

В. С. ТОНОЯН

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ С ДВУМЯ УЧАСТКАМИ КОНТАКТА

Рассмотрена задача о давлении жесткого штампа нормальной силой  $P$  на верхнюю границу упругой изотропной бесконечной полосы, когда на двух участках нижней границы предполагается скользящая заделка. Задача сначала сведена к системе „парных“ интегральных уравнений, которые затем преобразуются в систему двух регулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Доказано, что последнюю систему можно решить методом последовательных приближений. В частности, при  $h \rightarrow \infty$  получена известная контактная задача для полуплоскости\*.

Осесимметричная контактная задача с двумя участками контакта для упругого слоя рассматривалась в работах Н. Н. Лебедева, Я. С. Уфлянда [1], Р. Д. Лоу [2] и Ю. Н. Кузьмина, Я. С. Уфлянда [3].

Контактная задача с двумя круговыми участками контакта для упругого полупространства рассмотрена в работе В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко [4].

### § 1. Постановка задачи и сведение ее к системе „парных“ интегральных уравнений

Рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа нормальной силой  $P$  на верхнюю границу упругой изотропной бесконечной полосы, когда на двух участках нижней границы предполагается скользящая заделка (фиг. 1), то есть на части верхней границы полосы задается нормальное перемещение, а на нижней границе, соответствующей этой части, отсутствует нормальное напряжение. Остальная часть верхней границы полосы свободна от нормальных напряжений, а на соответствующей части нижней границы нормальное перемещение равно нулю. На всех этих границах отсутствует касательное напряжение.

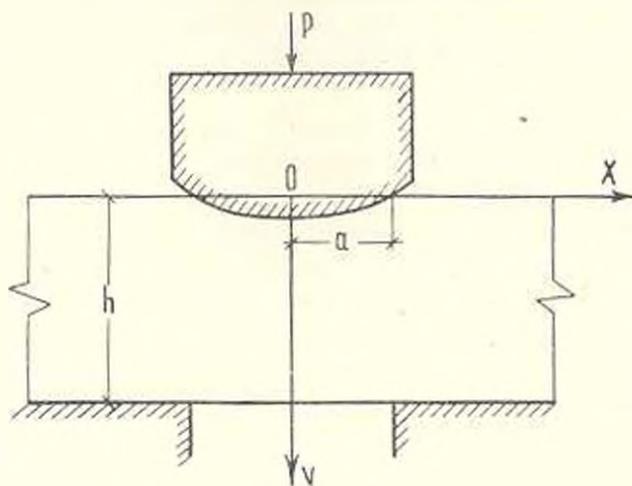
Будем пользоваться известными выражениями смещений и напряжений через бигармоническую функцию

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \varepsilon_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ u &= \frac{1}{E} \left[ \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial F}{\partial x} \right] - a_0 y + b_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

\* Работа доложена на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

$$v = \frac{1}{E} \left[ \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial F}{\partial y} \right] + a_0 x + c_0 \quad (1.1)$$

где  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В силу симметрии граничных условий относительно оси  $Oy$ , можно ограничиться рассмотрением только правой половины упругой бесконечной полосы.



Фиг. 1.

Поставленная задача состоит в нахождении одной бигармонической в области  $0 < x < \infty$ ,  $0 < y < h$  функции  $F(x, y)$ , удовлетворяющей граничным условиям

$$v(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq a), \quad \tau_y(x, 0) = 0 \quad (a < x < \infty) \quad (1.2)$$

$$\sigma_y(x, h) = 0 \quad (0 \leq x < a), \quad v(x, h) = 0 \quad (a \leq x < \infty)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(x, h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (1.3)$$

и условиям симметрии

$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 < y < h) \quad (1.4)$$

Кроме того, при  $x \rightarrow \infty$  функция  $F$  должна стремиться к нулю. Будем искать решение задачи в виде интегрального разложения Фурье

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} \{ A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + B(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y [ C(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + D(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y ] \} \cos \alpha x d\alpha \quad \begin{matrix} (0 \leq x < \infty) \\ (0 \leq y \leq h) \end{matrix} \quad (1.5)$$

Здесь  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  и  $D(\alpha)$  — функции, подлежащие определению из граничных условий при  $y = 0$  и  $y = h$ .

Используя формулы (1.1) и (1.5), будем иметь

$$\sigma_x = \int_0^{\infty} \alpha^2 \{ [A(\alpha) + 2D(\alpha)] \operatorname{ch} \alpha y - [B(\alpha) + 2C(\alpha)] \operatorname{sh} \alpha y +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2y[C(z) \operatorname{ch} 2y - D(z) \operatorname{sh} 2y] \cos 2x dz \\
 a_y = & - \int_0^{\infty} z^2 \{A(z) \operatorname{ch} 2y + B(z) \operatorname{sh} 2y + 2y[C(z) \operatorname{ch} 2y + \\
 & + D(z) \operatorname{sh} 2y]\} \cos 2x dz \\
 2xy = & \int_0^{\infty} z^3 \{[A(z) + D(z)] \operatorname{sh} 2y + [B(z) + C(z)] \operatorname{ch} 2y + \\
 & + 2y[C(z) \operatorname{sh} 2y - D(z) \operatorname{ch} 2y]\} \sin 2x dz \quad (1.6) \\
 u = & \frac{1}{E} \int_0^{\infty} z \{[(1 + \nu) A(z) + 2D(z)] \operatorname{ch} 2y + [(1 + \nu) B(z) + 2C(z)] \operatorname{sh} 2y + \\
 & + (1 + \nu) 2y [C(z) \operatorname{ch} 2y + D(z) \operatorname{sh} 2y]\} \sin 2x dz - a_0 y + b_0 \\
 v = & - \frac{1}{E} \int_0^{\infty} z \{[(1 + \nu) A(z) - (1 - \nu) D(z)] \operatorname{sh} 2y + [(1 + \nu) B(z) - \\
 & - (1 - \nu) C(z)] \operatorname{ch} 2y + (1 + \nu) 2y [C(z) \operatorname{sh} 2y + \\
 & + D(z) \operatorname{ch} 2y]\} \cos 2x dz + a_0 x + c_0
 \end{aligned}$$

Так как при  $x \rightarrow \infty$  перемещения  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  должны стремиться к нулю, то в формулах (1.6) следует положить  $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ .

Легко видеть, что условия симметрии (1.4) удовлетворяются тождественно.

Условием отсутствия касательных напряжений на границах полосы (1.3) можно удовлетворить при помощи связей

$$\begin{aligned}
 B(z) & = -C(z) \\
 A(z) & = -zh C(z) - [1 + zh \operatorname{cth} 2h] D(z) \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Исключая при помощи (1.7) величины  $A(z)$  и  $B(z)$  и вводя вместо  $C(z)$  и  $D(z)$  новые неизвестные величины  $C^*(z)$  и  $D^*(z)$ , из оставшихся граничных условий (1.2) получаем следующую систему „парных“ интегральных условий:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} C^*(z) \cos 2x dz & = \frac{E}{2} f(x) \quad 0 \leq x \leq a \\
 \int_0^{\infty} z \left\{ C^*(z) \operatorname{sh} 2h + \frac{zh + \operatorname{sh} 2h \operatorname{ch} 2h}{\operatorname{sh} 2h} D^*(z) \right\} \cos 2x dz & = 0 \quad 0 \leq x < a \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^a |C^*(z) \operatorname{ch} zh + D^*(z) \operatorname{sh} zh| \cos zx \, dz = 0 \quad a \leq x < \infty \quad (1.9)$$

$$\int_0^{\infty} z [zh C^*(z) + (1 + zh \operatorname{cth} zh) D^*(z)] \cos zx \, dz = 0 \quad a < x < \infty$$

В (1.8), (1.9) введены обозначения

$${}_z C(z) = C^*(z), \quad {}_z D(z) = D^*(z) \quad (1.10)$$

## § 2. Определение функций $C^*(z)$ и $D^*(z)$

Умножая уравнения (1.8) на  $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ , интегрируя по  $x$  в пределах от 0 до  $r$ , меняя порядок интегрирования и имея в виду интегральное представление Пуассона для  $J_0(zr)$  через  $\cos zx$

$$J_0(zr) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\cos zx \, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (2.1)$$

получим

$$\int_0^a C^*(z) J_0(zr) \, dz = \frac{E}{\pi} \int_0^r \frac{f(x) \, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.2)$$

$$\int_0^{\infty} z \left[ C^*(z) \operatorname{sh} zh - \frac{zh + \operatorname{sh} zh \operatorname{ch} zh}{\operatorname{sh} zh} D^*(z) \right] J_0(zr) \, dz = 0 \quad 0 \leq r < a$$

Дифференцируя первое уравнение (1.9) по  $x$ , интегрируя второе уравнение по  $x$  от 0 до  $x$ , умножая полученные выражения на  $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 - r^2}}$ , интегрируя затем по  $x$  в пределах от  $r$  до  $\infty$ , меняя порядок интегрирования и учитывая интегральное представление Пуассона для  $J_0(zr)$  через  $\sin zx$

$$J_0(zr) = \frac{2}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\sin zx \, dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad (2.3)$$

получаем

$$\int_0^a z [C^*(z) \operatorname{ch} zh + D^*(z) \operatorname{sh} zh] J_0(zr) \, dz = 0 \quad a \leq r < \infty \quad (2.4)$$

$$\int_0^{\infty} [zh C^*(z) + (1 + zh \operatorname{cth} zh) D^*(z)] J_0(zr) \, dz = 0 \quad a < r < \infty$$

где  $J_0(zr)$  — функции Бесселя первого рода с действительным аргументом. Таким образом, вместо системы (1.8), (1.9) получаем систему (2.2) и (2.4) относительно  $C^*(z)$  и  $D^*(z)$ .

Подобные системы рассматривались в работах Н. Н. Лебедева, Я. С. Уфлянда [1], Р. Д. Лоу [2], Ю. Н. Кузьмина, Я. С. Уфлянда [3].

Для решения системы (2.2) и (2.4) введем новые неизвестные  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  следующим образом [1—3]:

$$C^*(\alpha) \operatorname{ch} \alpha h + D^*(\alpha) \operatorname{sh} \alpha h = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \Phi(t) \sin \alpha t dt, \quad \Phi(0) = 0 \quad (2.5)$$

$$\alpha h C^*(\alpha) + (1 + \alpha h \operatorname{cth} \alpha h) D^*(\alpha) = \alpha \int_0^{\alpha} \Psi(t) \cos \alpha t dt$$

Подстановка (2.5) дает возможность удовлетворить уравнениям (2.4).

Для удовлетворения уравнениям (2.2) выражаем  $C^*(\alpha)$  и  $C^*(\alpha) \operatorname{sh} \alpha h + (\alpha h + \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h) D^*(\alpha) \operatorname{sh} \alpha h$  через функции  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$ .

$$C^*(\alpha) = [g_1(\alpha h) - 1] \int_0^{\alpha} \Psi(t) \cos \alpha t dt + g_2(\alpha h) \int_0^{\alpha} \Phi(t) \sin \alpha t dt \quad (2.6)$$

$$C^*(\alpha) \operatorname{sh} \alpha h + (\alpha h + \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h) D^*(\alpha) \operatorname{sh} \alpha h = -g_2(\alpha h) \int_0^{\alpha} \Psi(t) \cos \alpha t dt - [1 - g_1(\alpha h)] \int_0^{\alpha} \Phi(t) \sin \alpha t dt \quad (2.7)$$

где

$$g_1(\alpha h) = 1 - \alpha \operatorname{sh}^2 \alpha h / E(\alpha h), \quad g_2(\alpha h) = (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h) / E(\alpha h) \\ g_3(\alpha h) = \alpha (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h) / E(\alpha h), \quad g_4(\alpha h) = 1 + (\alpha^2 h^2 - \operatorname{sh}^2 \alpha h) / \alpha E(\alpha h) \\ E(\alpha h) = \alpha h + \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h \quad (2.8)$$

Если теперь подставить (2.7), (2.8) в уравнения (2.2), воспользоваться (2.1) и переставить порядок интегрирования, то получим следующую систему уравнений относительно искомых функций  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$ :

$$\int_0^{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \left\{ \Psi(z) - \int_0^z \Psi(t) [G_1(z+t) + G_1(z-t)] dt - \right. \\ \left. - \int_0^z \Phi(t) [G_2(z+t) - G_2(z-t)] dt \right\} = -f_1(r) \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.9)$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \left\{ \Psi'(z) + \int_0^a \Psi(t) [G_3(z+t) + G_3(z-t)] dt + \right. \\ \left. + \int_0^a \Phi(t) [G_4(z+t) - G_4(z-t)] dt \right\} = 0 \quad (2.10)$$

Здесь введены обозначения

$$G_2(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_1(ah) \cos uah da, \quad G_3(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_2(ah) \sin uah da \\ G_3(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_3(ah) \sin uah da, \quad G_4(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_4(ah) \cos uah da \quad (2.11)$$

$$f_1(r) = \frac{E}{\pi} \int_0^z \frac{f(x) dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (2.12)$$

Решая (2.9) и (2.10) как интегральные уравнения Абеля с известными правыми частями, приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\Psi(z) = f_2(z) + \int_0^a K_1(z, t) \Psi(t) dt + \int_0^a K_2(z, t) \Phi(t) dt \quad (2.13)$$

$$\Phi(z) = - \int_0^a K_3(z, t) \Psi(t) dt - \int_0^a K_4(z, t) \Phi(t) dt \quad (2.14)$$

ядра которых даются формулами

$$K_1(z, t) = G_1(z+t) + G_1(z-t), \quad K_2(z, t) = G_3(z+t) - G_3(z-t) \quad (2.15)$$

$$K_3(z, t) = G_3(z+t) + G_3(z-t), \quad K_4(z, t) = G_4(z+t) - G_4(z-t)$$

$$f_2(z) = - \left| \frac{2}{\pi} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{rf_1(r)}{z^2 - r^2} dr \right. \quad (2.16)$$

При получении уравнения (2.14) интегрировали уравнение (2.10) по  $z$  в пределах от 0 до  $z$  и имели в виду, что  $\Phi(0) = 0$ ,  $G_3(u)$  — нечетная функция, а  $G_4(u)$  — четная функция.

Для получения конкретных результатов при различных значениях геометрических параметров следует применить какие-либо численные методы для определения функций  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  из систем (2.13), (2.14).

Систему интегральных уравнений (2.13) и (2.14) можно решить методом последовательных приближений, так как

$$\int_0^a |K_1(z, t)| dt + \int_a^\infty |K_2(z, t)| dt < 1$$

$$\int_0^a |K_3(z, t)| dt + \int_a^\infty |K_1(z, t)| dt < 1$$
(2.17)

После получения решения уравнений (2.13), (2.14) методом последовательных приближений, нетрудно найти функции  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$ ,  $D(x)$  посредством квадратуры, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке бесконечной полосы.

Нормальное напряжение  $\sigma_y(x, 0)$ ,  $\sigma_y(x, h)$  под штампами, выраженное через функции  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$ , имеет вид

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\Psi'(a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int_x^a \frac{\Psi''(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \quad (0 \leq x < a) \quad (2.18)$$

$$\sigma_y(x, h) = \frac{\pi}{2} \left\{ \Psi'(x) + \int_0^a \Psi(t) [G_2(x+t) + G_3(x-t)] dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^a \Phi(t) [G_4(x+t) - G_4(x-t)] dt \right\} \quad (a < x < \infty) \quad (2.19)$$

В частном случае, переходя к пределу при  $h \rightarrow \infty$ , получим задачу о давлении жесткого штампа с произвольным основанием на упругую полуплоскость, рассмотренную в работах многих авторов. В этом случае система интегральных уравнений (2.13), (2.14) отпадает, одна из неизвестных функций  $\Phi(x) = 0$ , а другая  $\Psi(x)$  приравнивается свободному члену. Следовательно, решение этой задачи получается в замкнутом виде. Если в этом частном случае положим и  $f(x) = \text{const}$  (штамп с плоским основанием), то получим

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = f_2(z) = -\frac{P}{\pi} \quad \left( P = -2 \int_0^a \sigma_y(x, 0) dx \right)$$

и формула (2.18) перейдет в известную формулу

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad 0 \leq x < a \quad (2.20)$$

В качестве примера рассмотрим задачу вдавливания жесткого штампа с плоским основанием в верхнюю границу упругой изотропной бесконечной полосы. В этом случае  $f(x) = \delta = \text{const}$  и формулы (2.12), (2.16) дают

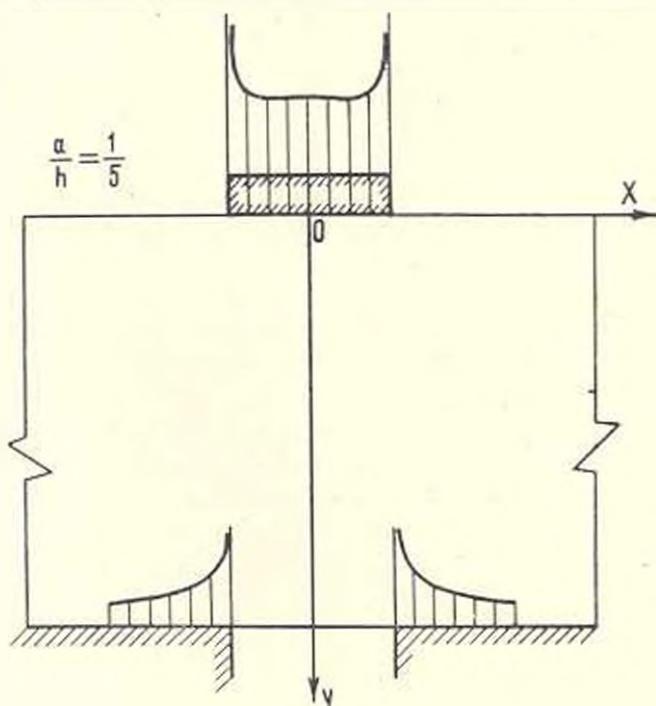
$$f_1(r) = E\delta/2, \quad f_2(z) = -E\delta/\pi$$

Некоторые значения напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  и  $\sigma_y(x, h)$ , вычисленные по формулам (2.18) — (2.19) для различных точек границы бесконечной полосы в зависимости от  $\varepsilon = a/h$ , приведены в табл. 1.

Таблица 1

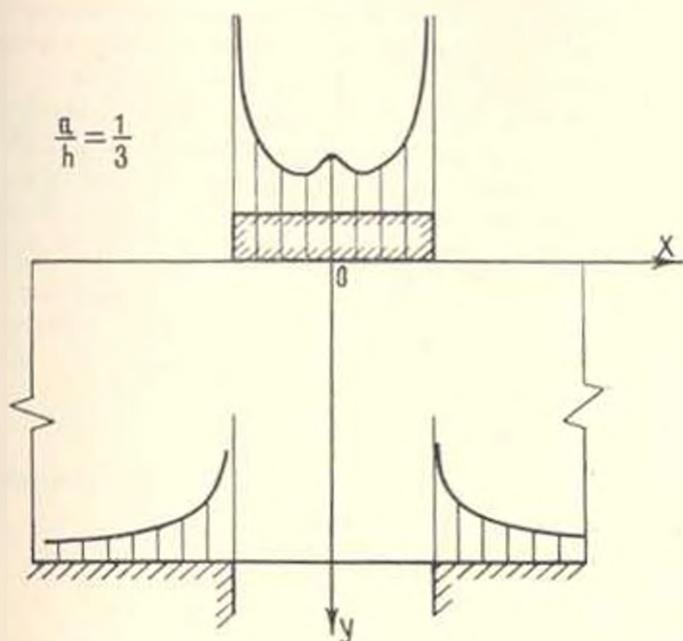
$-\sigma_y(x, 0) a^2/P$			$-\sigma_y(x, h) a^2/P$		
$x$	$\varepsilon$		$x$	$\varepsilon$	
	1/5	1/3		1/5	1/3
0	0.5885	0.4349	$5a/4$	0.2611	0.2256
$a/4$	0.5722	0.3485	$3a/2$	0.1939	0.1987
$a/2$	0.5808	0.3984	$7a/4$	0.1747	0.1517
$3a/4$	0.5875	0.4982	$2a$	0.1440	0.1402

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений  $\sigma_y(x, 0)$ ,  $\sigma_y(x, h)$  под штампами на фиг. 2 и 3 приведены

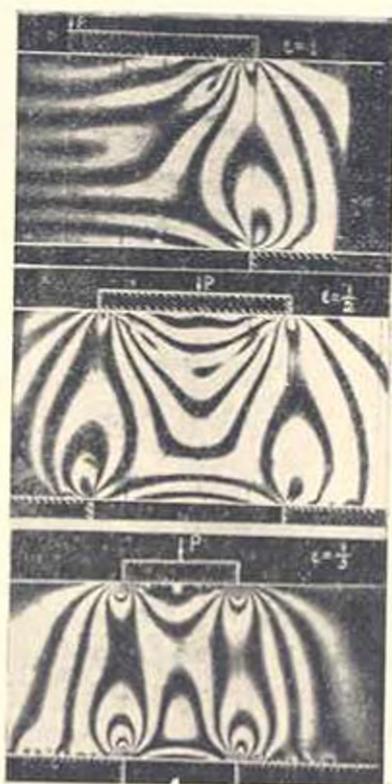


Фиг. 2.

эпюры этих напряжений. Следует отметить, что приведенные эпюры составлены приближенно: на основании расчетов, произведенных только для четырех точек оси. Как показывают произведенные вычисления (табл. 1) и построены графики (фиг. 2, 3), закон распределения нормальных напряжений под штампом для полосы (фиг. 1) существенно отличается от закона распределения соответствующего напряжения под штампом для полуплоскости в том случае, когда ширина полосы довольно узкая ( $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3$ ).



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Закон распределения этого же напряжения для полосы качественно совпадает с законом распределения соответствующего напряжения для полуплоскости при довольно широкой полосе ( $\varepsilon = 1/5$  и т. д.). Это заключение проверено опытом, проведенным в лаборатории фотоупругости Института математики и механики АН АрмССР Р. А. Шириняном. Наконец, на фиг. 4 для случая ( $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3$ ) приводятся фотографии картин изохром (линии равных максимальных касательных напряжений).

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 21 V 1968

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԱՍԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՇԵՐՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ  
ԽՆԳԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ս

Գիտարկվում է առաձգական, իզոտրոպ անվերջ շերտի վերին կզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը, երբ ներքին կզրի երկու մասերում ենթադրվում է սահող ամրացում: Խնդիրը սկզբում բերվում է դուրյ ինտեգրալ համասարումների սխեմով, իսկ հետո փրեզնոյմի երկրորդ ստի երկու սեղալար ինտեգրալ համասարումների սխեմով: Ցույց է տրված, որ այդ սխեմերը կարելի է լուծել հաշորդական մոտափորութունների և գոնականի: Մասնավոր դեպքում, երբ  $h \rightarrow \infty$  ստացվում է կիսահարթութան հարանի կոնտակտային խնդրի լուծումը:

Վերջում բերվում է թվային օրինակ:

V. S. TONOYAN

THE CONTACT PROBLEM FOR THE INFINITE STRIP  
WITH TWO PART CONTACTS

S u m m a r y

The problem of pressing of a rigid punch on the upper bound of the elastic isotropic infinite strip, when the double parts of the lower bound is supposed to be a sliding clamp, is considered. At first, the problem is brought to a system of dual integral equations which is transformed afterwards to the system of Fredholm integral equation of the second kind.

It is shown, that this system can be solved by the methods of successive approximations. In a particular case with  $h \rightarrow \infty$  the solution of the known contact problems for the semi-infinite plain is obtained.

At the end a numerical example is considered.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, т. 22, вып. 3, 1958, 320.
2. Low R. D. On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer. Quarterly of applied mathematics, vol. XXII, No 2, 1964, pp. 153—157.
3. Кузьмин Ю. Н., Уфлянд Я. С. Контактная задача о сжатии упругого слоя двумя штампами. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967, 711.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Контактная задача для двух круговых штампов на упругом полупространстве. Аннотации докладов III Всесоюзного съезда по теорет. и прикл. механике, М., 1968.
5. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.