

А. С. ХАЧИКЯН

РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Равновесие однородной упругой плоскости с прямолинейным тонким включением было рассмотрено в работе [1]. Ниже рассматривается равновесие двух однородных полуплоскостей с различными упругими постоянными, соединенных между собой тонким упругим включением (слоем клея).

1. Рассмотрим находящееся в условиях плоской деформации упругое тело, состоящее из двух однородных полупространств с различными упругими постоянными, соединенных между собой тонким упругим слоем. Согласно [1] на границе включения имеем

$$\tau_{y2} - \tau_{y1} + \frac{T}{\rho} = 0, \quad \tau_{x2} - \tau_{x1} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{T(1 - \nu^2)}{2hE_{\text{вк}}} \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 относится к нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$, индекс 2 — к верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, τ_{xi} , τ_{yi} ($i = 1, 2$) — касательные и нормальные напряжения, u_i , v_i — составляющие вектора перемещений, $E_{\text{вк}}$, $\nu_{\text{вк}}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала включения, $2h$ — толщина включения, ρ — радиус кривизны средней линии включения,

$$T = \int_{-h}^h \tau_x dy$$

Пренебрегая членами порядка $1/\rho$ и используя (1.3), условия (1.1) приведем к виду

$$\tau_{y2} - \tau_{y1} = 0, \quad \tau_{x1} - \tau_{x2} = k \frac{d^2 u_1}{dx^2} \quad (1.4)$$

$$k = \frac{2hE_{\text{вк}}}{1 - \nu_{\text{вк}}} = \frac{4h\nu_{\text{вк}}}{1 - \nu_{\text{вк}}} \quad (1.5)$$

2. Пусть на конечном расстоянии от начала координат на рассматриваемую плоскость действует уравновешенная система n сосре-

доточенных сил $X_j + iY_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), приложенных в точках z_j соответственно. Допустим, что первые m сил ($m \leq n$) приложены в точках нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$, остальные $n - m$ приложены в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

Компоненты тензора напряжений и компоненты вектора смещений через две функции комплексного переменного выражаются формулами [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{y_i} - i\tau_{xy_i} &= \Phi_{0i}(z) + \overline{\Phi_{0i}(z)} + z \overline{\Phi_{0i}(z)} + \overline{\Psi_{0i}(z)} \\ 2\mu_i(u'_i + iv'_i) &= z_i \Phi_{0i}(z) - \overline{\Phi_{0i}(z)} - z \overline{\Phi_{0i}(z)} - \overline{\Psi_{0i}(z)} \end{aligned} \quad (j = 1, 2) \quad (2.1)$$

где

$$\sigma'_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad v'_i = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad \nu_i = 3 - 4\nu_i$$

ν_i — модуль сдвига материала соответствующей полуплоскости.

Функции Φ_{0i} и Ψ_{0i} имеют вид [2]

$$\Phi_{01}(z) = - \sum_{j=1}^m \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \nu_1)} \frac{1}{z - z_j} + \Phi_1(z) \quad (2.2)$$

$$\Psi_{01}(z) = \sum_{j=1}^m \frac{\nu_1(X_j - iY_j)}{2\pi(1 + \nu_1)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=1}^m \frac{\bar{z}_j(X_j + iY_j)}{2\pi(1 + \nu_1)} \frac{1}{(z - z_j)^2} + \Psi_1(z)$$

$$\Phi_{02}(z) = - \sum_{j=m+1}^n \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \nu_2)} \frac{1}{z - z_j} + \Phi_2(z) \quad (2.3)$$

$$\Psi_{02}(z) = \sum_{j=m+1}^n \frac{\nu_2(X_j - iY_j)}{2\pi(1 + \nu_2)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\bar{z}_j(X_j + iY_j)}{2\pi(1 + \nu_2)} \frac{1}{(z - z_j)^2} + \Psi_2(z)$$

Определим функцию $\Phi_1(z)$ в верхней, а $\Phi_2(z)$ в нижней полуплоскостях формулами [2]

$$\Phi_1(z) = - \bar{\Phi}_1(z) - z \bar{\Phi}_1(z) - \bar{\Psi}_1(z) \quad \text{при } z \text{ в } S^+ \quad (2.4)$$

$$\Phi_2(z) = - \bar{\Phi}_2(z) - z \bar{\Phi}_2(z) - \bar{\Psi}_2(z) \quad \text{при } z \text{ в } S^-$$

Определяя из (2.4) $\Psi_1(z)$ и используя (2.2), (2.3), выражения (2.1) приведем к виду

$$\sigma_{y_i} - i\tau_{xy_i} = \Phi_i(z) - \bar{\Phi}_i(z) + (z - z) \overline{\Phi_i(z)} + A_i(z) \quad (2.5)$$

$$2\mu_i(u'_i + iv'_i) = z_i \Phi_i(z) + \bar{\Phi}_i(z) - (z - z) \overline{\Phi_i(z)} + B_i(z)$$

где

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= \sum_{j=1}^m \frac{(1-z_1)X_j + i(1+z_1)Y_j}{2\pi(1+z_1)} \frac{1}{z-z_j} - \\
&- \sum_{j=1}^m \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+z_1)} \frac{1}{z-z_j} + \sum_{j=1}^m \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+z_1)} \frac{z-z_j}{(z-z_j)^2} \\
A_2(z) &= \sum_{j=1}^n \frac{(1-z_2)X_j + i(1+z_2)Y_j}{2\pi(1+z_2)} \frac{1}{z-z_j} - \\
&- \sum_{j=1}^n \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+z_2)} \frac{1}{z-z_j} + \sum_{j=1}^n \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+z_2)} \frac{z-z_j}{(z-z_j)^2} \quad (2.6) \\
B_1(z) &= \sum_{j=1}^m \frac{(1-z_1)X_j - i(1+z_1)Y_j}{2\pi(1+z_1)} \frac{1}{z-z_j} - \\
&- \sum_{j=1}^m \frac{z_1(X_j + iY_j)}{2\pi(1+z_1)} \frac{1}{z-z_j} - \sum_{j=1}^m \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+z_1)} \frac{z-z_j}{(z-z_j)^2} \\
B_2(z) &= \sum_{j=1}^n \frac{(1-z_2)X_j - i(1+z_2)Y_j}{2\pi(1+z_2)} \frac{1}{z-z_j} - \\
&- \sum_{j=1}^n \frac{z_2(X_j + iY_j)}{2\pi(1+z_2)} \frac{1}{z-z_j} - \sum_{j=1}^n \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+z_2)} \frac{z-z_j}{(z-z_j)^2}
\end{aligned}$$

На основании (2.5) для предельных значений напряжений и производных перемещений по x на действительной оси находим

$$\begin{aligned}
z_{y1} - i z_{xy1} &= \Phi_1^-(t) - \Phi_1^+(t) + A_1(t) \\
z_{y2} - i z_{xy2} &= \Phi_2^-(t) - \Phi_2^+(t) + A_2(t) \\
2\mu_1(u_1 + iv_1) &= z_1\Phi_1^-(t) + \Phi_1^+(t) + B_1(t) \\
2\mu_2(u_2 + iv_2) &= z_2\Phi_2^-(t) + \Phi_2^+(t) + B_2(t)
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Внося в граничные условия (1.2), (1.4) выражения для компонентов тензора напряжений и производных компонентов вектора перемещений из (2.7), получаем следующие четыре задачи сопряжения относительно некоторых комбинаций граничных значений искомых функций

$$\begin{aligned}
\Phi_1^-(t) + \Phi_1^+(t) - \Phi_2^-(t) - \Phi_2^+(t) - (\Phi_2^-(t) + \Phi_1^-(t) - \Phi_2^-(t) - \Phi_1^-(t)) = \\
= A_1(t) + \overline{A_1(t)} - A_2(t) - \overline{A_2(t)} \\
\epsilon x_2 \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) - \epsilon \overline{\Phi_2^-(t)} + z_1 \overline{\Phi_1^-(t)} - (z_1 \Phi_1^-(t) - \epsilon \Phi_2^-(t) + \\
+ \epsilon x_2 \overline{\Phi_2^-(t)} - \Phi_1^-(t)) = \overline{B_2(t)} - \epsilon B_2(t) + B_1(t) - \overline{B_1(t)}
\end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon x_2 \Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) - \varepsilon \overline{\Phi_2^-(t)} - x_1 \overline{\Phi_1^-(t)} - (x_1 \Phi_1^-(t) - \varepsilon \overline{\Phi_2^-(t)}) - \\
- \varepsilon x_2 \overline{\Phi_2^-(t)} - \overline{\Phi_1^-(t)} = B_1(t) + \overline{B_1(t)} - \varepsilon B_2(t) - \varepsilon \overline{B_2(t)} \\
k_1 \Phi_1^+(t) + k_1 x_1 \overline{\Phi_1^-(t)} - \Phi_1^+(t) - \Phi_2^-(t) - \overline{\Phi_1^-(t)} - \overline{\Phi_2^-(t)} + \\
+ (\Phi_1^-(t) + \Phi_2^-(t) + \overline{\Phi_1^-(t)} + \overline{\Phi_2^-(t)} + k_1 x_1 \Phi_1^-(t) + \\
+ k_1 \overline{\Phi_1^-(t)}) = A_2(t) - \overline{A_2(t)} - A_1(t) + \overline{A_1(t)} - k_1 B_1(t) - k_1 \overline{B_1(t)}
\end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad k_1 = \frac{k i}{2\mu_1} \quad (2.9)$$

При принятых условиях функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ на бесконечности ведут себя как $\frac{1}{z^n}$.

Решив задачи сопряжения (2.8), для комбинаций граничных значений искомых функций получим

$$\begin{aligned}
\Phi_2^-(t) + \Phi_1^-(t) - \overline{\Phi_2^-(t)} - \overline{\Phi_1^-(t)} &= D_1^-(t) \\
\varepsilon x_2 \Phi_2^-(t) - \Phi_1^-(t) - \varepsilon \overline{\Phi_2^-(t)} + x_1 \overline{\Phi_1^-(t)} &= D_2^-(t) \\
\varepsilon x_2 \Phi_2^-(t) - \Phi_1^-(t) + \varepsilon \overline{\Phi_2^-(t)} - x_1 \overline{\Phi_1^-(t)} &= D_3^-(t) \\
k_1 \Phi_1^-(t) + k_1 x_1 \overline{\Phi_1^-(t)} - \Phi_1^-(t) - \Phi_2^-(t) - \overline{\Phi_1^-(t)} - \overline{\Phi_2^-(t)} &= D_4^-(t)
\end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned}
D_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1(t) + \overline{A_1(t)} - A_2(t) - \overline{A_2(t)}}{t-z} dt \\
D_2(z) &= \frac{1}{2-i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon \overline{B_2(t)} - \varepsilon B_2(t) + B_1(t) - \overline{B_1(t)}}{t-z} dt \\
D_3(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_1(t) + \overline{B_1(t)} - \varepsilon B_2(t) - \varepsilon \overline{B_2(t)}}{t-z} dt \\
D_4(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_2(t) - \overline{A_2(t)} - A_1(t) + \overline{A_1(t)} - k_1 B_1(t) - k_1 \overline{B_1(t)}}{t-z} dt
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Определение функции $\overline{\Phi_1^-(t)}$ приводит систему (2.10) к линейному дифференциальному уравнению

$$\overline{\Phi_1^-(t)} + B_0 \overline{\Phi_1^-(t)} = D(t) \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned}
 D(t) = A_0 \left[D_1^+(t) + D_1^-(t) - \frac{1}{\varepsilon} D_2^+(t) + \frac{1}{\varepsilon} D_2^-(t) - \right. \\
 \left. - \left(D_3^+(t) - \frac{\varepsilon_2 + 1}{\varepsilon_2 - 1} D_3^-(t) + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - 1} D_1^-(t) \right) \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - 1)}{2(\varepsilon_2 + 1)} \right] \\
 A_0 = \frac{1}{k_1} \frac{\varepsilon \varepsilon_2 + 1}{\varepsilon \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + 1) + \varepsilon_1 (\varepsilon_2 + 1)} \\
 B_0 = \frac{-2}{\varepsilon k_1} \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1)(\varepsilon \varepsilon_2 + 1)}{\varepsilon \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + 1) + \varepsilon_1 (\varepsilon_2 + 1)}
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решение уравнения (2.12) с учетом условий на бесконечности имеет вид

$$\overline{\Phi_1^-(t)} = e^{-B_0 t} \int_{-\infty}^t D(t) e^{B_0 t} dt \quad (2.14)$$

Используя (2.14) и (2.10), найдем граничные значения всех иско-
мых функций. Функции Φ_1 и Φ_2 выражаются интегралом типа Коши

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)}{t - z} dt \quad (2.15)$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений могут
быть найдены по формулам (2.15), (2.5), (2.6).

3. Рассмотрим частный случай, когда на упругую плоскость
действуют сосредоточенные силы $2iP$, $-iP$, $-iP$ в точках $z_1(0; -il)$,
 $z_2(-a; ib)$, $z_3(a; ib)$ соответственно. Решением системы уравнений
(2.10) будут функции

$$\begin{aligned}
 \overline{\Phi_1^-(t)} = e^{-B_0 t} A_0 \left[L_1 \int_{-\infty}^t \frac{e^{B_0 t}}{t - z_1} dt + L_2 \int_{-\infty}^t \frac{e^{B_0 t}}{t - z_2} dt + \right. \\
 \left. + L_3 \int_{-\infty}^t \frac{e^{B_0 t}}{t - z_3} dt \right] - A_0 \left[\frac{R_1}{t - z_1} + \frac{R_2}{(t - z_1)^2} + \frac{R_3}{t - z_2} + \frac{R_4}{(t - z_2)^2} + \right. \\
 \left. + \frac{R_5}{t - z_3} + \frac{R_6}{(t - z_3)^2} \right] \quad (3.1) \\
 \Phi_1(t) = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\varepsilon \varepsilon_2 + 1} \overline{\Phi_1^-(t)} + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - 1) - \varepsilon \varepsilon_2(\varepsilon_2 + 1)}{\varepsilon \varepsilon_2 + 1} \frac{c_1}{t - z_1} + \\
 + \frac{\varepsilon_2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon \varepsilon_2 + 1} \frac{c_2(z_1 - \bar{z}_1)}{(t - z_1)^2} + \frac{2\varepsilon \varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon \varepsilon_2 + 1} \frac{c_2}{t - z_2} + \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon \varepsilon_2 + 1} \frac{c_2(z_2 - \bar{z}_2)}{(t - z_2)^2} + \\
 + \frac{2\varepsilon \varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon \varepsilon_2 + 1} \frac{c_3}{t - z_3} + \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon \varepsilon_2 + 1} \frac{c_3(z_3 - \bar{z}_3)}{(t - z_3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2(t) &= \frac{\varepsilon + x_2}{\varepsilon(\varepsilon x_2 + 1)} \overline{\Phi_1^-(t)} + \frac{x_1(1-2\varepsilon) - \varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon x_2 + 1)} \frac{c_1}{t - z_1} + \\
&+ \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon(\varepsilon x_2 + 1)} \frac{c_1(z_2 - z_1)}{(t - z_1)^2} + \frac{x_2(2 - \varepsilon) - 1}{\varepsilon x_2 + 1} \frac{c_2}{t - z_2} + \\
&+ \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x_2 + 1} \frac{c_2(z_2 - z_3)}{(t - z_2)^2} + \frac{x_3(2 - \varepsilon) + 1}{\varepsilon x_2 + 1} \frac{c_3}{t - z_1} + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon x_2 + 1} \frac{c_3(z_1 - z_3)}{(t - z_1)^2} \quad (3.2) \\
\overline{\Phi_2^-(t)} &= \frac{x_1}{\varepsilon} \overline{\Phi_1(t)} + \frac{x_1}{\varepsilon} \frac{c_1}{t - z_1} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{c_1(z_1 - z_1)}{(t - z_1)^2} + \frac{c_2 x_2}{t - z_2} + \frac{c_3 x_2}{t - z_3}
\end{aligned}$$

где

$$c_1 = \frac{2iP}{2\pi(1 + x_1)}, \quad c_2 = \frac{iP}{2\pi(1 + x_2)} \quad (3.3)$$

$$L_2 = \frac{2c_1}{\varepsilon} \left[z_1 - \frac{2(z_1 - z_1)(\varepsilon + x_1)(x_2 + 1)(\varepsilon x_2 + 1)^2}{k_1^2} - y_1^2 - 2(\varepsilon + x_1) \right]$$

$$L_j = \frac{2c_2(1 + x_2)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)} \left[2x_2(x_1 - 1) - x_1(x_2 - 1) - \right] \quad (3.4)$$

$$+ \frac{(\varepsilon x_2 - 1)(x_1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)} \frac{2(z_j - z_j)}{k_1^2} \quad (j = 2; 3)$$

$$R_2 = \frac{2c_1(z_1 - z_1)(\varepsilon x_2 + 1)(x_1 + 1)\varepsilon - 2(z_2 + 1)(z_1 + \varepsilon)}{\varepsilon} +$$

$$+ \frac{c_1 k_1(x_1(x_2 - 1) - \varepsilon x_2(x_1 + 1))}{\varepsilon x_2 + 1}$$

$$R_2 = -c_1 k_1(z_1 - z_1) \frac{x_2 + 1}{\varepsilon x_2 + 1}, \quad R_4 = c_2 k_1(z_2 - z_2) \frac{x_2 + 1}{\varepsilon x_2 + 1} \quad (3.5)$$

$$R_3 = \frac{2c_2 k_1 \varepsilon x_2(1 + x_2)}{\varepsilon x_2 + 1} + \frac{2c_2(\varepsilon - z_2)(x_2 + 1)(\varepsilon + x_1)}{\varepsilon x_2(x_2 + 1) + x_1(x_2 + 1)}$$

$$R_5 = \frac{2c_0 k_1 \varepsilon x_2(1 + x_2)}{\varepsilon x_2 + 1} - \frac{2c_0(z_3 - z_3)(x_2 + 1)(\varepsilon + x_1)}{\varepsilon x_2(x_2 + 1) + x_1(x_2 + 1)}$$

$$R_6 = c_2 k_1(z_3 - z_3) \frac{x_2 + 1}{\varepsilon x_2 + 1}$$

Для касательных напряжений на границе включения из формул (2.7), (3.1)–(3.5) получим

$$\tau_{xy} = \frac{x_1 x_2 + 2\varepsilon x_2 + 1}{k_1(\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1))} \left| \cos Bt \right| L_2 \left(\int_{-\infty}^t \frac{t \sin Bt}{t^2 + P} dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - l \int \frac{\cos Bt}{t^2 + l^2} dt + L_2 \left(\int \frac{(t+a) \sin Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt - b \int \frac{\cos Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt \right) + \\
& + L_3 \left(\int \frac{(t-a) \sin Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt - b \int \frac{\cos Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt \right) | - \\
& - \sin Bt \left| L_1 \left(\int \frac{t \cos Bt}{t^2 + l^2} dt + l \int \frac{\sin Bt}{t^2 + l^2} dt \right) + \right. \\
& + L_2 \left(\int \frac{(t+a) \cos Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt + b \int \frac{\sin Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt \right) + \\
& \left. + L_3 \left(\int \frac{(t-a) \cos Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt + b \int \frac{\sin Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt \right) \right| - \frac{iE_1 t}{t^2 + l^2} + \\
& + \frac{2lE_2 t}{(t^2 + l^2)^2} - \frac{iE_3 (t+a)}{(t+a)^2 + b^2} + \frac{2bE_4 (t+a)}{((t+a)^2 + b^2)^2} - \\
& - \frac{iE_5 (t-a)}{(t-a)^2 + b^2} + \frac{2bE_6 (t-a)}{((t-a)^2 + b^2)^2} \\
& - \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \frac{x_1 x_2 \varepsilon + 2x_1 + \varepsilon}{\varepsilon(x_2 + 1)} \left| \cos Bt \left| L_1 \left(\int \frac{t \sin Bt}{t^2 + l^2} dt - \right. \right. \right. \\
& - l \int \frac{\cos Bt}{t^2 + l^2} dt + L_2 \left(\int \frac{(t+a) \sin Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt - b \int \frac{\cos Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt \right) + \\
& + L_3 \left(\int \frac{(t-a) \sin Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt - b \int \frac{\cos Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt \right) | - \\
& - \sin Bt \left| L_1 \left(\int \frac{t \cos Bt}{t^2 + l^2} dt + l \int \frac{\sin Bt}{t^2 + l^2} dt \right) + \right. \\
& + L_2 \left(\int \frac{(t+a) \cos Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt + b \int \frac{\sin Bt}{(t+a)^2 + b^2} dt \right) + \\
& \left. + L_3 \left(\int \frac{(t-a) \cos Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt + b \int \frac{\sin Bt}{(t-a)^2 + b^2} dt \right) \right| -
\end{aligned}$$

$$-\frac{iN_1 t}{t^2 - F} - \frac{2iN_0 t}{(t^2 + F)^2} - \frac{iN_2(t+a)}{(t+a)^2 + b^2} + \frac{2bN_1(t+a)}{((t+a)^2 + b^2)^2} -$$

$$-\frac{iN_3(t-a)}{(t-a)^2 + b^2} + \frac{2bN_3(t-a)}{((t-a)^2 + b^2)^2}$$

где

$$E_1 = \frac{c_1(x_1 x_2 + 2x_2 \varepsilon + 1)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)} \left| \frac{\varepsilon x_2(1 + x_1) - x_1(x_2 + 1)}{\varepsilon x_2 + 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{4il(x_1 + 1)(\varepsilon x_2 + 1)}{k_1(\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1))} \right| + \frac{c_1(x_1 x_2(1 - 2\varepsilon) + 1)}{\varepsilon x_2 + 1}$$

$$E_2 = \frac{2ilc_1}{\varepsilon x_2 + 1} \left| \frac{(x_2 + 1)(x_1 x_2 + 2x_2 \varepsilon + 1)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)} + 2x_2 \varepsilon - x_2 + 1 \right|$$

$$E_3 = E_4 = \frac{2c_2(x_1 x_2 + 2x_2 \varepsilon + 1)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(1 + x_2)} \left| \frac{2ib(x_2 + 1)(\varepsilon + x_1)}{k_1(\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1))} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon x_2(1 + x_2)}{\varepsilon x_2 + 1} \right| + \frac{2c_2 \varepsilon x_2(1 + x_2)}{\varepsilon x_2 + 1}$$

$$E_5 = E_6 = \frac{2ibc_0 \varepsilon(1 + x_2)(1 - x_1)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)}$$

$$N_1 = \frac{c_1(x_1 x_2 \varepsilon + 2x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)} \left| \frac{\varepsilon x_2(1 + x_1) - x_1(x_2 + 1)}{\varepsilon(\varepsilon x_2 + 1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4il(x_1 + 1)(\varepsilon x_2 + 1)}{\varepsilon k_1(\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1))} \right| + c_1 \frac{2x_1 - \varepsilon + 2x_1(x_2 - 2)}{\varepsilon(\varepsilon x_2 + 1)}$$

$$N_2 = \frac{2ilc_1(1 - x_2)(x_1 + 1)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)}$$

$$N_3 = N_4 = \frac{c_2(x_1 x_2 \varepsilon + 2x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)} \left| \frac{4ib(x_2 + 1)(\varepsilon + x_1)}{\varepsilon k_1(\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1))} - \right.$$

$$\left. - \frac{2x_2(1 + x_2)}{\varepsilon x_2 + 1} \right| + \frac{2c_2(x_2 + 1)}{\varepsilon x_2 + 1}$$

$$N_5 = N_6 = \frac{2ibc_0(1 + x_2)(\varepsilon x_1 + \varepsilon + 2x_1)}{\varepsilon x_2(x_1 + 1) + x_1(x_2 + 1)}, \quad B_0 = iB$$

Вычислены значения касательных напряжений τ_{xy} и τ_{yz} в некоторых точках при различных значениях ε и k_1 .

Вычисления проводились при следующих значениях исходных параметров:

$$x_1 = x_2 = x_{\text{ок}} = 1/3, \quad a = b = l = 1 \text{ ед. длины.}$$

Интегралы были вычислены на ЭВМ „Наири“ с точностью $0.1 \cdot 10^{-4}$.

Значения величин $\frac{0.3\tau_{xy1}}{Pk_1}$ и $\frac{0.3\tau_{xy2}}{Pk_2}$ при $k_1 = 0.3i$ ед. длины приведены в табл. 1, а значения величин $\frac{1.5\tau_{xy1}}{Pk_1}$ и $\frac{1.5\tau_{xy2}}{Pk_2}$ при $k_2 = 1.5i$ ед. длины — в табл. 2.

Таблица 1

Величина	t	t								
		0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0
$\frac{0.3\tau_{xy2}}{Pk_2}$	0.20	-0.100	-0.138	-0.160	-0.227	-0.166	-0.029	-0.001	-0.020	-0.021
	0.40	-0.073	-0.117	-0.174	-0.239	-0.154	0.006	-0.009	-0.048	-0.002
	1.00	-0.050	-0.096	-0.139	-0.197	-0.122	0.020	0.004	0.013	0.009
	1.20	-0.055	-0.105	-0.146	-0.194	-0.101	0.043	0.013	0.004	-0.001
	2.00	-0.047	-0.090	-0.125	-0.173	-0.067	0.061	0.016	0.006	0.015
$\frac{0.3\tau_{xy1}}{Pk_1}$	0.20	-0.071	-0.145	-0.206	-0.258	-0.179	-0.028	-0.013	0.002	-0.002
	0.40	-0.075	-0.151	-0.203	-0.253	-0.164	-0.012	-0.000	0.017	-0.002
	1.00	-0.082	-0.156	-0.210	-0.252	-0.126	0.037	0.015	-0.006	-0.008
	1.20	-0.073	-0.139	-0.189	-0.238	-0.131	0.028	0.018	0.001	0.008
	2.00	-0.071	-0.136	-0.187	-0.234	-0.117	0.041	0.023	0.008	0.023

Таблица 2

Величина	t	t								
		0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0
$\frac{1.5\tau_{xy2}}{Pk_2}$	0.20	-0.078	-0.147	-0.201	-0.255	-0.182	-0.033	-0.011	-0.004	-0.001
	0.40	-0.080	-0.152	-0.214	-0.262	-0.179	-0.020	-0.003	-0.001	0.000
	1.00	-0.084	-0.159	-0.218	-0.273	-0.176	-0.001	0.008	0.006	0.002
	1.20	-0.085	-0.161	-0.187	-0.275	-0.175	0.003	0.010	0.006	0.003
	2.00	-0.088	-0.166	-0.226	-0.284	-0.175	0.010	0.015	0.010	0.005
$\frac{1.5\tau_{xy1}}{Pk_1}$	0.20	-0.067	-0.128	-0.179	-0.237	-0.149	-0.003	-0.011	-0.009	-0.004
	0.40	-0.060	-0.116	-0.147	-0.218	-0.120	0.025	-0.004	-0.004	-0.004
	1.00	-0.048	-0.093	-0.131	-0.176	-0.072	0.059	0.011	0.000	-0.001
	1.20	-0.046	-0.088	-0.124	-0.167	-0.063	0.064	0.013	0.003	0.000
	2.00	-0.039	-0.075	-0.105	-0.140	-0.037	0.078	0.020	0.005	0.000

Как видно из таблиц, на линиях контакта включения и полуплоскостей возникают касательные напряжения значительной величины.

Автор выражает признательность К. С. Чобаняну за постановку задачи и ценные указания в ходе решения.

Ա. Ս. ԿԽՉԻԿՅԱՆ

ԳՐԱՎԿԱՊՈՒՏ ԱՌԱՋԳՈՒԿԱՆ ՆԵՐԳՐՎԱԾՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍՆՈՒ
ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԳՈՒԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՆՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գրառքը վաճառ է բարակապատ առաձգական ներդրվածքով (ստանձի շերտ) միակցված և կենտրոնացված ուժերի՝ ճախասարակչով ախտահմի, ազդեցության տակ դտնվող, տարրեր առաձգական ճաստատունների ունեցող, կրկու կրահարթությունների առաձգական ճախասարակչությունը:

Ուսումնասիրված է շոշափող լարումների բաշխումը ներդրվածքի կրում՝ կրեք կենտրոնացված ուժերի ազդեցության դեպքում:

A. S. KHACHIKIAN

EQUILIBRIUM OF NON-HOMOGENEOUS ELASTIC PLANE
WITH A THIN-WALLED ELASTIC INCLUSION

S u m m a r y

The elastic equilibrium of the two half-planes with different constants combined by thin-walled inclusion (layer of glue) under the action of concentrated forces is considered.

The behavior of the tangent stresses near the inclusion in case of three concentrated forces is investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Известия АН АрмССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
3. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрывом. Известия АН СССР, ОТН, „Механика и машиностроение“, № 1, 1962.
4. Таблицы интегральной показательной функции. Изд-во АН СССР, М., 1954.