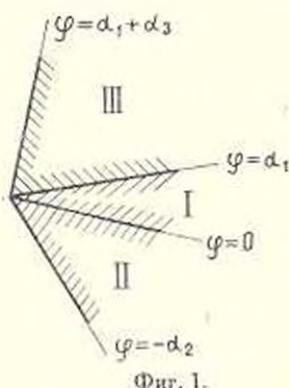


С. Х. ГЕВОРКЯН

ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО УГЛОВЫХ ТОЧЕК
 ЛИНИИ РАЗДЕЛА И КОНТУРА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ
 СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ
 ТРЕХ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Задача о кручении и изгибе призматического стержня, составленного из различных материалов, впервые поставлена и исследована Н. И. Мухелишвили [1]. Различные вопросы этой задачи исследованы в [2—5] и других работах. В настоящей статье методами работ [6—8] исследованы особенности напряжений около угловой точки линии раздела и контура поперечного сечения призматического стержня, составленного из трех различных изотропных материалов. Случаи двух материалов рассмотрены в работах [8—9]. Рассматриваемые задачи приводятся к трансцендентным уравнениям относительно порядка особенности, зависящего от величин некоторых геометрических характеристик поперечного сечения и деформативных характеристик составляющих стержень материалов.

1. Рассмотрим решение задачи кручения составного призматического стержня вблизи угловой точки линии раздела областей поперечного сечения, соответствующих различным материалам, когда две



линии раздела выходит на угловую точку контура поперечного сечения (фиг. 1.) Поместим начало полярной системы координат (r, φ) в угловой точке линии раздела, причем отсчет угла φ будем производить от направления одной из ветвей линии раздела. В случае криволинейности ветвей контура поперечного сечения и линии раздела областей заменим их соответствующими касательными в угловой точке. От этого характер напряженного состояния вблизи угловой точки не изменится.

Функция напряжений $U(r, \varphi)$ в каждой из областей I, II и III удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (1.1)$$

На ветвях контура поперечного сечения и линии раздела областей функция $U(r, \varphi)$ удовлетворяет следующим граничным условиям [4]:

$$\begin{aligned}
 G_1 U_1(r, z_1) &= G_2 U_2(r, z_1), \quad G_1 U_1(r, 0) = G_2 U_2(r, 0) \\
 U_2(r, z_1 + z_2) &= 0, \quad U_2(r, -z_2) = 0 \\
 \left. \frac{\partial U_1}{\partial z} \right|_{z=0} &= \left. \frac{\partial U_2}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial z} \right|_{z=-z_2} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial z} \right|_{z=-z_2}
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где U_1 , U_2 и U_3 представляют U в соответствующих областях, а G_1 , G_2 , G_3 — модули сдвига составляющих стержень материалов.

Решение однородной граничной задачи (1.1) — (1.2) представим в виде

$$U_i(r, z) = R_i(r) \Phi_i(z) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

Разделяя переменные, получим

$$r^2 R_i + R_i - \lambda_i^2 R_i = 0 \quad (1.4)$$

$$\Phi_i'' + \lambda_i^2 \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

Линейно независимыми решениями уравнения (1.4) будут

$$R_i = r^{\lambda_i}, \quad R_i = r^{-\lambda_i} \quad (\lambda_i > 0) \quad (1.6)$$

Решением уравнения (1.5) будет

$$\Phi_i = A_i \cos \lambda_i z + B_i \sin \lambda_i z \quad (1.7)$$

Удовлетворив условиям (1.2), из (1.3) и (1.6) получим

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 - \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda \\
 G_1 \Phi_1(z_1) &= G_2 \Phi_2(z_1), \quad G_1 \Phi_1(0) = G_2 \Phi_2(0) \\
 \Phi_2(z_1 + z_2) &= 0, \quad \Phi_2(-z_2) = 0 \\
 \Phi_1'(0) &= \Phi_2'(0), \quad \Phi_1'(z_1) = \Phi_3'(z_1)
 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) имеем

$$\begin{aligned}
 G_1 (A_1 \cos \lambda z_1 + B_1 \sin \lambda z_1) &= G_2 (A_2 \cos \lambda z_1 + B_2 \sin \lambda z_1) = 0 \\
 G_1 A_1 - G_2 A_2 &= 0, \quad B_1 - B_2 = 0 \\
 -A_1 \sin \lambda z_1 + B_1 \cos \lambda z_1 + A_2 \sin \lambda z_1 - B_2 \cos \lambda z_1 &= 0
 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$A_2 \cos \lambda z_2 - B_2 \sin \lambda z_2 = 0, \quad A_3 \cos \lambda (z_1 + z_2) + B_1 \sin \lambda (z_1 + z_2) = 0$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (1.9) после некоторых преобразований получим трансцендентное уравнение относительно λ

$$\begin{aligned}
 \Delta(\lambda, z_1, z_2, z_3, \mu_2, \mu_3) &= (\mu_2 + 1) [(\mu_3 + 1) \sin \lambda (z_1 + z_2 + z_3) - \\
 &- (\mu_3 - 1) \sin \lambda (z_1 + z_2 - z_3)] - (\mu_2 - 1) [(\mu_3 + 1) \sin \lambda (z_2 - z_2 + z_1) + \\
 &+ (\mu_3 - 1) \sin \lambda (z_3 + z_2 - z_1)] = 0
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\text{где } \mu_2 = \frac{G_2}{G_1}, \quad \mu_3 = \frac{G_3}{G_1}.$$

Общее решение однородной граничной задачи (1.1)–(1.2) можно представить в виде

$$\bar{U}(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)} r^{\lambda_k} \Phi^{(k)}(\varphi) \quad (1.11)$$

где $\Phi^{(k)}(\varphi)$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_k , которые являются корнями трансцендентного уравнения (1.10).

Покажем, что система функций $\{\Phi^{(k)}(\varphi)\}$ на отрезке $[-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3]$ ортогональна с кусочно-постоянным весом

$$G(\varphi) = \begin{cases} G_1 & 0 < \varphi < \alpha_1 \\ G_2 & -\alpha_2 < \varphi < 0 \\ G_3 & \alpha_1 < \varphi < \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases}$$

Пусть $\Phi^{(m)}$ и $\Phi^{(n)}$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_m и λ_n , причем $\lambda_m \neq \lambda_n$. Дважды интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1 + \alpha_3} G(\varphi) \lambda_m^2 \Phi^{(n)} \Phi^{(m)} d\varphi &= -G_2 \int_{-\alpha_2}^0 \Phi_2^{(m)} \Phi_2^{(n)} d\varphi - G_1 \int_0^{\alpha_1} \Phi_1^{(m)} \Phi_1^{(n)} d\varphi - \\ &- G_3 \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \alpha_3} \Phi_3^{(m)} \Phi_3^{(n)} d\varphi = \lambda_n^2 \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1 + \alpha_3} G(\varphi) \Phi^{(m)} \Phi^{(n)} d\varphi \end{aligned} \quad (1.12)$$

откуда, так как $\lambda_m \neq \lambda_n$, получим

$$\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1 + \alpha_3} G(\varphi) \Phi^{(m)} \Phi^{(n)} d\varphi = 0$$

что и требовалось доказать.

При выводе формулы (1.12) были использованы уравнение (1.5) и условия (1.8), которым удовлетворяют $\Phi^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Покажем теперь, что все собственные значения граничной задачи (1.12), (1.8) действительны. Допустим, что существуют комплексные $\lambda_k = p_k \pm iq_k$. Соответствующие собственные функции обозначим $\Phi^{(k)} = \varrho^{(k)} \pm i\psi^{(k)}$. Из условия (1.12) имеем

$$4iq_k \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1 + \alpha_3} G(\varphi) (\varrho^{(k)} + \psi^{(k)}) d\varphi = 0$$

откуда, так как функции $\varrho^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ не могут одновременно тождественно равняться нулю на $[-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3]$, получим $q_k = 0$. Положительные собственные значения пронумеруем следующим образом:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

Как будет видно в дальнейшем, отрицательные собственные значения для рассматриваемой задачи не нужны.

Эти утверждения вместе с полнотой системы $\{\Phi^{(k)}\}$ на отрезке $[-\alpha_0, \alpha_1 + \alpha_2]$ в классе функций, удовлетворяющих условиям (1.8), следуют также из самосопряженности линейного оператора, порожденного дифференциальным выражением (1.5) и граничными условиями (1.8).

Частное решение уравнения (1.1) $U_i^{(i)}$ можно представить в виде

$$U_i^{(i)} = \frac{r^2}{2} (A_i^i \cos 2\varphi + B_i^i \sin 2\varphi - 1) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.13)$$

Коэффициенты A_i^i, B_i^i ($i=1, 2, 3$) определяются из условий (1.2).

Удовлетворяя условиям (1.2), относительно коэффициентов A_i^i, B_i^i ($i=1, 2, 3$) частного решения (1.13) получаем систему

$$\begin{aligned} A_1^1 \cos 2\alpha_1 - A_2^1 \mu_2 \cos 2\alpha_1 + B_1^1 \sin 2\alpha_1 - B_2^1 \mu_2 \sin 2\alpha_1 &= 1 - \mu_2 \\ A_1^1 - \mu_2 A_2^1 &= 1 - \mu_2, & A_2^2 \cos 2\alpha_2 - B_2^2 \sin 2\alpha_2 &= 1 \\ B_1^1 - B_2^1 &= 0, & A_1^1 \cos 2(\alpha_1 + \alpha_2) + B_1^1 \sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) &= 1 \\ & & - A_1^1 \sin 2\alpha_1 + A_2^1 \sin 2\alpha_1 + B_1^1 \cos 2\alpha_1 - B_2^1 \cos 2\alpha_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Определителем системы (1.14) будет $\Delta(2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_2, \mu_3) = \Delta_0$.

Когда $\Delta_0^0 = \Delta(2, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \mu_2^0, \mu_3^0) = 0$, частное решение $U_i^{(i)}$ можно получить предельным переходом при $\alpha_i \rightarrow \alpha_i^0, \mu_j \rightarrow \mu_j^0$, предварительно объединяя первые два слагаемых частного решения (1.13) со слагаемыми общего решения, соответствующими собственному значению, стремящемуся к 2.

Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи, согласующееся с граничными условиями (1.2) и не приводящее к накоплению бесконечной энергии упругой деформации в ограниченном объеме, можно представить в виде ряда

$$U_i(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{k/2} (A_i^{(k)} \cos k\varphi + B_i^{(k)} \sin k\varphi) + U_i^0 \quad (i_k > 0) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.15)$$

Компоненты касательного напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ определяются через функцию напряжений $U(r, \varphi)$ формулами

$$\tau_{rz} = G\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \tau_{\theta z} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial r} \quad (1.16)$$

где G — модуль сдвига скручиваемого стержня, θ — относительный угол закручивания.

Из представления функции $U(r, \varphi)$ в виде (1.15) и выражений компонент напряжения (1.16) видно, что, если значение параметра λ

лежит в интервале $(0, 1)$, при приближении к угловой точке линии раздела областей поперечного сечения напряжения неограниченно возрастают. Поэтому определение характера напряженного состояния в рассматриваемой задаче кручения составного призматического стержня сводится к исследованию существования корней трансцендентного уравнения (1.10) в интервале $(0, 1)$ при различных сочетаниях значений углов и модулей сдвига. Порядок особенностей при этом равен $l - 1$. Трансцендентное уравнение (1.10), определяющее систему собственных значений $\{\lambda_k\}$, в общем случае содержит пять параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_2, \mu_3$ и его можно интерпретировать как уравнение некоторой выпуклой поверхности в пятимерном пространстве, зависящей от параметра λ . Проведя различные сечения поверхности $\lambda = 1$, для отдельных конкретных случаев можно получить двумерные области изменения параметров, где напряжения в угловой точке контура поперечного сечения не имеют особенностей.

Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Допустим, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$$

Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$\Delta(\lambda, \alpha, \mu_2, \mu_3) = \sin \lambda \alpha \left| \sin^2 \lambda \alpha - \frac{\mu_2 + \mu_3 + 1}{(\mu_2 + 1)(\mu_3 + 1)} \right| = 0$$

откуда, так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mu_2 + \mu_3 + 1}{(\mu_2 + 1)(\mu_3 + 1)} = 0$$

вытекает, что для любых малых углов α возможны такие модули сдвига составляющих стержень материалов, при которых в угловой точке контура поперечного сечения напряжения имеют особенность.

2. Допустим $\alpha_1 = n\alpha, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \mu_2 = \mu_3 = \mu$, причем $(n+2)\alpha < 2\pi$. Тогда из уравнения (1.10) при $\lambda = 1$ получим

$$\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{n\alpha}{2} \quad (1.17)$$

В плоскости (α, μ) кривые (1.17) для некоторых значений n изображены на фиг. 2.

При фиксированном n для тех значений параметров α и μ , которые принадлежат области плоскости (α, μ) , лежащей между кривой (1.17) и координатными осями и расположенной на стороне начала координат, напряжения не имеют особенностей. В общем случае при $\lambda = 1$ уравнение (1.10) можно представить в виде

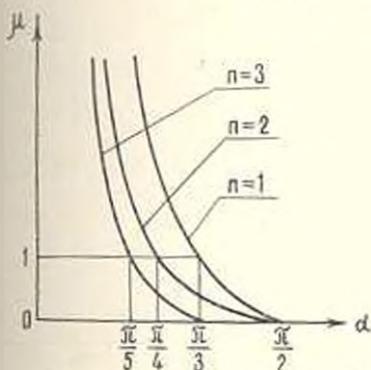
$$\mu_2 = \frac{\mu_2 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2}{\mu_2 - \operatorname{ctg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_1} \quad (1.18)$$

На плоскости (μ_2, μ_3) уравнение (1.18) представляет гиперболу, зависящую от значений углов α_1, α_2 и α_3 (фиг. 3) с центром в точке C , имеющей координаты

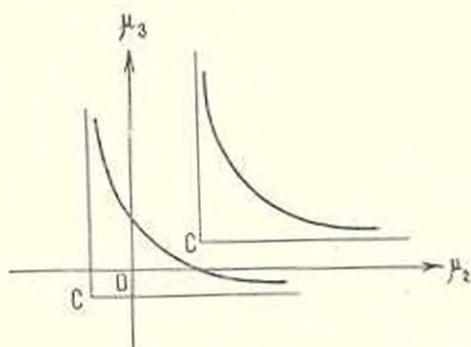
$$\mu_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2, \quad \mu_3 = \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_3 \quad (1.19)$$

Внутренние точки области на плоскости (μ_2, μ_3) , расположенной между гиперболой и координатными осями, свободны от особенностей напряжений. Из выражений (1.19) для координат центра гиперболы видно, что при увеличении центрального угла α_1 , соответствующего области 1 поперечного сечения, точка C стремится к началу координат и при $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ совпадает с ним. При дальнейшем увеличении центр гиперболы переходит в третий квадрант и ветви гиперболы пересекаются с координатными осями, т. е. область параметров μ_{ij} , где напряжения не имеют особенностей, в этом случае конечна (фиг. 3). В табл. 1 приведены значения λ для различных случаев параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_2$ и μ_3 , когда напряжения в угловой точке контура поперечного сечения имеют особенности. Эти значения получены из уравнения (1.10), когда параметры μ_2, μ_3 и α_3 фиксированы, а α_1 и α_2 , начиная с $\frac{\pi}{12}$, возрастают с шагом $\frac{\pi}{12}$ до получения корня трансцендентного уравнения в интервале $(0,1)$. Допустим, что это достигается при значениях

$$\alpha_i = \alpha_i^0, \quad \mu_j = \mu_j^0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 2, 3)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Если $\alpha_i < \alpha_i^0$ и $\mu_j < \mu_j^0$ все корни уравнения (1.10) $\lambda_k > 1$ ($k = 1, 2, \dots$) и, как это видно из формул (1.16) компонент напряжений, при приближении к угловой точке контура поперечного сечения напряжения стремятся к нулю. Из табл. 1 видно, что наибольший порядок особенности во всех рассмотренных случаях получается при

Таблица 1

$\alpha_2 = 2 \frac{\pi}{12}$	$\frac{\alpha_1}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$2 \cdot \frac{1}{12}$	$3 \cdot \frac{1}{12}$	$4 \cdot \frac{1}{12}$	$5 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$
$\mu_2 = 1.1$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$13 \cdot \frac{1}{12}$	$13 \cdot \frac{1}{12}$	$12 \cdot \frac{1}{12}$	$9 \cdot \frac{1}{12}$	$2 \cdot \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_2 = 15$	λ	0.90483	0.89421	0.93411	0.94190	0.86589	0.78306
$\mu_2 = 2$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$13 \cdot \frac{1}{12}$	$12 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$2 \cdot \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{0}{12}$
$\mu_2 = 15$	λ	0.89113	0.92598	0.94129	0.88051	0.84257	0.75895
$\mu_2 = 10$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$4 \cdot \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_2 = 15$	λ	0.91079	0.89383	0.73145	0.63261	0.54627	0.51333
$\mu_2 = 20$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$2 \cdot \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_2 = 15$	λ	0.86620	0.79702	0.64990	0.56086	0.49948	0.45383
$\mu_2 = 30$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$2 \cdot \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_2 = 15$	λ	0.82465	0.76048	0.61894	0.53339	0.47446	0.43063
$\mu_2 = 0.9$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$				
$\mu_2 = 0.07$	λ	0.90527	0.88809	0.87625	0.86685	0.85855	0.85053
$\mu_2 = 0.5$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$				
$\mu_2 = 0.07$	λ	0.92662	0.90050	0.88501	0.87392	0.86488	0.85676
$\mu_2 = 0.1$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$8 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$				
$\mu_2 = 0.07$	λ	0.86594	0.92132	0.89759	0.89304	0.87237	0.86352
$\mu_2 = 0.05$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$8 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$				
$\mu_2 = 0.07$	λ	0.87576	0.92497	0.89956	0.89436	0.87341	0.86442
$\alpha_2 = 2 \frac{\pi}{12}$	$\frac{\alpha_1}{\pi}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$8 \cdot \frac{1}{12}$	$9 \cdot \frac{1}{12}$	$10 \cdot \frac{1}{12}$	$11 \cdot \frac{1}{12}$	
$\mu_2 = 1.1$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$			
$\mu_2 = 15$	λ	0.78306	0.71622	0.66101			
$\mu_2 = 2$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$			
$\mu_2 = 15$	λ	0.69296	0.63925	0.59150			
$\mu_2 = 10$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$			
$\mu_2 = 15$	λ	0.47343	0.44106	0.41409			

Таблица 1 (Продолжение)

$\mu_2=20$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$		
$\mu_3=15$	λ	0.41812	0.38920	0.36513		
$\mu_2=30$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$		
$\mu_3=15$	λ	0.39637	0.36860	0.34550		
$\mu_2=0.9$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$	$5 \cdot \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.84266	0.94758	0.92335	0.94913	0.93038
$\mu_2=0.5$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$	$5 \cdot \frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.84866	0.84008	0.94250	0.91646	0.93432
$\mu_2=0.1$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.85541	0.84732	0.83859	0.93902	0.91164
$\mu_2=0.05$	$\frac{\alpha_2}{\pi}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$7 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$	$6 \cdot \frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.85627	0.84821	0.83957	0.94151	0.91501

$$\mu_2 = 15, \mu_3 = 30, \alpha_1 = \frac{9}{12}\pi, \alpha_2 = \frac{2}{12}\pi, \alpha_3 = \frac{\pi}{12}$$

когда $\lambda - 1 = -0.6544$. При $\mu_2 = 15, \mu_3 = 30, \alpha_2 = \frac{2}{12}\pi, \alpha_1 = \frac{\pi}{12}$ и

$\alpha_3 = \frac{2}{12}\pi$, т. е. при суммарном угле $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 75^\circ$ порядок осо-

бенности равен -0.17535 . Когда $\mu_2 < 1$, напряжения имеют особен-

ность при $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$, если только α_1 достаточно большое. На-

пример, при $\mu_2 = 0.03, \mu_3 = 0.07, \alpha_1 = \frac{11}{12}\pi$ особенность появляется

только при общем угле $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 270^\circ$.

2. В случае, когда точка пересечения линий разделов областей поперечного сечения, соответствующих различным материалам, находится внутри поперечного сечения скручиваемого составного стержня, начало полярной системы координат помещаем в этой точке, а ось $\varphi = 0$ направляем по одной из линий разделов областей (фиг. 4). Аналогично вышеуказанному, в случае криволинейности ветвей линий разделов областей поперечного сечения заменим их касательными в точке их пересечения.

Функция напряжений $U(r, \varphi)$ удовлетворяет в каждой из областей поперечного сечения уравнению (1.1) и следующим условиям на ветвях линии разделов:

$$G_1 U_1(r, 0) = G_3 U_3(r, 0), \quad G_1 U_1(r, \alpha_1) = G_2 U_2(r, \alpha_1) \\ G_2 U_2(r, 2\pi - \alpha_2) = G_3 U_3(r, -\alpha_2)$$

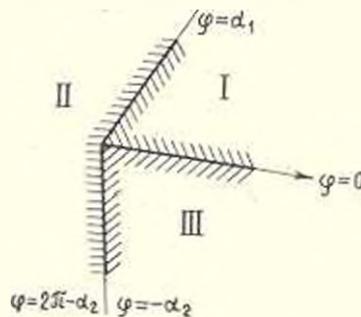
$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=2\pi-\alpha_2} = \left. \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=-\alpha_2}, \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0}, \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\alpha_1} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\alpha_1} \quad (2.1)$$

Решение уравнения (1.1) в каждой из областей I, II и III поперечного сечения можно представить в виде

$$U_i(r, \varphi) = R_i(r) \Phi_i(\varphi) = \\ = r^{\lambda_i} (A_i \cos \lambda_i \varphi + B_i \sin \lambda_i \varphi) + \frac{r^2}{2} (A_i \cos 2\varphi + B_i \sin 2\varphi - 1) \quad (2.2) \\ i = (1, 2, 3)$$

где коэффициенты A_i и B_i частного решения U_i^0 определяются из условий (2.1). Удовлетворив граничным условиям (2.1), на основании (2.2) получим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \\ G_1 A_1 - G_3 A_3 = 0, \quad B_1 - B_3 = 0, \quad -A_1 \sin \lambda \alpha_1 + B_1 \cos \lambda \alpha_1 + \\ + A_2 \sin \lambda \alpha_1 - B_2 \cos \lambda \alpha_1 = 0 \\ G_1 (A_1 \cos \lambda \alpha_1 + B_1 \sin \lambda \alpha_1) - G_2 (A_2 \cos \lambda \alpha_1 + B_2 \sin \lambda \alpha_1) = 0 \quad (2.3) \\ G_2 (A_3 \cos \lambda \alpha_2 - B_3 \sin \lambda \alpha_2) - G_2 [A_2 \cos (2\pi - \alpha_2) \lambda + B_2 \sin (2\pi - \alpha_2) \lambda] = 0 \\ A_3 \sin \lambda \alpha_2 + B_3 \cos \lambda \alpha_2 + A_2 \sin (2\pi - \alpha_2) \lambda - B_2 \cos (2\pi - \alpha_2) \lambda = 0$$



Фиг. 4.

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (2.3) после некоторых преобразований получим трансцендентное уравнение относительно λ

$$\begin{aligned} & [\nu_2(\nu_2 + 1)^2 + \nu_2 - \nu_2] \sin^2 \alpha_1 = -\nu_2(\nu_2 - 1)^2 \sin^2 (\pi - \alpha_1) \lambda - \\ & - (\nu_2 - \nu_2)^2 \sin^2 (\pi - \alpha_2) \lambda - (\nu_2 - 1)(\nu_2 - \nu_2)(\nu_2 + 1) \times \\ & \times \cos [2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)] \lambda \sin \lambda \alpha_1 \sin \lambda \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{где } \nu_2 = \frac{G_2}{G_1}, \quad \nu_2 = \frac{G_2}{G_1}.$$

Общее решение однородной задачи (1.1) — (1.2) можно представить в виде

$$D(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)} r^{\lambda_k} \Phi^{(k)}$$

где $\Phi^{(k)}$ — собственные функции однородной краевой задачи для определения Φ , соответствующие собственным значениям λ_k , которые являются корнями уравнения (2.4). Используя дифференциальное уравнение (1.5) и граничные условия (2.1), можно показать, как это сделано в п. 1, что: 1) система функций $\{\Phi^{(k)}\}$ на отрезке $[-\alpha_2, 2\pi - \alpha_2]$ ортогональна с весом

$$G(\varphi) = \begin{cases} G_1 & 0 \leq \varphi \leq \alpha_1 \\ G_2 & \alpha_1 \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha_2 \\ G_2 & -\alpha_2 \leq \varphi \leq 0 \end{cases}$$

2) все собственные значения граничной задачи (1.5), (2.1) действительны и 3) система функций $\{\Phi^{(k)}\}$ на отрезке $[-\alpha_2, 2\pi - \alpha_2]$ полна в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.1). Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде (1.15).

Как отмечалось в п. 1, задача о выявлении особенностей напряженного состояния в точке пересечения линий разделов областей поперечного сечения скручиваемого составного стержня сводится к исследованию существования и интервале (0,1) корней трансцендентного уравнения (2.4) при различных сочетаниях значений углов и модулей сдвига. Рассмотрим частный случай.

Допустим $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Трансцендентное уравнение (2.4) примет вид

$$\cos^2 \frac{\lambda \pi}{2} = \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)^2}{2(\nu_2 + 1)(\nu_2 + 1)(\nu_2 + \nu_2)}$$

откуда вытекает, что если $\nu_2 \neq 1$, при любых ν_1 и ν_2 напряжения в точке пересечений линий разделов областей поперечного сечения имеют особенность. Численным анализом можно показать, что если G_1 , G_2 и G_3 полярно разные, в этой точке напряжения имеют особенность, независимо от величин углов α_1 , α_2 и от отношения модулей сдвига.

В заключение заметим, что исследования аналогичных задач электростатики для составных сред можно провести при помощи результатов, полученных другим методом в работе [10].

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 5 V 1968

Ս. Խ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԵՍԻ ԻՆՏԵՐՆԱԿԱՆ
ՈՒՐՐՎՈՂ ԶՈՂԻ
ԸՆԴՀԱՆՈՒՄԻ ԶԱՏՈՒՅՑԻ ԵՂՐԱԳՄԻ ԵՎ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԳԾԻ
ԱՆԿՈՒՆԱՅԻՆ ԿՑԵՐԻ ՄԱՏ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՋԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրված են՝ յարամների եղակիությունները երեք տարրեր իզոտրոպ նյութերից պատրաստած ձողի ընդլայնական հատույթի եզրաղծի և բաժանման դծի անկյունային կետերի մոտ:

Բնկույթին կոորդինատական սխեմանում կառուցված է անդամային լուծում. որը թույլ է տալիս գիտարկված խնդիրները բերել եղակիության կարգի նկատմամբ տրանսցենդենտ հավտարման, կախված անկյունների մեծություններից և մարմինը կազմող նյութերի դեֆորմացիոն հատկություններից:

S. KH. GEVORGIAN

THE SINGULARITIES OF STRESSES NEAR THE CORNER POINTS
OF THE LINE OF CONTACT AND THE CONTOUR OF THE
CROSS SECTION OF A TWISTED ROD CONSISTING
OF THREE DIFFERENT MATERIALS

S u m m a r y

The singularities of stresses near the corner points of the line of contact and contour of the cross section of the twisted rod which consists of three different isotropic materials are investigated.

The local solution in the polar system of coordinates is constructed. The investigated problem is reduced to the transcendental equation with respect to the degree of singularity which depends on the magnitudes of angles and deformation characteristics of the body materials.

Numerical examples are considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Веква И. Н., Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПММ, т. 1, вып. 2, 1933, 167—178.
3. *Шерман Д. И.* Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб. АН СССР, т. 10, 1951.
4. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, т. VIII, №2, 1955, 17—30.
5. *Хатиашвили Г. М.* Задача Альмагси-Митчелля для составного бруса. Тр. вычисл. центра АН Груз. ССР, т. II, 1961.
6. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. Journ. Appl. Mech., v. 19, 1952.
7. *Цзянь Вэй-чан, Линь Хунь-сунь, Ху Хай-чан, Е Кай-юань.* Теория кручения цилиндрических тел (на китайском языке). Пекин, 1956.
8. *Чобанян К. С.* Об особенностях распределения напряжений около угловых точек линии раздела и контура сечения скручиваемого составного стержня. Доклад на общем годичном собрании АН Арм. ССР, 1966.
9. *Геворкян С. Х.* Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, №4, 1968.
10. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.