

Р. Е. МКРТЧЯН

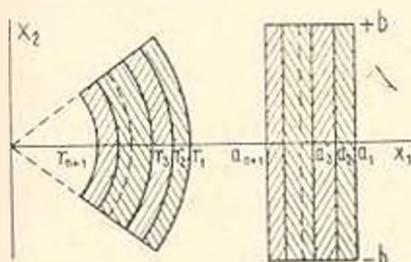
## ЗАДАЧА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ИЗГИБА СОСТАВНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ИЗ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

Задача больших упругих деформаций для цилиндрического изгиба однородного изотропного и несжимаемого параллелепипеда с помощью функции энергии деформации общего вида исследована в работе Ривлина [1, 2]. В работе [3] эта же задача была решена для случая, когда функция энергии деформации материала определяется выражением Мулей-Ривлина.

В настоящей работе эта задача рассматривается для параллелепипеда, составленного из нескольких параллелепипедов из различных упругих изотропных и несжимаемых материалов.

1. Пусть границы и поверхности контакта недеформированного параллелепипеда, составленного из различных однородных, изотропных, несжимаемых и упругих материалов, в системе прямоугольных декартовых координат  $(x_1, x_2, x_3)$  определяются плоскостями (фиг. 1)

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1, & x_2 &= a_2, \dots, & x_3 &= a_{n-1} \\ x_2 &= \pm b, & x_3 &= \pm c \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

Пусть параллелепипед деформируется симметрично относительно оси  $x_1$ , так что

- 1) каждая плоскость, первоначально нормальная к оси  $x_1$ , становится в деформированном состоянии частью цилиндра с осью  $x_2$ ;
- 2) плоскости, первоначально нормальные к оси  $x_2$ , в деформированном состоянии параллелепипеда проходят через ось  $x_3$ ;
- 3) в направлении оси  $x_1$  происходит равномерное растяжение с коэффициентом растяжения  $\lambda$ .

Для определения деформированного состояния тела выберем систему цилиндрических полярных координат  $(r, \theta, y_1)$ .

Используя условия несжимаемости, получаем соотношения [2]

$$x_1 = \frac{1}{2} Ar^2 + B, \quad x_2 = \frac{\lambda \theta}{A}, \quad x_3 = \frac{y_3}{i} \quad (1.2)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные.

Обозначая через  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  радиусы граничных цилиндрических поверхностей деформированного составного параллелепипеда, на основании (1.2) для  $A$  и  $B$  будем иметь выражения

$$A = \frac{2(a_1 - a_{k+1})}{r_1^2 - r_{k+1}^2} = \frac{2(a_1 - x_1)}{r_1^2 - r^2} = \frac{2(x_1 - a_{n+1})}{r^2 - r_{n+1}^2} \quad (1.3)$$

$$B = \frac{a_{k+1}r_1^2 - a_1r_{k+1}^2}{r_1^2 - r_{k+1}^2} = \frac{x_1r_1^2 - a_1r^2}{r_1^2 - r^2} = \frac{a_{n+1}r^2 - x_1r_{n+1}^2}{r^2 - r_{n+1}^2}$$

Контрвариантные компоненты тензора напряжения будут [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{(k)}^{11} &= L_{(k)}(r) + H_k \\ r^2 \sigma_{(k)}^{22} &= \sigma_{(k)}^{11} + \left( \frac{A^2 r^2}{i^2} - \frac{1}{A^2 r^2} \right) (\Phi_{(k)} + i^2 \Psi_{(k)}) = \sigma_{(k)}^{11} + r \frac{dW_{(k)}}{dr} \\ \sigma_{(k)}^{33} &= \sigma_{(k)}^{11} + \left( i^2 - \frac{1}{A^2 r^2} \right) \left( \Phi_{(k)} + \frac{A^2 r^2}{i^2} \Psi_{(k)} \right) \\ \sigma_{(k)}^{23} &= \sigma_{(k)}^{31} = \sigma_{(k)}^{12} = 0 \\ r_k &\geq r \geq r_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $H_k$  — постоянные,

$$L_{(k)}(r) = \int_{r_k}^r \left( \frac{A^2 r}{i^2} - \frac{1}{A^2 r^3} \right) (\Phi_{(k)} - i^2 \Psi_{(k)}) dr = W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) \quad (1.5)$$

$$\Phi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1}, \quad \Psi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2} \quad (1.6)$$

$W_{(k)}$  — функция энергии деформации;  $I_1$  и  $I_2$  — первый и второй инварианты деформации, определяемые уравнениями

$$I_1 = \frac{1}{A^2 r^2} + \frac{A^2 r^2}{i^2} + i^2, \quad I_2 = A^2 r^2 + \frac{i^2}{A^2 r^2} + \frac{1}{i^2} \quad (1.7)$$

На основании (1.4) для  $\sigma_{(k)}^{11}$  на граничных цилиндрических поверхностях деформированного тела имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)}^{11}|_{r=r_1} &= H_1 & \sigma_{(1)}^{11}|_{r=r_1} &= L_{(1)}(r_1) + H_1 \\ \sigma_{(2)}^{11}|_{r=r_2} &= H_2 & \sigma_{(2)}^{11}|_{r=r_2} &= L_{(2)}(r_2) + H_2 \\ & \dots & & \dots \\ \sigma_{(n)}^{11}|_{r=r_n} &= H_n & \sigma_{(n)}^{11}|_{r=r_{n+1}} &= L_{(n)}(r_{n+1}) + H_n \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из условия сцепления

$$\gamma_{(k)}^{11}|_{r=r_{k+1}} = \gamma_{(k+1)}^{11}|_{r=r_{k+1}} \quad (1.9)$$

и (1.8) следует

$$\begin{aligned} H_k &= \gamma_{(k)}^{11}|_{r=r_k} = R_1 \\ H_{k+1} &= H_k + L_{(k)}(r_{k+1}) = H_k + W_{(k)}(r_{k+1}) - W_{(k)}(r_k) \\ \gamma_{(n)}^{11}|_{r=r_{n+1}} &= R_2 = H_n + L_{(n)}(r_{n+1}) = H_n + W_{(n)}(r_{n+1}) - W_{(n)}(r_n) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — нормальные напряжения на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях деформированного тела.

На основании (1.10) и (1.5) получаем соотношение

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^n L_{(k)}(r_{k+1}) = 0 \quad (1.11)$$

или

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^n [W_{(k)}(r_{k+1}) - W_{(k)}(r_k)] = 0 \quad (1.12)$$

На каждой из граней  $\theta = \pm \theta_0$  действует результирующая нормальная сила

$$F = 2ic \sum_{k=1}^n \int_{r_{k-1}}^{r_k} r^2 \gamma_{(k)}^{22} dr \quad (1.13)$$

Так как согласно (1.4) и (1.5)

$$\begin{aligned} r^2 \gamma_{(k)}^{22} &= W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) + H_k + r \frac{dW_{(k)}(r)}{dr} = \\ &= \frac{d}{dr} r [W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) + H_k] = \frac{d}{dr} r [L_{(k)}(r) + H_k] = \frac{d}{dr} (r \gamma_{(k)}^{11}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

выражение (1.13), если принять во внимание условия сцепления (1.9), приводится к виду

$$F = 2ic \sum_{k=1}^n [r \gamma_{(k)}^{11}]_{r_{k-1}}^{r_k} = 2ic (r_1 R_1 - r_{n+1} R_2) \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что если внешняя и внутренняя цилиндрические поверхности свободны от напряжений, или  $r_1 R_1 = r_{n+1} R_2$ , то  $F = 0$ .

Результирующий момент, действующий на каждую из граней  $\theta = \pm \theta_0$ , равен

$$\begin{aligned}
 M &= 2\lambda c \sum_{k=1}^n \int_{r_{k-1}}^{r_k} r^{-\frac{22}{(k)}} dr = 2\lambda c \sum_{k=1}^n \int_{r_{k-1}}^{r_k} r \frac{d}{dr} (r^{-\frac{11}{(k)}}) dr = \\
 &= 2\lambda c (r_1^2 R_1 - r_{n+1}^2 R_n) + 2\lambda c \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{r_{k+1}} r^{-\frac{11}{(k)}} dr
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Если  $R_1 = R_n = 0$  или  $r_1^2 R_1 = r_{n+1}^2 R_n$ , то

$$M = 2\lambda c \sum_{k=1}^n \int_{r_k}^{r_{k+1}} r^{-\frac{11}{(k)}} dr \quad (1.17)$$

Результирующая сила, действующая на поверхностях  $y_1 = \pm \tau c$ , будет

$$N = 2\lambda c \sum_{k=1}^n \int_{r_{k-1}}^{r_k} r^{-\frac{33}{(k)}} dr \quad (1.18)$$

Для полного решения задачи необходимы конкретные граничные условия, например:

а) заданы радиусы  $r_1$  и  $r_{n+1}$  (или один из них и  $b_0$ ), коэффициент растяжения  $\lambda$  и напряжение  $R_1$  (или  $R_n$ ).

Тогда для определения деформированного состояния из (1.2) и (1.3) получаем

$$r = \sqrt{\frac{x_1 r_1^2 - x_1 r_{k+1}^2 - a_{k+1} r_1^2 + a_1 r_{k+1}^2}{a_1 - a_{k+1}}} \quad (1.19)$$

$$b = \frac{2x_1 (a_1 - a_{k+1})}{\lambda (r_1^2 - r_{k+1}^2)} \quad (1.20)$$

Постоянные  $H_k$  и другое нормальное напряжение  $R_k$  (или  $R_1$ ) определяются из (1.10). Напряженное состояние определяется уравнениями (1.4), (1.15), (1.16) и (1.18);

б) заданы нормальные напряжения  $R_1$  и  $R_n$ , коэффициент растяжения  $\lambda$  и  $b_0$ .

Тогда можно с помощью (1.19) и (1.20) все радиусы  $r_k$  выразить, например, через  $r_1$ , после чего легко найти остальные радиусы и напряженное состояние;

в) заданы нормальные напряжения  $R_1$  и  $R_2$ , коэффициент растяжения  $\lambda$  и один из радиусов  $r_k$ , например,  $r_1$ .

В этом случае можно с помощью (1.20) все остальные радиусы выразить через  $b_0$  и решить уравнение (1.12) относительно  $b_0$ ;

г) заданы нормальные напряжения  $R_1$  и  $R_n$ , результирующий момент  $M$  и  $\lambda$ .

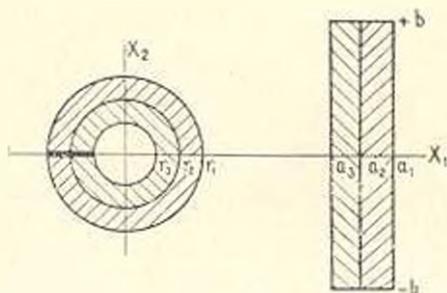
Тогда для определения деформированного состояния можно с помощью (1.20) все радиусы выразить через  $r_1$  и  $\theta_0$ , а потом, подставляя в (1.16) и (1.12), получить в общем случае два трансцендентных уравнения для определения  $r_1$  и  $\theta_0$ . Напряженное состояние определяется соотношениями (1.4), (1.15), (1.16) и (1.18).

2. Рассмотрим следующий численный пример. Пусть параллелепипед, составленный из двух упругих материалов, для которых функции энергии деформации имеют выражения

$$\begin{aligned} W_{(1)} &= (I_1 - 3) + 0.14 (I_2 - 3) \\ W_{(2)} &= 2 (I_1 - 3) + 0.28 (I_2 - 3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

в системе прямоугольных декартовых координат  $(x_1, x_2, x_3)$  недеформированного состояния определяется плоскостями (фиг. 2)

$$\begin{aligned} x_1 = a_1 = 25 \text{ см}, \quad x_1 = a_2 = 22 \text{ см}, \quad x_3 = a_3 = 20 \text{ см} \\ x_2 = \pm b = \pm 10, \quad x_3 = \pm c = \pm 10 \text{ см} \end{aligned} \quad (2.2)$$



Фиг. 2.

Пусть параллелепипед изгибается в круглую цилиндрическую трубу, внешние цилиндрические поверхности которой свободны от напряжений, причем по направлению  $x_3$  эта труба не растягивается.

$$R_1 = R_2 = 0, \quad \lambda = 1, \quad \theta_0 = \pi \quad (2.3)$$

Из (1.20) получаем

$$\theta_0 = \frac{2b(a_1 - a_2)}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{2b(a_1 - a_3)}{r_1^2 - r_3^2} \quad (2.4)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} r_3^2 &= r_1^2 - 19.09855 \\ r_2^2 &= r_1^2 - 31.83091 \end{aligned} \quad (2.5)$$

На основании (1.7)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{A^2 r^2} + A^2 r^2 + 1 \quad (2.6)$$

где  $A$  определяется из (1.2),

$$A = \frac{16}{b} = 0.1 \pi \quad (2.7)$$

Функции энергии деформации первого и второго слоев упрощаются

$$W_{(1)}(r) = 1.14 (I_1 - 3) = 11.55056 \frac{1}{r^2} + 0.11251 r^2 - 2.28 \quad (2.8)$$

$$W_{(2)}(r) = 2.28 (I_1 - 3) = 23.10112 \frac{1}{r^2} - 0.22502 r^2 - 4.56$$

Из (1.12) находим

$$W_{(1)}(r_2) - W_{(1)}(r_1) + W_{(2)}(r_2) - W_{(2)}(r_1) = 0 \quad (2.9)$$

Подставляя (2.8) и (2.5) в (2.9), после простых преобразований получаем

$$r_1^6 - 50.9295 r_1^4 + 505.2654 r_1^2 - 1400.4540 = 0 \quad (2.10)$$

Отсюда

$$r_1 = 5.9715 \text{ см}, \quad r_2 = 4.0694 \text{ см}, \quad r_3 = 1.9564 \text{ см}$$

$W_{(1)}(r_1) = 2.056$ ,  $W_{(1)}(r_2) = 0.281$ ,  $W_{(2)}(r_2) = 0.561$ ,  $W_{(2)}(r_3) = 2.337$   
На основании (1.10) получаем

$$H_1 = R_1 = 0, \quad H_2 = W_{(1)}(r_2) - W_{(1)}(r_1) = -1.775$$

Компоненты контрвариантного тензора напряжений будут

$$\sigma_{(1)}^{11} = 11.55056 \frac{1}{r^2} + 0.1125 r^2 - 4.336$$

$$r^{2-22} \sigma_{(1)}^{22} = -11.55056 \frac{1}{r^2} + 0.3375 r^2 - 4.336$$

$$\sigma_{(1)}^{33} = 5.18438 \frac{1}{r^2} + 0.2005 r^2 - 2.616$$

$$\sigma_{(2)}^{11} = 23.10112 \frac{1}{r^2} - 0.2250 r^2 - 6.896$$

$$r^{2-22} \sigma_{(2)}^{22} = -23.10112 \frac{1}{r^2} + 0.6750 r^2 - 6.896$$

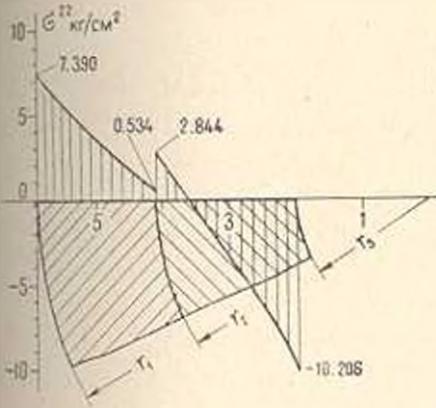
$$\sigma_{(2)}^{33} = 10.36876 \frac{1}{r^2} + 0.4010 r^2 - 3.456$$

На фиг. 3 показан график распределения нормальных нагрузок  $\sigma^{22} = r^{2-22} \sigma_{(1)}^{22}$ , действующих на каждую из плоскостей  $\theta = \pm \pi$ . Результирующий момент этих нагрузок определяется из (1.17)

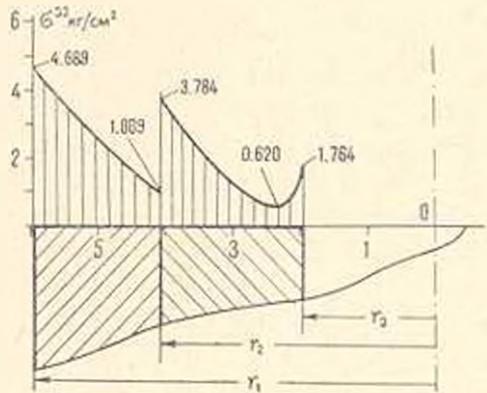
$$M = 4.26 \text{ кНм}$$

График распределения нормальных нагрузок на торцевых плоскостях  $y_3 = \pm 10$  см изображен на фиг. 4. Результирующая сила этих нагрузок определяется из (1.18)

$$N = 254.14 \text{ кг}$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за руководство работой и ценные советы.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 25 IV 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՅԱՆ

ԱՆՈՒՂՄԵԼԻ ՆՅՈՒԹԵՐԻՅ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱՆ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ՉՈՒԳԱՆՈՒՆԵՒՄՍԻ ՄՈՒՄԱՆ ՃԱՄԱՐ ՄԵՆ ԱՌԱՋՊԱՆԱՆ ԳԵՃՈՐՄԱՅԻԱՆՆԵՐԻ ԵՆԳԻՐԸ

Ա մ փ ո ւ ռ ի մ

Ներկա աշխատանքում մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության հիման վրա դիտարկվում է անսեղմելի նյութերից պատրաստված բաղաձառյալ գազանոսանիստի շրջանային ծաման խնդիրը. հրր դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան ունի բնդհանուր տեսք:

Մասնավորապես, թվային օրինակի տեսքով, ստամնաօրբում է՝ Մու-նի-Ռիվլինի նյութերից պատրաստված, հրկչիրա ուղղանկյուն զուգանոսանիստի ծաման խնդիրը: Ընդանվում է, սր գուգանոսանիստը ծամում է մինչև հրր զլանային խողովակ դառնալը, որի արտաքին զլանային մակերևույթները ապստ են լարումներից:

Աշխատանքում օգտագործվում է համասեռ գուգանոսանիստի ծաման համար Ռիվլինի կրգմից արված բաժուսները [1, 2]:

R. E. MKRTCHIAN

THE PROBLEM OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR  
FLEXURE OF A COMPOSITE INCOMPRESSIBLE CUBOID

## S u m m a r y

The solution of the problem of large elastic deformations for flexure of a composite incompressible cuboid is considered, when the strain-energy function has a general form.

In particular, the numerical solution of the problem of flexure of a cuboid composed of two layers of Mooney-Rivlin's materials, when the cuboid after deformation becomes a cylindrical tube, is considered in detail.

R. S. Rivlin's solutions [1, 2] for a homogeneous cuboid are used.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Rivlin R. S. Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VI. Further Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure. Philos. Trans. Roy. Soc., A, 242, 1949, 173-195.*
2. *Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.*
3. *Rivlin R. S. Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, V. The Problem of Flexure. Proc. Roy. Soc., A, 195, 1949, 463.*