

В. А. МАНЬКОВСКИЙ, М. И. РОЗОВСКИЙ

К ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГО-
НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД

§ 1. При рабочих нагрузках, не превышающих $25 + 30\%$ от разрушающих, будем рассматривать конструкционный тканевый стеклопластик как упруго-наследственный квазиоднородный ортотропный континуум с усредненными по толщине „размазанными“ упругими и реологическими свойствами. Волнистость армирующего агента, обусловленная текстильной переработкой стекловолокон, и наличие в стекло-текстолите высокополимерного связующего предопределяет учет как сдвигового в плоскости армирования 12, так и линейного последствия указанного материала в направлениях основы 11, утка 22 и по толщине (направление 33). Слоистость, структурная немонолитность и гетерогенность стеклотекстолита приводят к существенным сдвиговым поделативностям и в плоскостях 13, 23, перпендикулярных к плоскости армирования, и, как следствие, к отказу от гипотезы недеформируемых нормалей в задачах изгиба. Таким образом, определение компонент тензоров напряженного и деформированного состояний для конструктивных элементов из указанных сред в общем случае сводится к решению трехмерных задач наследственной теории упругости анизотропного тела зачастую при менее „жестких“ рабочих предположениях, нежели классическая гипотеза Кирхгоффа-Лява*.

Ввиду сложности решения указанных задач в замкнутом виде, введем следующие предположения относительно работы материала во времени:

1. главные плоскости упругой симметрии среды 12, 13, 23 инвариантны по отношению ко времени, и материал обладает ортогональной анизотропией реологических свойств в произвольный момент времени;
2. реологические свойства среды не зависят от знака компонент тензора напряжений;
3. главные** характеристики или главные меры линейной и сдвиговой ползучести подобны между собой.

Первая гипотеза не является принципиально новой [2] и находится, как и вторая, на уровне обычно принимаемых допущений.

* Например, гипотеза о призматическом элементе [1].

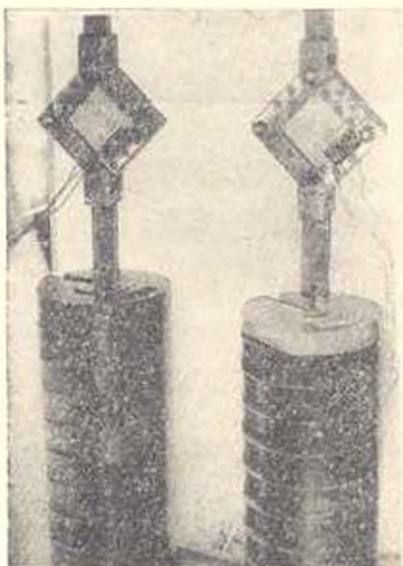
** То есть соответствующие главным направлениям и плоскостям упругой симметрии материала. Здесь и ниже процесс релаксации во времени высокоэластических линейных и сдвиговых деформаций под действием постоянной нагрузки традиционно называем ползучестью (протей).

Непосредственные экспериментальные данные относительно второй гипотезы отсутствуют. Однако, следует ожидать, что при умеренной интенсивности внешнего силового поля она справедлива [3], и усложнение теории в этом направлении не оправдано.

В рассматриваемом случае равновесных процессов деформирования априорное использование третьей гипотезы накладывает ограничения лишь на форму нестационарного участка кривых ползучести, как правило, мало интересного с практической точки зрения. Однако, эти ограничения менее жесткие, нежели в известной расчетной модели Брызгалова Г. И. [4], предполагающей постоянство по времени характеристик (мер) ползучести в направлениях армирования 11, 22.

Отметим, что третья гипотеза эквивалентна предположению о подобии кривых простой одномерной ползучести для образцов, произвольно ориентированных в плоскостях упругой симметрии. Указанное подобие в плоскости 12 наблюдалось для эпоксидного стеклопластика [5], а также при релаксации напряжений для полиэфирного стекло-текстолита [6].

Справедливость последних двух гипотез проверялась экспериментально для искусственного стеклопластика холодного отверждения (гидрофобизированный стеклотекстолит 8-3 и полиэфирная смола ПН-3). Образцы стекло-текстолита размерами в свету $100 \times 100 \times 3$, вырезанные из одного листа (плоскость 12), синхронно деформировались во времени (до $2,5 \cdot 10^3$ час) в шарнирных четырехзвенниках (фиг. 1). Напряжения



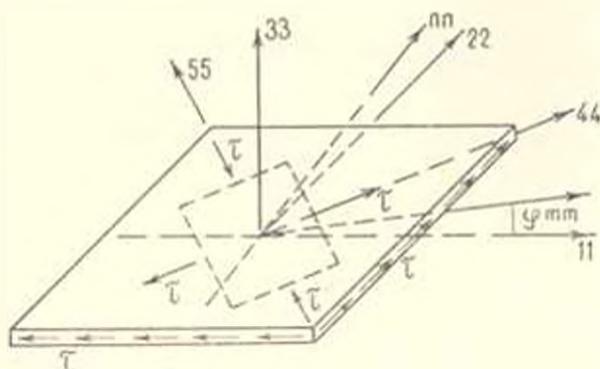
Фиг. 1. Установки для осуществления чистого сдвига.

состояние в центре образцов (фиг. 2) близко [3] к чистому сдвигу. Направление 11 основы материала составляло (фиг. 2) с диагональю растяжения угол 45° . Деформации измерялись тензOMETрическим путем с регистрацией статическими измерителями с мостовыми схемами и отсчетом по зеркальным гальванометрам типа М-17. Средние по толщине касательные напряжения составляли $7,5\%$ от разрывающих. На фиг. 3

представлены усредненные по данным двух идентичных установок (фиг. 1) экспериментальные характеристики λ_{ij} линейной ползучести при растяжении и сжатии вдоль соответствующих диагоналей 44 и 55 и сдвиговой ползучести в плоскости 12, причем

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}(t) \varepsilon_{ij}^{n_{ij}}, \quad i = j = 4, 5, \quad i = 1, j = 2,$$

где λ_{ij} , ε_{ij} — высокопластические и мгновенно-упругие деформации (линейные или логарифмические).



Фиг. 2. Анализ напряженного состояния в центре пластины.

Учитывая обычный раброс экспериментальных точек при последствии стеклопластиков, вызванный гетерогенностью их структуры и наличием нерегулярности в плане отдельных текстильных макроэлементов стеклоткани, а также неизбежные субъективные погрешности при наклеивке тензодатчиков, следует признать удовлетворительным результат сопоставления эксперимента с гипотезами. Локальную неомологовость опытных кривых можно объяснить «технологическими» причинами: ранее отмеченными искривлениями стеклянных прядей, незавершенностью процессов полимеризации и отверждения связующего, микродеструктивными процессами. Не усложняя рассуждений*, будем считать в дальнейшем, что исследуемый материал структурно стабилен во времени.

В заключение констатируем, ссылаясь на эксперимент, что установки (фиг. 1), рассматриваемые [3] для исследования плоского напряженного состояния при чистом сдвиге, неточны при определении упругих и недопустимы при определении реологических характеристик ортотропных материалов в тех случаях, когда угол между диагональю растяжения и осью материала отличается от $\varphi = \pm 45^\circ$. В указанных случаях образец, изготовленный из относительно более жесткого контур четырехугольника квадратной, а затем ромбической формы и деформирующийся по линиям анизотропного тела общего случая (или при наличии коэффициентов взаимного влияния полностью меняется геометрия образца [8]), испытывает «спонтанную трансформацию».

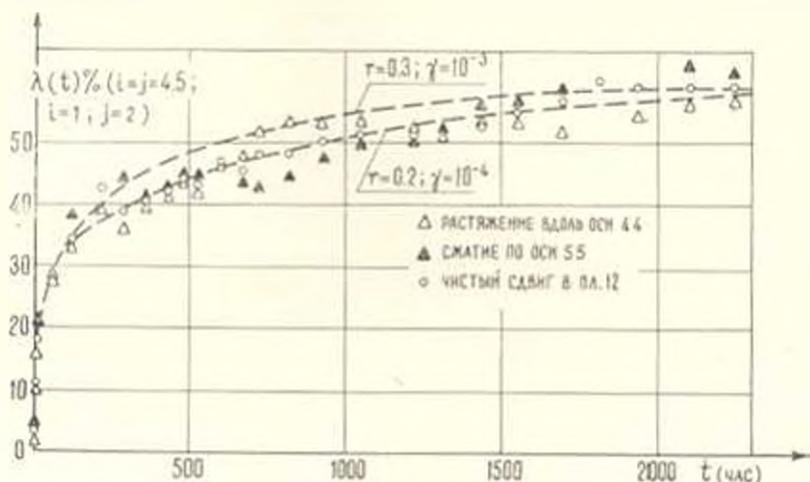
§ 2. Равновесные процессы простой ползучести с особенностью в момент загрузки будем описывать с использованием слабо сингулярных наследственных функций планирования типа Ржаницына А. Р.:

$$R_{i-1}(-\tau; T-\tau) = \exp[-\tau(T-\tau)] \frac{(T-\tau)^{i-1}}{\Gamma(i)} \quad (2.1)$$

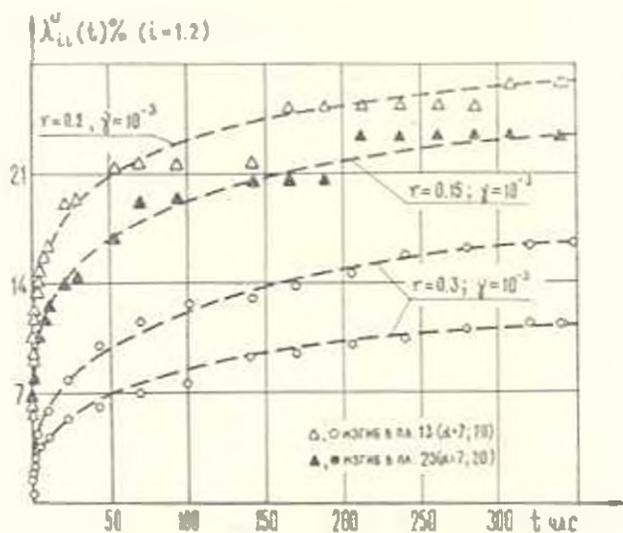
* Вопросы старения «в чистом виде» для нетканых стеклопластиков исследованы Мартиросяном М. М. [7]. Принципиально излагаемая теория распространяется и на случай анизотропного упруго-ползучего (стареющего) тела Маслова Г. Н.—Арутюнян Н. Х.

где r, γ — положительные реономные параметры; T, τ — безразмерные временные аргументы масштаба $t_0 = 1$ час; $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера.

На фиг. 3, 4 пунктиром показаны обработанные с помощью данного ядра характеристики ползучести при сдвиге в плоскости 12 и при изгибе в плоскостях 13, 23.



Фиг. 3. Характеристики ползучести при растяжении $\lambda_{44}(t)$, сжатии $\lambda_{55}(t)$ и чистом сдвиге $\lambda_{12}(t)$.



Фиг. 4. Характеристики ползучести при поперечном изгибе в плоскостях 13, 23 при различных соотношениях $\lambda_{ii}/\lambda^{-1}$.

Выбор укрупненной функции влияния и качества ядра ползучести обусловлен следующими обстоятельствами:

1. соответствующее ядру (2.1) уравнение связи вытекает из линеаризованного обобщенного уравнения Максвелла-Гуревича Г. И. [9],

наиболее полно описывающего поведение „спитых“ полимеров и армоматериалов на их основе под нагрузкой;

2. замкнутость формы ядра (2.1) позволяет сравнительно просто определить его реономные параметры r, γ , так как характеристики ползучести в этом случае суть протабулированные [10] неполные гамма-функции, а в двойных логарифмических координатах их форма зависит только от параметра r (параметр γ предопределяет сдвиг кривой по оси $\lg T$);

3. указанные параметры r, γ позволяют точно описать форму кривых последействия. При достаточно малом γ процесс деформирования приближается к безразличному.

4. основные правила действия с обобщенными экспонентами дробного порядка (K -функциями), резольвентными по отношению к ядру (2.1), совпадают с аналогичными для \mathcal{E} -функций Работнова Ю. Н. [11], где

$$K_{r, \gamma}(-z; z; T - \tau) = \exp[-\gamma(T - \tau)] \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \frac{(T - \tau)^{n-1}}{\Gamma(nr)} \quad (2.2)$$

где z — опытный аргумент, причем $|z| < \gamma$.

§3. Упругие свойства рассматриваемой ортотропной среды однозначно описываются девятью апостериорными [1] константами: главными шестью мгновенно-упругими линейными и сдвиговыми податливостями Y_{ij} ($i = j = 1, 2, 3$; $i = 1, 2$; $j \neq i = 2, 3$) и тремя (из шести) коэффициентами Пуассона ν_{ij} (*), например, $i = 1, 2$; $j \neq i = 2, 3$. Используя здесь и далее операторный принцип Вольтерра В.—Работнова Ю. Н. [11], на основании гипотезы о подобии §1 представим операторные аналоги упругих констант в виде:

$$\bar{Y}_{ij} = Y_{ij} [1 + \nu_{ij} K^*(0)], \quad i = j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2; \quad j \neq i = 2, 3 \quad (3.1)$$

$$\bar{\nu}_{ij} = \nu_{ij} [1 + \nu_{ij} K^*(-x_{ij})], \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j \quad (3.2)$$

Данные функционалы, определяемые параметрами r, γ, x наследственных K -операторов и равновесными параметрами $\nu_{ij}, \bar{\nu}_{ij}$, девять из которых линейно независимы, полностью характеризуют реономное поведение модели. Опытные параметры $\bar{\nu}_{ij}$, связанные с соответствующими предельными характеристиками ползучести соотношением $\bar{\nu}_{ij} = \gamma^{-1} \nu_{ij}(\infty)$, приведены для рассматриваемого стеклотекстолита в табл. 1, 2.

Линейные параметры ν_{ij} ($i = j = 1, 2, 3$) определялись из обычных [3] испытаний на простую ползучесть при растяжении (x_{11}, x_{22}) или сжатии (x_{33} **). Значение x_{12} найдено из эксперимента, приведенного в §1.

* Индексы i, j указывают соответственно на направления одномерного действия внешней силы и замера поперечной деформации.

** В этом случае деформации по толщине листа замерились малообязанными (5 мм) тензодатчиками.

Реономные сдвиговые параметры ν_{13}, ν_{23} рассматриваемого материала, описываемого моделью § 1, определялись из испытаний на длительный поперечный изгиб по схемам трехточечного нагружения образцов-балочек размерами $l \times b \times \bar{h}$, ориентированных в направлениях 11, 22 и различающихся отношением $\alpha = l/\bar{h}^{-1}$. На фиг. 4 показаны соответствующие экспериментальные характеристики ползучести $\bar{\lambda}_{ii}^a, \bar{\lambda}_{ii}^a$ ($i = 1, 2$) при поперечном ($\alpha = 7$) и квазицистом ($\alpha > 20$) изгибах при „рабочих“ нагрузках, не превышающих 15–20% от предельных. Пунктиром показаны теоретические кривые, соответствующие ядру (2.1). Исходя из параболического [1] закона распределения скалывающихся напряжений по толщине \bar{h} , согласно функционалам (3.1) получаем ($i = 1, 2$)

$$\bar{\lambda}_{ii}^a = \bar{\nu}_i^{-1} [\bar{\lambda}_{ii}^a (1 + \nu_i) - \lambda_{ii}]; \quad \nu_i = 1, 2 \alpha^{-2} Y_{13} Y_{ii}^{-1} \quad (3.3)$$

Здесь $\bar{\lambda}_{ii}^a$ — опытный равновесный параметр при длительном поперечном изгибе с учетом сдвигов в плоскости $i3$ для образца, ориентированного в направлении ii .

Таблица 1

Главные линейные упругие и реономные* характеристики исследуемого стеклотекстолита

Главные оси	$Y_{ii} H^{-1} M^2 \cdot 10^{10}$	$\lambda_{ii} \cdot 10^2$
11	0.606	1.46
22	0.869	2.47
33	0.834	2.76

Таблица 2

Главные сдвиговые упругие и реономные характеристики

Главные плоскости	$Y_{ij} H^{-1} M^2 \cdot 10^{10}$	$\lambda_{ij} \cdot 10^2$
12	3.39	7.94
13	10.2	9.58
23	9.09	7.56

* Здесь и в табл. 2, 3 $\bar{\nu}_i = 10^{-3}$, $r = 0.3$

Отметим, что одномерные упругие и реономные характеристики Y_{ii}, λ_{ii} ($i = 1, 2$) в формуле (3.3) целесообразней определять из испытаний на чистый (квазицистый) изгиб. Это позволит нивелировать погрешности, вносимые второй гипотезой § 1 при рассмотрении неоднородного поля напряжений и деформаций при изгибе.

Оставшиеся реономные параметры ν_{ij} находим из следующей системы шести линейных операторных уравнений, расшифровывая первую гипотезу § 1 (уравнения 1–3) и учитывая, что высокоэластические деформации не вызывают изменения объема (уравнения 4–6):

$$\begin{aligned}
 & Y_{ij} Y_{ii} = \bar{\nu}_i \bar{\nu}_j^{-1}, & 1) & & i, j = \begin{cases} 1, 2 \\ 2, 3 \\ 3, 1 \end{cases} \\
 & (1 - \nu_{ij} - \nu_{ji}) Y_{ii} = Y_{ii} (1 - \nu_{ij} - \nu_{ik}), & 2) & & \\
 & & 3) & & \\
 & & 4) & & \\
 & & 5) & & i, j, k = \begin{cases} 1, 2, 3 \\ 2, 1, 3 \\ 3, 1, 2 \end{cases} \\
 & & 6) & &
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь переменные индексы принимают соответственные значения: так для первого уравнения $i=1; j=2, \dots$ для четвертого — $i=1, j=2, k=3$ и т. д. Опуская громоздкие выкладки, получаем окончательно

$$\nu_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2\gamma_{ij}} \left(1 + \frac{Y_{jj}}{Y_{ii}} \frac{\gamma_{jj}}{\gamma_{ii}} - \frac{Y_{kk}}{Y_{ii}} \frac{\gamma_{kk}}{\gamma_{ii}} - 2\nu_{ij} \right) \quad (3.5)$$

где i, j, k — циклично переставляемые индексы дискретных значений 1, 2, 3, причем последнему переменному индексу приписывается знак минус.

В случае изотропного тела из равенства (3.5) следует известный результат Работнова К. Н. [11] (стр. 153), полученный в предположении отсутствия объемного последствия. Заметим, что для рассматриваемого ортотропного континуума оператор дилатации также постоянен во времени.

Таблица 3

Реологические параметры ν_{ij} , упруго-упругие γ_{ij} и длительные $\gamma_{ij}(\infty)$ коэффициенты Пуассона

Индекс	ν_{ij}	$\gamma_{ij}(\infty)$	γ_{ij}
12	0.144	0.171	0.218
21	0.101	0.112	0.136
13	0.510	0.519	0.017
31	0.371	0.345	-0.29
23	0.550	0.596	0.100
32	0.574	0.611	0.077

Соотношение (3.5) при $i=1, j=2, k=3$ позволяет объяснить наблюдаемое рядом исследователей [4], [12] уменьшение во времени коэффициента ν_{12} . Это, по-видимому, имеет место для ориентированных нетканых слоистых стеклокомпозитов, податливость которых по толщине из-за наличия полимерных макропрослоек существенно выше податливости и направления армирования 11, 22. Для стеклотекстолитов (табл. 1) эта разница существенно сглаживается, и, как правило, ν_{12} (табл. 3). Естественно, возможен и граничный случай стабильности коэффициента Пуассона ν_{ij} во времени ($\gamma_{ij} = 0$).

§ 4. Рассмотрим вопрос об определении линейных и сдвиговых реологических параметров модели для направлений и плоскостей, отличных от главных. Как и упругие, операторные коэффициенты деформаций рассматриваемой модели образуют в шестимерном пространстве симметричный тензор, компоненты которого в операторном виде преобразуются по известным [8] правилам тензорного анализа.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{Y}_{11} - \bar{\nu}_{12} \bar{Y}_{11} & \bar{\nu}_{13} \bar{Y}_{11} & 0 & 0 & 0 & & \\
 & Y_{22} - \nu_{23} Y_{22} & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & \bar{Y}_{33} & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & \bar{Y}_{33} & 0 & 0 & \\
 & & & & \bar{Y}_{12} & 0 & \\
 & & & & & \bar{Y}_{22} &
 \end{array} \quad (4.1)$$

Ограничиваясь лишь поворотом операторных компонентов тензора (4.1) в плоскости 12 на угол φ по отношению к основе 11 (фиг. 2), получаем окончательно операторные аналоги преобразованных упругих констант модели в виде ($i = m, n, 3$)

$$\bar{Y}_{mi} = Y_{mi} [1 + \chi_{mi} K^*(0)]; \quad \bar{\nu}_{mn} = \nu_{mn} [1 + \mu_{mn} K^*(-\chi_{mn})] \quad (4.2)$$

где

$$\chi_{mn} = \frac{\nu_{12} Y_{11} \cos^2 \varphi + 0.25 [\nu_{12} Y_{11} - 2 \nu_{12} Y_{11} (\nu_{11} + \mu_{12})] \sin^2 2\varphi + \nu_{22} Y_{22} \sin^4 \varphi}{Y_{11} \cos^4 \varphi + 0.25 (Y_{22} - 2 \nu_{12} Y_{11}) \sin^2 2\varphi + Y_{22} \sin^4 \varphi} \quad (4.3)$$

$$\chi_{mn} = \frac{\nu_{12} Y_{12} + [\nu_{11} Y_{11} + \nu_{22} Y_{22} + 2 \nu_{12} Y_{11} (\nu_{11} + \mu_{12}) - \nu_{12} Y_{12}] \sin^2 2\varphi}{Y_{12} + [(1 + 2 \nu_{12}) Y_{11} + Y_{22} - Y_{12}] \sin^2 2\varphi} \quad (4.4)$$

$$\chi_{m3} = \frac{\nu_{23} Y_{23} \sin^2 \varphi + \nu_{13} Y_{13} \cos^2 \varphi}{Y_{23} \sin^2 \varphi + Y_{13} \cos^2 \varphi} \quad (4.5)$$

$$\mu_{mn} = \frac{Y_{mn} \{ \nu_{12} Y_{11} (\nu_{11} + \mu_{12}) - 0.25 [\nu_{12} Y_{11} + \nu_{22} Y_{22} + 2 \nu_{12} Y_{11} (\nu_{11} + \mu_{12})] \sin^2 2\varphi \}}{[\nu_{12} Y_{11} - 0.25 (Y_{mn} - Y_{12})] Y_{mn}^{-1} - \chi_{mn}} \quad (4.6)$$

Выражения в знаменателях формул (4.3) — (4.6) совпадают с известными [3], [8] „повернутыми“ упругими константами Y_{mn} , Y_{mn} , Y_{m3} , ν_{mn} (фиг. 2).

Анализ вышеприведенных формул показывает: если экстремальные упругие линейная Y_{mn} и сдвиговая Y_{mn} податливости исследуемой среды при $Y_{22} > Y_{11}$ имеют место при $\varphi = 4$, то экстремум соответственных реономных параметров χ_{mn} и ν_{mn} наблюдается при $\varphi \leq 4$. Для рассматриваемого стеклотекстолита (табл. 1, 2) указанные углы равны соответственно 48.3° и 44°. Отметим также практически полезную связь между реономным поведением модели при сдвиге в плоскости 12 и растяжением при $\varphi = 4$ в направлении 44 (фиг. 2):

$$\nu_{44} = \nu_{12} - 0.25 Y_{44}^{-1} \{ Y_{11} (\nu_{12} - \nu_{11}) - 2 Y_{22} |(\nu_{12} - \nu_{22})(1 - \nu_{11}) - \mu_{21} \nu_{21}| \}$$

Данное равенство ($\nu_{44} \sim 0.06$) удовлетворительно подтверждается экспериментом § 1 (фиг. 3).

Վ. Ա. ՄԱՆԿՈՎՍԿԻ, Մ. Ե. ԻՌՉՈՎՍԿԻ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԱՌՈՍԶԻՆ-ԺԱՌՈՒՆԴՈՒԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. Փ. Ն. Փ. Ն. Փ.

Ապակե անբաստիտի սրինակի վրա, առաջարկվում է օրթոտրոպ առածղա-մասննդական միջավայրի ճաշվարկման սխեմա, ենթադրելով նյութի գծային և սահքային սողրի պլաստիկ շափելի նմանությունը: Որպես կորիզներ օգտագործվում են կուսարակային կարգի ընդհանրացված էջայուննդիայ ֆունկցիաները:

V. A. MANKOVSKY, M. J. ROISOVSKY

ON THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY-HEREDITARY MEDIA

S u m m a r y

A calculating model of orthotropic elasticity-hereditary medium is suggested. Tissue glass reinforced plastics is taken as an example of this model.

A. R. Rzhanytsyn's kernel functions are used.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластяжки и оболочки из армированных пластмасс. Машиностроение, М., 1965.
2. Кирикян Р. М. О ползучести слоя стеклопластика при двухосном растяжении. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. XVІІІ, 1, 1965.
3. Смирнов М. К. и др. Прочность корпуса судна из стеклопластика. Судостроение, Л., 1965.
4. Брызгалов Г. И. К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ, в. 1963.
5. Каус А. Creep in an anisotropic medium. Brit. J. Appl. Phys., XV, 9, 1961.
6. Колтунов М. А., Бозухов В. Н. Анализ ползучести ортотропного стеклопластика. Вести МГУ, мат.-мех., 6, 1963.
7. Миртиросян М. М. Описание ползучести стеклопластика СВАН с помощью упруго-ползучего тела. Изв. АН АрмССР, механика, т. XIX, 6, 1966.
8. Дехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
9. Гуревич Г. И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай трех измерений с учетом малых деформаций упругого последствия. Тр. Ин-та Физики Эсмил АН СССР, 2(169), 1959.
10. Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной гамма-функции и функции вероятности γ^2 . Изд. АН СССР, М.—Л., 1950.
11. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Наука, М., 1966.
12. Смирнов Н. Т., Чебопанов В. М. Ползучесть СВАН (5:1)—Б по различным направлениям в плоскости листа при малых напряжениях. Механика полимеров, 1, 1967.