ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАДАЧИ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РАСТЯЖЕНИЯ, РАЗДУВАНИЯ И СДВИГА ВРАЩАЮЩИХСЯ СОСТАВНЫХ ТРУБ

В работах [1, 2] с помощью функции энергии деформации общего вида решается задача больших упругих деформаций для растяжения, раздувания и сдвига однородной цилиндрической трубы из изотропного и несжимаемого материала. Решение задачи вращения однородного круглого цилиндра из несжимаемого материала приводится в работах [2, 3]. Задача растяжения, раздувания и кручения составных труб из несжимаемых материалов рассматривается в работе [4].

В настоящей работе рассматриваются задачи одновременного растяжения, раздувания и сдвига вращающейся вокруг своей оси трубы, составленной из нескольких цилиндрических труб из различных несжимаемых материалов, и некоторые частные случаи.

1. Пусть круглая цилиндрическая труба, состоящая из n однородных, изотропных и несжимаемых слоев, в недеформированном состоянии имеет радиусы поперечного сечения $a_1 > a_2 > \cdots > a_{n+1}$ и длину l.

Трубы испытывают одновременно следующие деформации:

а) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения λ_3;

б) однородное раздувание, при котором линейные элементы, параллельные оси трубы, не меняются, а радиусы $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ становятся $r_1 = \lambda_1 a_1$, $r_2 = \lambda_2 a_2, \ldots, r_{n+1} = \lambda_{n+1} a_{n+1}$;

в) простой сдвиг вокруг оси трубы, при котором радиус каждой точки k-го слоя составной трубы ($k = 1, 2, \ldots, n$) вокруг ее оси получает угловое перемещение $\psi_{(k)}$, зависящее только от радиального расстояния точки;

г) простой сдвиг, при котором каждая точка k-го слоя перемещается параллельно оси трубы на расстояние $\lambda_{(k)}$, зависящее только от радиального расстояния точки.

Кроме того, труба вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Тогда в деформированном состоянии каждая точка составной трубы, имеющая радиус r, находится под действием массовой силы $r\omega^2$, которая имеет радиальное направление.

Для определения деформированного тела в качестве подвижной системы координат [2] выберем цилиндрические полярные координаты (r, θ, z) так, чтобы координата z совпадала с осью трубы. Тогда точка (r, θ, z) в недеформированном состоянии имеет координаты $r' = Qr$, $\theta = \gamma_{(k)r}\frac{z - z_{(k)}}{\lambda}$, где Q определяется из условия несжимаемости

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{a_1^2 - \lambda^2(\gamma_1^2 a_1^2 - r^2)} = \frac{1}{r}\sqrt{a_{n+1}^2 + \lambda^2(r^2 - \gamma_{n+1}^2 a_{n+1}^2)} \qquad (1.1)$$

Компоненты контравариантного тензора напряжений определяются выражениями [2]

$$\sigma_{(k)}^{ij} = \Phi_{(k)} g_{(k)}^{ij} + \Psi_{(k)} B_{(k)}^{ij} + p_{(k)} G^{ij} \qquad (1.2)$$

где $g_{(k)}^{ij}$ и G^{ij} — компоненты контравариантных метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний соответственно; $p_{(k)}$ — скалярная инвариантная функция от координат;

$$\Phi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1^{(k)}}, \qquad \Psi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2^{(k)}} \qquad (1.3)$$

$W_{(k)}$ — функция энергии деформации k-го слоя; $I_1^{(k)}$ и $I_2^{(k)}$ — первый и второй инварианты деформации;

$$B_{(k)}^{ij} = I_1 g_{(k)}^{ij} - g_{(k)}^{im} g_{(k)}^{jn} G_{mn} \qquad (1.4)$$

Подставляя в (1.2) компоненты метрических тензоров и тензора $B_{(k)}^{ij}$, которые определяются известными методами [2], получим

$$\sigma_{(k)}^{11} = \frac{Q^2}{\lambda^2}\Phi_{(k)} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2\right)\Psi_{(k)} + p_{(k)}$$

$$r^2\sigma_{(k)}^{22} = \sigma_{(k)}^{11} + \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{Q^2 r^2 \gamma_{(k)r}^2}{\lambda^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi_{(k)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} + Q^2 r^2 \gamma_{(k)r}^2 + \frac{\gamma_{(k)r}^2}{\lambda^2} - Q^2\right)\Psi_{(k)}$$

$$\sigma_{(k)}^{33} = \sigma_{(k)}^{11} + \left(\lambda^2 + \frac{Q^2 r_{(k)r}^2}{\lambda^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi_{(k)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} + Q^2 r^2 \gamma_{(k)r}^2 + \frac{\gamma_{(k)r}^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)} \qquad (1.5)$$

$$\sigma_{(k)}^{12} = \frac{Q^2 \gamma_{(k)r}}{\lambda^2}\Phi_{(k)} + Q^2 \gamma_{(k)r}\Psi_{(k)}$$

$$\sigma_{(k)}^{31} = \frac{Q^2 \gamma_{(k)r}}{\lambda^2}\Phi_{(k)} + \frac{\gamma_{(k)r}}{\lambda^2}\Psi_{(k)}$$

$$\sigma_{(k)}^{23} = \frac{Q^2 \gamma_{(k)r}\gamma_{(k)r}}{\lambda^2}\Phi_{(k)}$$

где

$$\gamma_{(k)r} = \frac{d\gamma_{(k)}}{dr}, \qquad \chi_{(k)r} = \frac{d\chi_{(k)}}{dr}$$

$p_{(k)}$ по условию симметрии зависит только от r.

Уравнения равновесия [2]

$$\tau^{ij}_{(k)}|_i - \rho_{(k)} F^j_{(k)} = 0 \tag{1.6}$$

где $F^j_{(k)}$ — контравариантные компоненты вектора объемной силы k-го слоя ($F^1_{(k)}$, $F^2_{(k)}$, $F^3_{(k)} = r\omega^2$, 0, 0), ρ_k — плотность k-го слоя, а линия обозначает ковариантное дифференцирование по выбранным координатам деформированного тела, в нашем случае приводятся к виду

$$\begin{gathered}
\frac{d\tau^{11}_{(k)}}{dr} + \frac{\tau^{11}_{(k)} - r^2\tau^{22}_{(k)}}{r} + \rho_k r\omega^2 = 0 \\
\frac{d\tau^{12}_{(k)}}{dr} + \frac{3\tau^{12}_{(k)}}{r} = 0 \\
\frac{d\tau^{31}_{(k)}}{dr} + \frac{\tau^{31}_{(k)}}{r} = 0
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Из последних двух уравнений имеем

$$r^3\tau^{12}_{(k)} = \frac{2B_k}{\lambda^2}, \qquad r^2\tau^{13}_{(k)} = \frac{2D_k}{\lambda^2} \tag{1.8}$$

где B_k и D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) — постоянные.

Условия сцепления выражаются равенствами

$$\tau^{ij}_{(k)}|_{r=r_{k-1}} = \tau^{ij}_{(k+1)}|_{r=r_{k-1}} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) следует

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_2 = \cdots = B_n = B \\
D_1 &= D_2 = \cdots = D_n = D
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.5), (1.8) и (1.10) получаем

$$\gamma_{(k)r} = \frac{2B}{r^3 Q^2 (\Phi_{(k)} + \lambda^2 \Psi_{(k)})}, \qquad \chi_{(k)r} = \frac{2D}{r(Q^2\Phi_{(k)} - \Psi_{(k)})} \tag{1.11}$$

После интегрирования этих дифференциальных уравнений определяются функции $\gamma_{(k)}$ и $\chi_{(k)}$.

Постоянные интегрирования определяются из соответствующих граничных условий. Например, если $W_{(k)}$ определяется выражением Муней-Ривлина

$$W_{(k)} = C_1^{(k)}(I_1 - 3) + C_2^{(k)}(I_2 - 3) \tag{1.12}$$

то из (1.11) получаются уравнения

$$\tau_{(k)} = -BE_{(k)}(r) + B_k, \qquad \gamma_{(k)} = DF_{(k)}(r) + D_k \tag{1.13}$$

где B_k и D_k — постоянные,

$$E_{(k)}(r) = \frac{\ln \dfrac{Q}{Q_{k+1}}}{K(C_1^{(k)} + \lambda^2 C_2^{(k)})}, \qquad F_{(k)}(r) = \frac{\ln \dfrac{(C_1^{(k)}Q^2 + C_2^{(k)})\, r^2}{(C_1^{(k)}Q_{k-1}^2 + C_2^{(k)})r_{k-1}^2}}{2(\lambda^2 C_1^{(k)} + C_2^{(k)})} \tag{1.14}$$

$$K = \frac{\tau_1}{\varphi_1}(1 - \lambda\mu_1^2) = \frac{\tau_{n+1}}{\varphi_{n+1}}(1 - \lambda\mu_{n+1}^2)$$

Из (1.13) и (1.14) следует

$$E_{(k)}(r_{k-1}) = F_{(k)}(r_{k-1}) = 0 \tag{1.15}$$

$$\tau_{(k)}\big|_{r=r_{k-1}} = \tau_{k-1} - B_k \tag{1.16}$$

$$\tau_{(k)}\big|_{r=r_k} = \tau_k = -BE_{(k)}(r_k) + \tau_{k-1} \tag{1.17}$$

$$\gamma_{(k)}\big|_{r=r_{k-1}} = \gamma_{k-1} = D_k \tag{1.18}$$

$$\gamma_{(k)}\big|_{r=r_k} = \gamma_k = DF_{(k)}(r_k) + \gamma_{k-1} \tag{1.19}$$

Если $\varphi_1 = 0$, $\tau_{n+1} = \tau_0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_{n+1} = \gamma_0$, то величины φ_i, B, γ_i и D ($i = 2, 3, \ldots, n$) при помощи формул (1.17) и (1.19) выражаются через τ_0 и γ_0

$$\tau_i = B\sum_{k=1}^{i} E_{(k)}(r_k), \qquad B = \frac{\tau_0}{\sum_{k=1}^{n} E_{(k)}(r_k)} \tag{1.20}$$

$$\gamma_i = -D\sum_{k=1}^{i} F_{(k)}(r_k), \qquad D = \frac{-\gamma_0}{\sum_{k=1}^{n} F_{(k)}(r_k)} \tag{1.21}$$

Из первого уравнения (1.7) и (1.5) получаем

$$\tau_{(k)} = L_{(k)}(r) - \frac{1}{2}\varphi_k r^2\omega^2 + B_k \tag{1.22}$$

где B_k — постоянные

$$L_{(k)}(r) = \int_{r_k}^{r}\left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2 r^2 \varphi_{(k)}^2}{\lambda^2}\right)\Phi_{(k)} + \right.$$

$$\left. + \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 r^2 \varphi_{(k)} - \frac{\gamma_{(k)}^2}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)}\right]\frac{dr}{r} \tag{1.23}$$

Так как $L_{(k)}(r_k) = 0$, то из (1.9) и (1.22) имеем

$$L_{(k)}(r_{k+1}) = -\frac{1}{2}\rho_k r_{k+1}^2\omega^2 + B_k = -\frac{1}{2}\rho_{k+1} r_{k+1}^2\omega^2 + B_{k+1} \qquad (1.24)$$

Если R_1 и R_2 — нормальные напряжения на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях составной трубы, то для определения постоянных B_k из (1.22) и (1.24) получаем

$$B_1 = R_2 + \frac{1}{2}\rho_1 r_1^2\omega^2$$

$$B_{k+1} = B_k + L_{(k)}(r_{k-1}) + \frac{1}{2} r_{k-1}^2\omega^2(\rho_{k+1} - \rho_k) \qquad (1.25)$$

$$L_{(n)}(r_{n-1}) = -\frac{1}{2}\rho_n r_{n+1}^2\omega^2 + B_n = R_n$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Из этих уравнений находим следующее соотношение между R_1 и R_n:

$$R_1 - R_n + \sum_{k=1}^{n} L_{(k)}(r_{k-1}) + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{k=1}^{n} \rho_k (r_k^2 - r_{k-1}^2) = 0 \qquad (1.26)$$

На торцевых поверхностях деформированной составной трубы должны быть приложены следующие поверхностные напряжения [2]:

$$P_{(k)}^1 = -\frac{\gamma_{(k)r}\tau_{(k)}^{11} + \tau_{(k)}^{13}}{\sqrt{1+\gamma_{(k)r}^2}}$$

$$P_{(k)}^2 = -\frac{\gamma_{(k)r}\tau_{(k)}^{12} + \tau_{(k)}^{23}}{\sqrt{1+\gamma_{(k)r}^2}} \qquad (1.27)$$

$$P_{(k)}^3 = -\frac{\gamma_{(k)r}\tau_{(k)}^{13} + \tau_{(k)}^{33}}{\sqrt{1+\gamma_{(k)r}^2}}$$

где $P_{(k)}^i$ — компоненты вектора поверхностного напряжения.

Аксиальный момент M и продольная сила N на единицу длины деформированной трубы, действующие на внешнюю и внутреннюю цилиндрические поверхности составной трубы, определяются формулами

$$M = 2\pi r_1^2 \tau_{(k)r}^{12} \qquad (1.28)$$

$$N = 2\pi r_1 \tau_{(k)r}^{13} \qquad (1.29)$$

Если составная труба испытывает только деформации сдвига, то есть $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n+1} = 1$, $\lambda = 1$, $K = 0$, то из (1.11) будем иметь

$$\varphi_{(k)r} = \frac{B}{(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r^2}, \qquad \chi_{(k)r} = \frac{D}{(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r} \tag{1.30}$$

откуда

$$\varphi_{(k)} = -\frac{B}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r^2} + B_k \tag{1.31}$$

$$\chi_{(k)} = \frac{D \ln \frac{r}{r_{k+1}}}{C_1^{(k)} - C_2^{(k)}} + D_k \tag{1.32}$$

Отсюда следует, что постоянные D_k определяются из (1.18), а для B_k получаются уравнения

$$B_k = \varphi_k + \frac{B}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r_k^2} = \varphi_{k+1} - \frac{B}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r_{k+1}^2} \tag{1.33}$$

Подставляя эти значения в (1.31), получаем

$$\varphi_{(k)} = \frac{B(r^2 - r_{k+1}^2)}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r^2 r_{k+1}^2} + \varphi_{k+1} \tag{1.34}$$

Остальные уравнения остаются в силе, если вместо E_{k+1} и $F_{(k)}$ подставить

$$E_{(k)} = \frac{r_{k+1}^2 - r^2}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r^2 r_{k+1}^2}, \qquad F_{(k)} = \frac{\ln \frac{r}{r_{k+1}}}{C_1^{(k)} + C_2^{(k)}} \tag{1.35}$$

Принимая $n = 1$, получим соответствующие уравнения для однородной трубы.

2. В качестве частного случая рассмотрим задачу одновременного растяжения (с коэффициентом растяжения λ) и вращения вокруг своей оси (с угловой скоростью ω) круглого многослойного цилиндра. При этом $\varphi_{(k)} = \chi_{(k)} = 0$.

Из условия несжимаемости вытекает

$$Q = \frac{r^2}{r} = \lambda^{-1} = \text{const} \tag{2.1}$$

Поскольку $\Phi_{(k)}$ и $\Psi_{(k)}$ — функции только от инвариантов I_1 и I_2, которые в данном случае [2] постоянны

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} = \text{const}, \quad I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} = \text{const} \tag{2.2}$$

Φ_k и Ψ_k будут тоже постоянными.

Исходя из (1.5), (1.7) и (2.1), получаем

$$\frac{d\sigma_{(k)}^{(1)}}{dr} = \rho_k \omega^2 r \tag{2.3}$$

откуда

$$\sigma^{11}_{(k)} = r^2\sigma^{22}_{(k)} = H_k - \frac{1}{2}\rho_k r^2\omega^2$$

$$\sigma^{33}_{(k)} = \sigma^{11}_{(k)} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)} \tag{2.4}$$

где H_k — постоянные.

Пусть на внешней цилиндрической поверхности составного цилиндра действует нормальная равномерно распределенная нагрузка R. Тогда для определения H_1 имеем

$$H_1 = R + \frac{1}{2}\rho_k r^2\omega^2 \tag{2.5}$$

Из условия сцепления (1.9) получаем

$$H_{k+1} = H_k + \frac{1}{2} r^2_{k+1}\omega^2 (\rho_{k+1} - \rho_k) \tag{2.6}$$

Результирующей силой на торцевых плоскостях деформированной трубы будет

$$N = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \sigma^{33}_{(k)} r dr =$$

$$= 2\pi \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k+1}/\sqrt{\lambda}}^{a_k/\sqrt{\lambda}} \left[H_k - \frac{1}{2}\rho_k r^2\omega^2 + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)} \right] r dr =$$

$$= \frac{\pi}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \left[H_k + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)} \right] (a_k^2 - a_{k+1}^2) -$$

$$- \frac{\pi\omega^2}{4\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^4 - a_{k+1}^4) \tag{2.7}$$

Если $N = 0$, то для определения λ получаем следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[H_k + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)} \right] (a_k^2 - a_{k+1}^2) -$$

$$- \frac{\omega^2}{4\lambda} \sum_{k=1}^{n} (a_k^4 - a_{k+1}^4) = 0 \tag{2.8}$$

Если функции энергии деформации материалов определяются выражением (1.12), то (2.8) приводится к виду

$$\lambda^4 \sum_{k=1}^{n} C_1^{(k)} (a_k^1 - a_{k+1}^1) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} C_2^{(k)} (a_k^2 - a_{k+1}^2) + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{n} H_k (a_k^2 - a_{k+1}^2) -$$

$$- \rho \left| \frac{\omega^2}{8} \sum_{k=1}^{n} (a_k^4 - a_{k+1}^4) + \sum_{k=1}^{n} C_1^{(k)} (a_k^2 - a_{k+1}^2) \right| - \sum_{k=1}^{n} C_2^{(k)} (a_k^2 - a_{k+1}^2) = 0 \tag{2.9}$$

3. В качестве конкретной задачи рассмотрим вращение вокруг своей оси двухслойной трубы.

Пусть труба, состоящая из материалов Муней-Ривлина (1.12), при коэффициенте растяжения λ, вращается с угловой скоростью ω. При этом внешняя и внутренняя цилиндрические поверхности трубы свободны от нагрузок ($R_1 = R_2 = 0$), и в трубе деформации сдвига не происходят.

Из (1.13) получаем

$$L_{(1)}(r_2) + L_{(2)}(r_3) + \frac{1}{2} \omega^2 [\rho_1 (r_1^2 - r_2^2) + \rho_2 (r_2^2 - r_3^2)] = 0 \tag{3.1}$$

где

$$L_{(i)}(r) = 2 (C_1^{(i)} - \lambda^2 C_2^{(i)}) \int_{r_i}^{r} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^6} \right) \frac{dr}{r} \tag{3.2}$$

причем $r_i \geqslant r \geqslant r_{i+1}$.

Из условия несжимаемости имеем

$$r_2^2 = r_1^2 - \frac{1}{\lambda} (a_1^2 - a_2^2), \qquad r_3^2 = r_1^2 - \frac{1}{\lambda} (a_1^2 - a_3^2) \tag{3.3}$$

Подставляя значение Q из (1.1) в (3.2), находим

$$L_{(1)}(r_2) = \frac{C_1^{(1)} + \lambda^2 C_2^{(1)}}{\lambda} \left[\ln \frac{a_2^2 r_1^2}{a_1^2 r_2^2} + \frac{a_1^2 - \lambda r_1^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right]$$

$$L_{(2)}(r_3) = \frac{C_1^{(2)} + \lambda^2 C_2^{(2)}}{\lambda} \left[\ln \frac{a_3^2 r_2^2}{a_2^2 r_3^2} + \frac{a_2^2 - \lambda r_2^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right] \tag{3.4}$$

Из (3.1) и (3.4) в силу (3.3) можно найти r_1, после чего легко определить деформированное состояние. Напряженное состояние определяется соотношениями (1.5). Постоянные B_1 и B_2 находим из (1.25)

$$B_1 = \frac{1}{2} \rho_1 r_1^2 \omega^2$$

$$B_2 = B_1 + L_{(1)}(r_2) + \frac{1}{2} r_2^2 \omega^2 (\rho_2 - \rho_1) \tag{3.5}$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий численный пример.

Предположим, что для рассматриваемой трубы упругие постоянные выражения Муней-Ривлина и плотности соответствующих слоев имеют следующие значения: $C_1^{(1)} = 2$ *кг/см*^{2}, $C_2^{(1)} = 0.28$ *кг/см*^{2}, $C_1^{(2)} = 1$ *кг/см*^{2}, $C_2^{(2)} = 0.14$ *кг/см*^{2}, $\rho_1 = \dfrac{1.35}{981}\dfrac{\text{гр сек}^2}{\text{см}^4}$, $\rho_2 = \dfrac{1.2}{981}\dfrac{\text{гр сек}^2}{\text{см}^4}$.

Пусть рассматриваемая труба имеет размеры $a_1 = 20$ *см*, $a_2 = 15$ *см*, $a_3 = 10$ *см* и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 60$ *рад/сек*, при $i = 1$.

Из (3.1) с помощью (3.3) получаем

$$1.14 \ln \frac{0.14063\, r_1^2}{(r_1^2 - 175)(r_1^2 - 300)} +$$

$$+ (400 - r_1^2)\left(\frac{1}{r_1^2 - 175} - \frac{1}{r_1^2 - 300} - \frac{2}{r_1^2}\right) + 0.70871 = 0 \qquad (3.6)$$

Численное решение (3.6), имеющее физический смысл, дает

$$r = 21.1978\ \text{см}, \quad r_2 = 16.5635\ \text{см}, \quad r_3 = 12.2207$$

Из (3.4) и (3.5) определяем

$$L_{(1)}(r) = 2.28 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{112.509}{r^2} + 0.5155$$

$$L_{(2)}(r) = 1.14 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{56.254}{r^2} + 0.4314$$

$$B_1 = 1.1131, \quad B_2 = 0.6860$$

Компонентами контравариантного тензора напряжений будут

$$\tau_{(1)}^{11} = 2.28 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{112.509}{r^2} - 0.00248\, r^2 + 1.6286$$

$$r^2 \tau_{(1)}^{22} = \tau_{(1)}^{11} + \frac{4.56\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{225.018}{r^2} - 4.56 \qquad (3.7)$$

$$\tau_{(1)}^{33} = \tau_{(1)}^{11} + \frac{0.56\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{197.384}{r^2} - 0.56$$

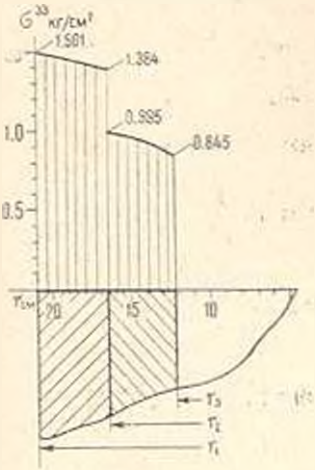
$$\tau_{(2)}^{11} = 1.14 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{56.254}{r^2} - 0.002202\, r^2 + 1.1174$$

$$r^2 \tau_{(2)}^{22} = \tau_{(2)}^{11} + \frac{2.28\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{112.505}{r^2} - 2.28 \qquad (3.8)$$

$$\tau_{(2)}^{33} = \tau_{(2)}^{11} + \frac{0.28\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{98.692}{r^2} - 0.28$$

На фиг. 1 показан график распределения нормальных нагрузок $s^{33} = \sigma^{33}$, действующих на торцевых плоскостях вращающейся трубы. Результирующая сила этих нагрузок будет

$$N = 1320.4 \text{ кг}$$



Фиг. 1.

4. В качестве численного примера задачи сдвига рассмотрим двухслойную трубу размерами $a_1 = 10$ см, $a_2 = 8$ см, $a_3 = 5$ см, составленную из материалов Муней-Ривлина $C_1^{(1)} = 1$ кг/см², $C_2^{(1)} = 0.14$ кг/см², $C_1^{(2)} = 2$ кг/см², $C_2^{(2)} = 0.28$ кг/см², которая испытывает деформации сдвига, так что $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, $\gamma_0 = \frac{\pi}{6}$, $Z_0 = 5$см, $R_1 = 0$.

Из (1.20) и (1.21), подставляя вместо $E_{(i)}$ и $F_{(i)}$ получаемые из (1.35) выражения

$$E'_{(1)} = \frac{64 - r^4}{145.92\, r^2}, \qquad E'_{(2)} = \frac{25 - r^2}{114.00\, r^2}$$
$$F'_{(1)} = \frac{\ln r - 2.0794}{1.14}, \qquad F'_{(2)} = \frac{\ln r - 1.6094}{2.28} \tag{4.1}$$

находим

$$B = -21.33\,\pi, \quad D = -12.44, \quad \gamma_3 = \frac{\pi}{19}, \quad \omega_3 = 2.4356 \text{ см}$$

На основании (1.13) и (1.23) имеем

$$\gamma_{(1)} = \left(\frac{9.3567}{r^2} - 0.0936\right)\pi, \qquad \gamma_{(2)} = \left(\frac{4.6783}{r^2} - 0.0205\right)\pi$$
$$Z_{(1)} = 25.126 - 10.912 \ln r \tag{4.2}$$
$$Z_{(2)} = 13.781 - 5.456 \ln r$$

$$L_{(1)}(r) = \frac{199.609\,\pi^2}{r^4} + \frac{16.673}{r^2} - 0.3637$$
$$L_{(2)}(r) = \frac{99.804\,\pi^2}{r^4} + \frac{8.336}{r^2} - 0.3707 \qquad (4.3)$$

Поскольку $R_1 = 0$, то из (1.25) и (4.3) получаем

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -0.3778, \quad R_2 = -1.9165$$

На основании (1.5), (1.28) и (1.29) имеем

$$\tau^{11}_{(1)} = 0.3637 - 1970.06\frac{1}{r^4} - 16.67\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{12}_{(1)} = -134.04\frac{1}{r^3}$$

$$r^2\tau^{22}_{(1)} = 0.3637 - 5910.17\frac{1}{r^4} + 16.67\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{31}_{(1)} = -24.88\frac{1}{r}$$

$$\tau^{33}_{(1)} = 0.3637 - 1002.35\frac{1}{r^4} - 254.86\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{23}_{(1)} = 641.50\frac{1}{r^3}$$

$$\tau^{11}_{(2)} = -0.0071 - 985.03\frac{1}{r^4} - 8.34\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{12}_{(2)} = -134.04\frac{1}{r^3} \qquad (4.4)$$

$$r^2\tau^{22}_{(2)} = -0.0071 + 2955.08\frac{1}{r^4} + 8.34\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{31}_{(2)} = -24.88\frac{1}{r}$$

$$\tau^{33}_{(2)} = -0.0071 + 501.17\frac{1}{r^4} + 127.43\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{23}_{(2)} = 641.50\frac{1}{r^4}$$

$$M = -8.422 \text{ кгм и } N = -156.33 \text{ кг}$$

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за руководство работой и ценные советы.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 25 IV 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԳՏՏՎՈՂ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԽՈՂՈՎԱԿԱՁԵՎԻ ՁԳՄԱՆ, ԸՆԴԼԱՅՆՄԱՆ ԵՎ ՍԱՀՔԻ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տարբեր անսեղմելի նյութերից պատրաստված և կոր գլանային խողովակներ ներկայացնող շերտերից կազմված, հաստատուն անկյունային արագությամբ իր առանցքի շուրջը պտտվող, խողովակի միատարր ձգման, ոլորման, ընդարձակման և սահքի (իր առանցքի ուղղությամբ և նրա շուրջը) մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության խըն-

դիրը: Համաձայն խոդոմակի համար նման խնդրի և կլոր գլանի իր առանցքի շուրջը պտտվող խնդրի լուծումներից ստացվում են դիտարկվող խնդրից որպես մասնավոր դեպքեր:

Որպես որոշակի խնդիր ուսումնասիրվում է երկշերտ խոդոմակի պտտման խնդիրը և լուծվում է թվային օրինակ: Թվային օրինակի տեսքով դիտարկվում է նաև Մունի—Ռիվլինի նյութերից պատրաստված երկշերտ խոդոմակի ոլորի խնդիրը:

R. E. MKRTCHIAN

LARGE ELASTIC DEFORMATION PROBLEM FOR EXTENSION, ENFLATION AND SHEAR OF ROTATING COMPOSITE TUBES

Summary

The solution of the problem of large elastic deformations for extension, enflation and shear (along and around the axis) of the rotating tube composed of incompressible materials is considered.

In particular the solutions of the rotation and simple shear problems for two layer cylindrical tube made of Mooney-Rivlin's material are considered in detail and a numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rivlin R. S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VI. Futher Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure. Phil. Trans. Roy. Soc., A, 242, 1949, 173–195.
2. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
3. *Green A. E.* and *Shield R. T.* Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies. Proc. Roy. Soc., A, 202, 1950, 407.
4. *Чобанян К. С., Мкртчян Р. Е.* Общие решения задач конечных упругих деформаций для растяжения, раздувания и кручения составных труб. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.