ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

В. Н. МОСКАЛЕНКО

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТЫХ ПЛИТ

Дается решение задачи динамической теории упругости о собственных колебаниях полубесконечной плиты при произвольных граничных условиях на боковой грани. Решение строится в виде бесконечного ряда, каждый член которого удовлетворяет динамическим уравнениям теории упругости и условиям на верхней и нижней гранях плиты. При помощи предложенного В. В. Болотиным [1] асимптотического метода полученное решение используется для решения задачи о собственных колебаниях прямоугольных плит при произвольных условиях на боковых гранях. Полученные решения сравниваются с результатами применения классической и уточненных теорий пластин. Показывается, что решение по классической теории соответствует сохранению первых двух, а по уточненным — первых трех членов ряда. При этом уточненные теории дают удовлетворительное приближение всюду, кроме узкой пограничной зоны, имеющей порядок половины толщины плиты.

1. Пусть упругая изотропная полубесконечная плита толщины $h=2c\,(0\leqslant x_1<\infty,\ -\infty<x_2<\infty,\ -c\leqslant x_3\leqslant c)$ колеблется с частотой ω. Решение уравнений Ламе для амплитуд компонент перемещения

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k}+\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}+\rho\omega^2 u_j=0 \tag{1.1}$$

ищем в следующем виде, удовлетворяющем условиям ограниченности при $x_1\to\infty$, $x_2\to\pm\infty$

$$u_1=F_1(x_1,x_3)\sin k_2x_2,\quad u_2=F_2(x_1,x_3)\cos k_2x_2,\quad u_3=F_3(x_1,x_3)\sin k_2x_2$$

Здесь λ, μ — упругие постоянные Ламе, ρ — плотность, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}=\Delta$ — оператор Лапласа, k_2 — волновое число. Функции F_j будем искать в виде ряда

$$F_j(x_1,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{jn}(x_3)\exp(-q_n x_1) \tag{1.2}$$

причем $\operatorname{Re} q_n\geqslant 0$, а каждый член разложения вектора перемещения u_j удовлетворяет условиям свободной поверхности на гранях $x_3=z=\pm c$.

Из симметрии задачи относительно плоскости $z=0$ следует, что колебания плиты разбиваются на симметричные и антисимметричные. В дальнейшем нас будут интересовать только антисимметричные колебания, при которых f_{3n} — четная, а f_{1n} и f_{2n} — нечетные функции z.

Удовлетворяя уравнениям (1.1) и условиям на свободной поверхности, получаем для определения q характеристическое уравнение, распадающееся на два:

$$ch\, r_1 c = 0 \tag{1.3}$$

$$4 r_1 r_3 (-q^2 + k_2^2) \operatorname{th} r_1 c = (k_2^2 - q^2 + r_1^2)^2 \operatorname{th} r_3 c \tag{1.4}$$

Здесь

$$r_1 = \left| (-q^2 + k_2^2) - \frac{\rho\omega^2}{\mu} \right|^{1/2}, \quad r_3 = \left| (-q^2 + k_2^2) - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \right|^{1/2}$$

Корням уравнения (1.3) соответствуют следующие выражения для f_j:

$$f_1 = A\, k_2 \sin\frac{\pi(2m+1)}{2c} z, \quad f_2 = -A\, q \sin\frac{\pi(2m+1)}{2c} z, \; f_3 = 0$$

Выражения, соответствующие корням уравнения (1.4), имеют вид:

$$f_1(z) = -Bq\,[2 r_1 r_3 \operatorname{ch} r_3 c \operatorname{sh} r_1 z - (-q^2 + k_2^2 + r_1^2) \operatorname{ch} r_1 c \operatorname{sh} r_3 z]$$

$$f_2(z) = B k_2\,[2 r_1 r_3 \operatorname{ch} r_3 c \operatorname{sh} r_1 z - (-q^2 + k_2^2 + r_1^2) \operatorname{ch} r_1 c \operatorname{sh} r_3 z]$$

$$f_3(z) = B r_3\,[2(-q^2 + k_2^2) \operatorname{ch} r_3 c \operatorname{ch} r_1 z - (-q^2 + k_2^2 + r_1^2) \operatorname{ch} r_1 c \operatorname{ch} r_3 z]$$

Отметим, что q, r_1 и r_3 — вообще, комплексные величины, поэтому под B следует понимать комплексные постоянные.

2. Из требования ограниченности каждого члена разложения (1.2) вытекает требование $\operatorname{Re} q \geqslant 0$. Будем считать, что существует по крайней мере один чисто мнимый корень $q = i k_1$, то есть не рассматриваем колебания, полностью сконцентрированные у края плиты. Характеристическое уравнение приводит в этом случае к уравнениям частот для бесконечной плиты

$$\operatorname{ch} r_1 c = 0 \tag{2.1}$$

$$4 r_1 r_3 (k_1^2 + k_2^2) \operatorname{th} r_1 c = (k_1^2 + k_2^2 + r_1^2)^2 \operatorname{th} r_3 c \tag{2.2}$$

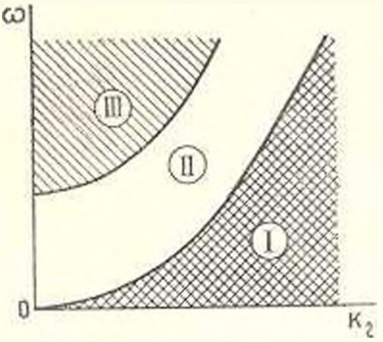
Здесь

$$r_1 = \left| (k_1^2 + k_2^2) - \frac{\rho\omega^2}{\mu} \right|^{1/2}, \qquad r_3 = \left| (k_1^2 + k_2^2) - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} \right|^{1/2}$$

Решение уравнений (2.1) и (2.2) при фиксированной толщине $h = 2c$ можно выразить в виде

$$\omega = \omega_l (k_1^2 + k_2^2)$$

причем ω_1 соответствует первому корню уравнения (2.2), а ω_2 является первым корнем уравнения (2.1). Нанесем в плоскости $Ok_2\omega$ кривые $\omega = \omega_1(k_2)$ и $\omega = \omega_2(k_2)$ (фиг. 1). Область I соответствует отсутствию действительных значений k_1; область II соответствует существованию только одного корня; для области III существуют два или больше действительных значений k_1.



Фиг. 1.

Рассмотрим корни, соответствующие области II. Пусть k_1 и k_2 малы, тогда разложение уравнения (1.4) дает в качестве первого приближения для первого корня выражение, совпадающее с результатом классической теории

$$q = (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2} \qquad (2.3)$$

Второе приближение дает значение, с которым согласуются результаты уточненных теорий

$$q = \left| (k_1^2 + 2k_2^2) - \frac{1}{3}(3 - 4\varepsilon) c^2 (k_1^2 + k_2^2)^2 \right|^{1/2}, \qquad \varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

Разложение по малому параметру $\xi = \rho\omega^2 (2\mu R^2)^{-1}$, $R^2 = q^2 - k_1^2$, уравнения (1.4) дает в первом приближении уравнение для определения других корней

$$\sin 2Rc = 2Rc$$

Корни характеристического уравнения (1.3) могут быть записаны в явном виде

$$q_m = \left| k_2^2 - \frac{(m-1)^2 \pi^2}{4c^2} - \frac{\rho\omega^2}{\mu} \right|^{1/2}, \qquad (m = 2, 4, 6, \ldots)$$

С наименьшим корнем ($m = 2$) удовлетворительно согласуются [2] результаты применения уточненных теорий [3,4].

3. В задаче о собственных колебаниях прямоугольной толстой плиты применим асимптотический метод, предложенный В. В. Болотиным [1]. Этот метод основан на приближенном представлении формы собственных колебаний в виде суммы из соответствующего асимптотического выражения и набора корректирующих решений. Не удовлетворяющее, вообще, граничным условиям асимптотическое выражение определяет вид формы собственных колебаний и носит название порождающего решения. Удовлетворение граничным условиям осуществляется путем добавления набора корректирующих решений, обладающих свойствами краевого эффекта. По аналогии со статическим краевым эффектом отклонение от асимптотических форм колебаний, имеющее место вблизи искажения, носит название динамического краевого эффекта.

Порождающее решение будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
u_1 &= f_{10}(z)\cos k_1(x_1-x_{10})\sin k_2(x_2-x_{20})\\
u_2 &= f_{20}(z)\sin k_1(x_1-x_{10})\cos k_2(x_2-x_{20})\\
u_3 &= f_{30}(z)\sin k_1(x_1-x_{10})\sin k_2(x_2-x_{20})
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

где k_1, k_2 — волновые числа, x_{10}, x_{20} — постоянные. Подставляя выражения (3.1) в уравнения (1.1) и удовлетворяя граничным условиям на свободной поверхности $z=\pm c$, получаем, что волновые числа k_1, k_2 должны быть связаны с частотой ω уравнением (2.1) или (2.2). Будем считать, что точка k_1, k_2, ω расположена на поверхности $\omega=\omega_1(k_1, k_2)$, то есть соответствует первому корню уравнения (2.2). В этом случае порождающее решение дается выражениями:

$$f_{10}=B_0k_1[2r_1r_3\operatorname{ch}r_3c\operatorname{sh}r_1z-(k_1^2+k_2^2+r_1^2)\operatorname{ch}r_1c\operatorname{sh}r_3z]$$

$$f_{20}=B_0k_2[2r_1r_3\operatorname{ch}r_3c\operatorname{sh}r_1z-(k_1^2+k_2^2+r_1^2)\operatorname{ch}r_1c\operatorname{sh}r_3z]$$

$$f_{30}=B_0r_1[2(k_1^2+k_2^2)\operatorname{ch}r_3c\operatorname{ch}r_1z-(k_1^2+k_2^2+r_1^2)\operatorname{ch}r_1c\operatorname{ch}r_3z]$$

Решение, выражающее динамический краевой эффект вдоль края $x_1=0$, имеет вид:

$$u_1=F_1(x_1,z)\sin k_2(x_2-x_{20}),\quad u_2=F_2(x_1,z)\cos k_2(x_2-x_{20})$$
$$u_3=F_3(x_1,\ z)\sin k_2(x_2-x_{20})$$

где

$$F_j(x_1,z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nf_{jn}(z)\exp(-q_nx_1)$$

причем q_n пробегает значения всех корней уравнений (1.3), (1.4) с неотрицательной вещественной частью. Будем считать, что ни один из показателей q_n в выражениях (1.2) не является чисто мнимым, так что выполняются неравенства $\operatorname{Re}q_n>0$. Это приводит к требованию, чтобы точка (k_1, k_2) лежала в области I (фиг. 1), то есть удовлетворяла неравенству

$$\omega_1(k_1^2+k_2^2)<\omega_2(k_2^2) \qquad (3.2)$$

Аналогичные рассуждения для края $x_2=0$ приводят к неравенству

$$\omega_1(k_1^2+k_2^2)<\omega_2(k_1^2) \qquad (3.3)$$

Условия (3.2) и (3.3) сводятся к требованию, чтобы точка (k_1, k_2) лежала в ограниченной области, близкой к квадрату $k_{1,2}\sim\pi/h$ (фиг. 2). Это означает, что длина l полуволны порождающего решения должна удовлетворять неравенству $l>l_0$, где $l_0\sim h$. Аналогичную область для отсутствия вырождения динамического краевого эффекта дают также уточненные теории [2].

4. Рассмотрим собственные колебания заделанной по контуру прямоугольной толстой плиты со сторонами a_1, a_2. Введем ортого-

нальную систему функций $\{\chi_m(z)\}$, полную на интервале $(-c, c)$. Тогда условия заделки будут эквивалентны бесконечной системе уравнений

$$
\begin{gathered}
B_0(f_{10}, \chi_m) \cos k_1 x_{10} + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} B_n(f_m, \chi_m) = 0 \\
-B_0(f_{20}, \chi_m) \sin k_1 x_{10} + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} B_n(f_{2n}, \chi_m) = 0 \\
-B_0(f_{30}, \chi_m) \sin k_1 x_{10} + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} B_n(f_{3n}, \chi_m) = 0
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \varphi(z)\,\psi(z)\,dz$$

Характеристическое уравнение системы (4.1) имеет вид

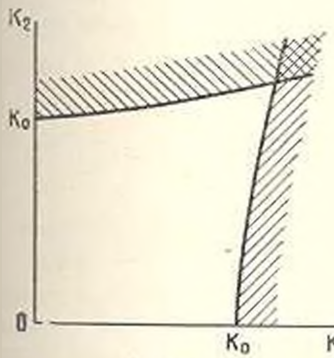
$$\Delta_{11} \cos k_1 x_{10} - \Delta_{21} \sin k_1 x_{10} = 0$$

Отсюда получаем

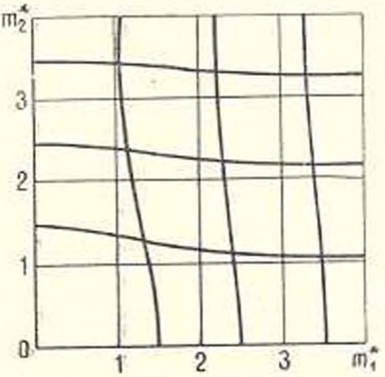
$$k_1 x_{10} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}}$$

Аналогичное решение справедливо вблизи края $x_1 = a_1$. Из условия, что порождающее решение должно совпадать в обеих системах, получаем уравнение для определения волнового числа k_1:

$$m_1^* = \frac{k_1 a_1}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}} + m_1, \; (m_1 = 1, 2 \ldots) \tag{4.2}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Аналогичные рассуждения для граней $x_2 = 0, a_2$ приводят к уравнению

$$m_2^* \equiv \frac{k_2 a_2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} + m_2, \; (m_2 = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

Пересечения кривых (4.2) и (4.3) дают числа m_1^* и m_2^* (фиг. 3).

Рассмотрим первое приближение, полагая коэффициенты со второго равными нулю ($B_2 = B_3 = \ldots = 0$). Кроме того, будем считать, что χ_0 — четная, а χ_1 — нечетная функции z. Представляется естественным сохранить равенство нулю осредненного прогиба и осредненного поворота относительно касательной к контуру. Это дает выражение для m_1^*

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{f_{101} f_{210}}{f_{200} f_{111}} + m_1, \quad f_{jnm} = (f_{jn}, \chi_m) \tag{4.4}$$

Второе приближение дает

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{f_{101}(f_{221} f_{310} - f_{211} f_{320})}{f_{111}(f_{221} f_{300} - f_{211} f_{320}) - f_{121}(f_{211} f_{100} - f_{201} f_{110})} + m_1 \tag{4.5}$$

5. Классическая теория дает для m_1^* следующее значение [5], которое соответствует первому приближению (4.4)

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}} + m_1$$

Уточненные теории изгиба пластин [3,4] дают [2] для приведенных волновых чисел

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k_1 q_2 [(1 - \nu)(q_2^2 - k_2^2) - 2(q_2^2 - k_2^2)]}{q_1 q_2 [(1 - \nu)(q_1^2 - k_2^2) + 2(k_1^2 + k_2^2)] - 2k_2^2(q_2^2 + k_2^2)} + m_1$$

$$q_1 = \left[(k_1^2 + 2k_2^2) - \frac{17 - 6\nu}{5E} \gamma\omega^2 \right]^{1/2}, \quad q_2 = \left[k_2^2 + \frac{10}{h^2} - \frac{2(1 + \nu)}{E} \gamma\omega^2 \right]^{1/2}$$

Результаты уточненных теорий соответствуют второму приближению (4.5). При этом в уточненных теориях в случае учета искривления нормального элемента тенгенциальные условия заделки $u_{1,2} = 0$ заменяются интегральными условиями $(u_{1,2}, z) = 0$.

6. Выбирая в качестве функций χ_n функции

$$\chi_{2l} = \cos \frac{(2l+1)}{2c} \pi z, \quad \chi_{2l+1} = \sin \frac{(2l+1)}{2c} \pi z \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

рассмотрим колебания полубесконечной плиты с защемленным краем при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$. Пусть $k_1 = k_2 = \pi/20h$, т. е. длина полуволны порождающего решения λ равна двадцати толщинам. Для $\operatorname{tg} k_1 x_{10}$ классическая теория дает значение 0.5774, уточненные теории дают 0.5644; первое приближение приводит к 0.5641, второе — к 0.5644; приближению с сохранением шести членов ряда соответствует 0.5646. Сравнение этих данных дает, что для определения m_1^*, m_2^* в случае колебаний прямоугольной защемленной по контуру плиты можно с удовлетворительной точностью использовать результаты, полученные по уточненным теориям [2]. Вычисления показывают также, что уточненные теории дают удовлетворительное приближение для медленно затухающей с удалением от края части поля смещений. Зона затухания быстро затухающей части решения определяется величиной наименьшего отбрасываемого корня $q = (7.5 + 2.7i)\, h^{-1}$. Полагая, что величиной $\exp(-3.75)$ можно пренебречь по сравнению с единицей, приходим к выводу, что уточненные теории дают удовлетворительное приближение всюду, кроме узкой краевой зоны порядка полутолщины плиты. Вычисления, проведенные для других длин полуволн ($\lambda = 10\, h$, $\lambda = 5h$) приводят к аналогичным результатам, причем с уменьшением длины полуволны наблюдается тенденция к некоторому увеличению погрешности результатов, даваемых уточненными теориями изгиба плит.

Московский энергетический
институт

Поступила 26 II 1968

Վ. Ն. ՄՈՍԿԱԼԵՆԿՈ

ՀԱՍՏ ՍԱԼԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Տրվում է կիսաանվերջ սալի սեփական տատանումների խնդրի լուծումը անվերջ շարքի տեսքով։

Վ. Վ. Բոլոտինի կողմից առաջարկված ասիմպտոտիկ մեթոդի օգնությամբ, ստացված լուծումը օգտագործվում է ուղղանկյուն սալերի սեփական տատանումների խնդիրը լուծելու համար։ Ստացված լուծումները համեմատված են կլասիկ, Ռայսների և Ս. Համբարձումյանի ճշգրտված տեսությունների հետ։ Համեմատումը ցույց է տալիս, որ ճշգրտված տեսությունները տալիս են բավարար արդյունք ամենուրեք, բացի բարակ սահմանային շերտից, որի կարգը հավասար է սալի հաստության կեսին։

V. N. MOSKALENKO

FREE VIBRATIONS OF THICK PLATES

Summary

The solution of free vibration problem is given in series for a semi-infinite plate. By means of V. V. Bolotin's asymptotic method this solution is used to solve the free vibration problem for rectangular plates. A comparison is made with the results of the three-dimensional theory and the classical theory as well as E. Reissner's and S. A. Ambartzumian's refined theories. The comparison shows a good agreement with the three-dimensional theory and the refined theories.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, т. XXIV, вып. 5, 1960.
2. *Москаленко В. Н.* К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. Инж. ж., т. I, вып. 3, 1961.
3. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. ПММ, т. XXIV, вып. 2, 1960.
4. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates. J. Math. Phys., v. 23, No. 4, 1944.
5. *Болотин В. В., Макаров Б. П., Мишенков Г. В., Швейко Ю. Ю.* Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Сб. статей „Расчеты на прочность", вып. 6, 1960.