) \gamma_0^{(2)} - (\rho_1 + \rho_2) \gamma_0^{(1)} \rho_2^{-n}}{\rho_1 (\rho_2^n - \rho_1^{-n}) - \rho_2 (\rho_2^n + \rho_1^{-n})}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-n} &= \frac{(\mu_1 - \mu_2) (z_n^{(2)} \rho_2^{(2)} - z_n^{(1)})}{\mu_1 (\rho_2^{(2)} - \rho_2^{(1)}) - \mu_2 (\rho_2^{(2)} + \rho_2^{(1)})} \\
 \beta_n &= \frac{(\mu_1 - \mu_2) (\rho_2^{(2)} + \rho_2^{(1)}) z_n^{(2)} - 2\mu_1 z_n^{(1)}}{\rho_2^{(2)} [\mu_1 (\rho_2^{(2)} - \rho_2^{(1)}) - \mu_2 (\rho_2^{(2)} + \rho_2^{(1)})]} \\
 a_0 &= z_0^{(1)}, \quad b_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} z_0^{(1)} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} z_0^{(2)}
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Крутящий момент, приложенный к основанию стержня, равен

$$M = \tau K \quad (3.1)$$

где τ — степень закручивания, K — жесткость при кручении.

Как известно [5],

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\mu_j}{8i} \int_{\gamma_j} \overline{\omega(z)} \omega(z) dz \right\} = \frac{\mu_j}{8i} \int_{\gamma_j} \overline{\omega(z)} \omega(z) dz = \\
 &= \frac{\mu_j}{4} \left\{ \int_{\gamma_j} [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] dz \right\} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

где z — граничное значение переменной τ ($z = z_n^{(j)}$, $j = 1, 2$).

Произведя интегрирование и учитывая, что скручиваемый стержень состоит из двух материалов с модулями сдвига μ_1 и μ_2 , получим

$$\begin{aligned}
 K &= \mu_1 \frac{\pi}{2} \left[\sum_{n=0}^N (\rho_n^{(1)} A_{-n-1}^{(1)} + \lambda_{-n-1}^{(1)} A_n^{(1)}) - \sum_{n=0}^N (\rho_n^{(2)} A_{-n-1}^{(2)} + \lambda_{-n-1}^{(2)} A_n^{(2)}) \right] + \\
 &+ \mu_1 \pi \left[\sum_{n=1}^N n (a_{-n}^{(1)} - a_n^{(1)}) - \sum_{n=1}^N n (a_{-n}^{(2)} - a_n^{(2)}) \right] + \\
 &+ \mu_2 \frac{\pi}{2} \left[\sum_{n=0}^N (\rho_n^{(2)} A_{-n-1}^{(2)} + \lambda_{-n-1}^{(2)} A_n^{(2)}) \right] - \mu_2 \pi \sum_{n=1}^N n b_n \lambda_n^{(2)} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_n^{(j)} &= z_n^{(j)} \rho_j^{-n}, \quad \lambda_n^{(j)} = z_n^{(j)} \rho_j^n, \quad \lambda_0^{(j)} = 2z_0^{(j)} \\
 (j &= 1, 2)
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
 A_0^{(j)} &= \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) B_k B_{k+1} \rho_j^{2k} \\
 A_{-n}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{N-n-1} k B_k B_{k+n+1} \rho_j^{2(k+n+1)} \\
 A_n^{(j)} &= \sum_{k=1}^{N-n-1} (k+n+1) B_k B_{k+n+1} \rho_j^{2k} \\
 (j &= 1, 2)
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Как известно (5), касательные напряжения при кручении определяются по формуле

$$T_0^{(2)} - iT_0^{(1)} = \nu_j \tau \frac{\zeta}{\rho_j |\omega'(\zeta)|} [\Phi_j^*(\zeta) - i\omega'(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}] \quad (4.1)$$

Отделяя действительные и мнимые части в (4.1) и полагая, что фигурирующие в (3.5) коэффициенты $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $A_n^{(j)}$ — действительные, с учетом (2.5), (2.7), (2.8) и (3.5) получим

$$T_0(\rho = \rho_1) = \frac{\rho_1 \tau}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ A_{-1}^{(1)} \rho_1^{-1} + \sum_{n=1}^N [(A_{n-1}^{(1)} - na_n) \rho_1^{n-1} + (A_{-n-1}^{(1)} + na_{-n}) \rho_1^{-n-1}] \cos n\theta \right\}$$

$$T_0(\rho = \rho_2) = \frac{\rho_2 \tau}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ A_{-1}^{(2)} \rho_2^{-1} + \sum_{n=1}^N [(A_{n-1}^{(2)} - na_n) \rho_2^{n-1} + (A_{-n-1}^{(2)} + na_{-n}) \rho_2^{-n-1}] \cos n\theta \right\}$$

$$T_1(\rho = \rho_2) = \frac{\rho_2 \tau}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ A_{-1}^{(2)} \rho_2^{-1} + \sum_{n=1}^N [(A_{n-1}^{(2)} - nb_n) \rho_2^{n-1} + A_{-n-1}^{(2)} \rho_2^{-n-1}] \cos n\theta \right\}$$

Рассмотрим численный пример. Примем $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 8$, $\rho_1 = 0.3$. Радиусу ρ на плоскости ζ соответствует радиус R на плоскости z . За радиус R принята половина отрезка действительной оси, отсекаемого пересечением Γ_2 с этой осью. Расстояния от центра окружности до 10 дискретных точек, расположенных на Γ_2 , отличаются от R не более, чем на $\pm 2\%$.

Значения R , ν и жесткостей для прямоугольника с разными отношениями сторон приведены в табл. 2 и 3.

Как видно из построения с помощью (1.2) по дискретным точкам, кривая Γ представляет собой прямоугольник с закругленными углами и почти прямыми сторонами. За одну из сторон прямоугольника принят отрезок, отсекаемый кривой Γ' от действительной оси, а за другую сторону — отрезок, отсекаемый кривой Γ от мнимой оси. Отклонение сторон от прямолинейности для прямоугольника с разными отношениями сторон не превышает $\Delta \theta_{\Gamma_0}$, значения которого приведены в табл. 4.

Эпюры касательных напряжений на внешнем контуре поперечного сечения, границе спая двух материалов и на оси симметрии поперечного сечения бруса в долях τ_1/B_0 приведены на фиг. 2, 3 и 4.

Таблица 2

h/b	R/B_0	$\delta\theta/\theta$
1.0	0.3109	2.15
1.5	0.3172	1.99
2.0	0.3185	1.94
2.5	0.3189	1.93
3.0	0.3190	1.93

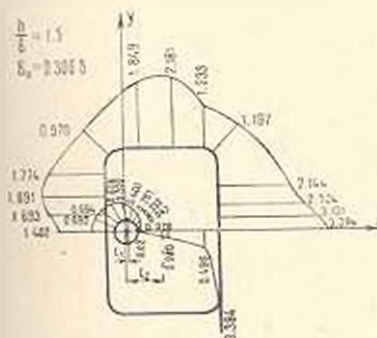
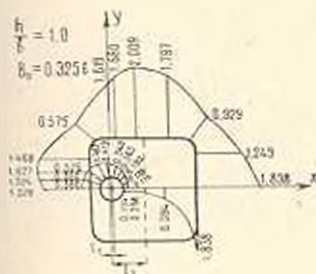
Таблица 3

$h \cdot b$	K_{eff}
1.0	0.904166
1.5	2.537221
2.0	4.166546
2.5	5.788586
3.0	7.318624

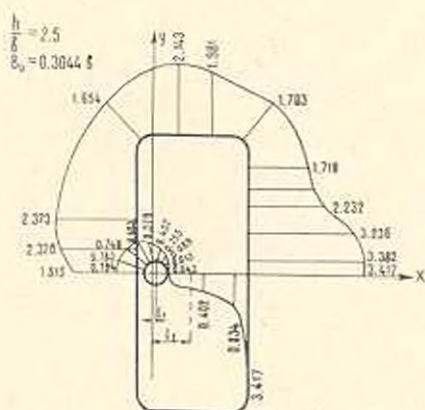
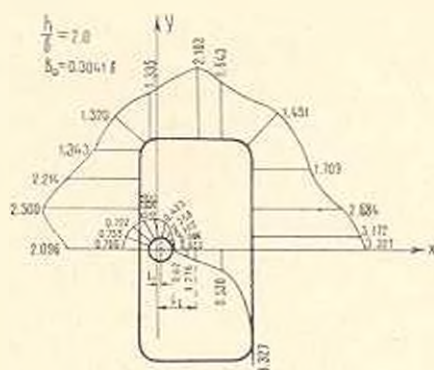
Таблица 3

$h\ b$	l/B_0	$\Delta\%$
1.0	0.9209	0.55
1.5	1.0323	0.82
2.0	1.0576	4.08
2.5	1.0611	2.28
3.0	1.0623	4.86

Принимая сторону прямоугольника, параллельную оси x , за b , можно вычислить значения коэффициента B_0 для прямоугольников с разными соотношениями сторон. Результаты вычислений показаны на фиг. 2, 3 и 4.

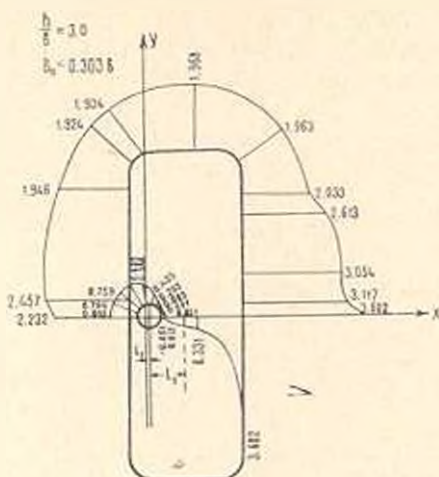


Фиг. 2.



Фиг. 3.

Величины эксцентриситетов $l = l_2 - l_1$ кругового стержня от оси рассматриваемого бруса для прямоугольников с разными отношениями сторон приведены в табл. 4.



S. R. SAROJAN

TORSION OF THE RECTANGULAR BAR, REINFORCED BY
A NON-AXIAL CIRCULAR PIVOT

S u m m a r y

In the present paper the torsion problem of a rectangular bar, reinforced by a non-axial circular pivot, is considered.

The problem is solved by the conform mapping method, where results of O. M. Sapondjian and S. S. Zargarian are used.

Numerical examples are considered for different relations of the sides of the cross section, where values of shear stresses on the boundaries of both materials and on the line of symmetry of the cross section are calculated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амензаде Ю. А. Кручение призматического бруса с квадратным сечением, армированного круговым стержнем. Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-тех. и хим. наук, № 2, 1958, 35—53.
2. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеориздат, М.-Л., 1952.
3. Сапонджян О. М. К разложению в ряд отображающей функции Кристоффеля-Шварца. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. IX, № 9, 1956.
4. Заргарян С. С. Кручение призматических стержней полигонального поперечного сечения с произвольно расположенной круговой цилиндрической полостью. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, 2, 1964.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изв. АН СССР, 1954.