

С. А. АМБАРЦУМЯН

СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ИЗ СОВРЕМЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ*

Введение. В современной технике при создании конструкций типа оболочек широко применяются новые конструкционные материалы, механические свойства которых оставляют специфический след на теории оболочек.

Настоящая работа посвящается некоторым вопросам теории оболочек, изготовленных из полимеров и армированных пластиков, механические характеристики которых настолько отличаются от механических характеристик „традиционных“ для оболочек материалов (металлов, бетонов, железобетонов, древесины и др.), что требуют внесения существенных коррективов в классическую теорию оболочек.

В работе освещаются также специфические вопросы теории оболочек, связанные с некоторыми механическими свойствами материалов как „традиционных“, так и новых, на которые исследователи оболочек ранее не обращали внимания.

Несмотря на многочисленные оригинальные исследования [1—8] (где читатель найдет и обширную библиографию по этому вопросу), на сегодня еще не завершено создание механики полимеров и ее важного раздела — механики армированных пластиков. Поэтому сейчас нет возможности с единой точки зрения рассматривать все проблемы, возникающие в теории оболочек в связи с применением новых материалов. Однако, уже пора начинать разговор о специфических особенностях теории оболочек из новых материалов, ибо современная теория оболочек пестрит многочисленными, зачастую противоречащими друг другу, идеями и положениями, связанными с особенностями механических свойств современных материалов.

Настоящая работа носит обзорный характер, но при этом не претендует на полноту, ибо здесь освещаются те особенности теории оболочек, которые важны с точки зрения автора и входят в круг его научных интересов.

Из громадного числа работ по механике полимеров и теории оболочек здесь цитируются лишь те, которые необходимы автору для подтверждения выдвигаемых идей и положений.

Вопросы анизотропии. Одной из важных особенностей ориентированных армированных, а иногда и неармированных, полимерных мате-

* Работа доложена на III Всесоюзном съезде механиков СССР, Москва, 1968 г.

риалов является их сильная анизотропия с низкой сопротивляемостью на сдвиг.

Многочисленными экспериментальными и теоретическими исследованиями [1–22] установлено, что некоторые однородные полимеры и почти все армированные пластики сочетают высокие механические характеристики на растяжение — сжатие (по направлению волокон) со слабым сопротивлением на сдвиг. При этом армированные пластики слабо сопротивляются и на растяжение — сжатие в направлениях, перпендикулярных к направлению укладки арматуры.

Из приведенной ниже таблицы [23] видно, что для некоторых типов материалов эта разнсопротивляемость, с точки зрения отношения модуля упругости к модулю сдвига, может доходить до ста.

	Стеклопластики			Борозно- сидный пластик
	Укладка арматуры		стеклотек- столит	
	1:0	1:1		
E, G	30—50	20—30	10—15	90
E, E_1	5—8	5	5	10

Сильная анизотропия материала оболочки в плоскостях, параллельных срединной поверхности ортотропной оболочки (скажем: $E_1 \gg E_2, E_1 \gg G_{12}$ и т. д.), как известно [24–27], за исключением характера распространения краевых эффектов [26], не вносит принципиально новых особенностей в классическую теорию ортотропных оболочек. Дело в том, что классическая теория тонких ортотропных оболочек построена на основе гипотезы недеформируемых нормалей, которая, вообще говоря, не вносит каких-либо ограничений в характер деформированного и напряженного состояний оболочки в плоскостях, параллельных срединной поверхности.

Однако, сильная анизотропия в плоскостях, параллельных срединной поверхности оболочки, может внести существенно новую специфику в напряженно-деформированное состояние оболочки в более общих случаях анизотропии материала оболочки (одна плоскость упругой симметрии параллельна срединной поверхности) [26–31] или в аналогичном, с точки зрения математического аппарата, случае, когда главные направления упругости ортотропного материала оболочки не совпадают с главными геометрическими направлениями срединной поверхности оболочки (косое армирование) [26, 32, 33]. В этих случаях, даже в тривиальных осесимметричных задачах оболочек вращения появляются специфические особенности в напряженном состоянии и в перемещениях [26, 31]. В частности, например, оболочка вращения под действием равномерного осесимметричного давления претерпевает деформации кручения или, например, в зависимости от знака крутящего момента, замкнутая круговая цилиндрическая оболочка укорачивается

или удлиняется, увеличивает или уменьшает радиус кривизны и т. д., т. е. появляются характерные элементы естественного кручения.

Что же касается нетривиальных задач указанного выше класса, то они почти не рассмотрены и не выявлены специфические особенности, которые могут при этом возникать.

К сожалению, еще в младенческом состоянии находится и общая теория так называемых неортотропных оболочек. Полученные еще двадцать лет назад [28—30] общие уравнения теории анизотропных—неортотропных (в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности) оболочек еще не подвергнуты всестороннему качественному анализу, как это сделано в случае теории изотропных [34] и частично анизотропных [35] оболочек. А это очень важно, ибо проблема косоармированных оболочек из пластиков, которая сподится к проблеме неортотропных оболочек, приобретает первостепенное значение с точки зрения приложений.

Сильная анизотропия в плоскостях, перпендикулярных срединной поверхности оболочки (скажем: $E_1, G_{12}, E_2, E_3, \dots$ и т. д.), может внести существенные изменения в классическую теорию оболочек.

Классическая теория оболочек, построенная на основании гипотезы недеформируемых нормалей, безразлична к поперечным механическим характеристикам материала оболочки (E_1, G_{12} и т. д.), т. е. к отношениям типа $E_1/E_2, E_1/G_{12}, E_2/G_{23}$ и т. д. ($i, k = 2, 3$). Поэтому, принимая гипотезу недеформируемых нормалей, мы в теорию оболочек вносим непоправимое безразличие к отношениям типа E_1/E_2 и т. д., что в реальных диапазонах изменения механических характеристик новых материалов может привести к существенным погрешностям [7, 8, 14, 23, 26, 27, 36—39]. В связи с этим зачастую приходится отказываться от компактной классической теории оболочек и обращаться к так называемым уточненным теориям, которые безразличны к отношениям типа $E_1/G_{12}, \dots$, и в состоянии почувствовать явления, связанные со слабыми сдвиговыми и поперечными упругими характеристиками материала оболочки.

Основная, руководящая идея всех уточненных теорий весьма тривиальна и заключается в наилучшем приближенном представлении уравнениями теории оболочек уравнений трехмерной задачи теории упругости [40]. К разрешению этой проблемы разные авторы подошли разными путями [14, 15, 26, 27, 32, 36—38, 40—59] и пришли или к бесконечным рядам, или к разрешающим дифференциальным уравнениям повышенного порядка (десятый, двенадцатый, шестнадцатый и т. д.), или к последовательному решению требуемого (столько, сколько требует точность) количества неоднородных дифференциальных уравнений восьмого порядка классического типа. При этом существенно изменяются граничные условия, которые модифицируются как в результате повышения порядка разрешающих дифференциальных уравнений, так и в результате учета тех явлений у края оболочки, на которые классическая теория не реа-

гирует по-иное. Это специфические явления кручения и плоской задачи, решения которых имеют затухающий характер и, в зависимости от степени и характера анизотропии, затухают с различной и, как правило, отличной от скорости затухания краевого эффекта классической теории [27, 42, 44, 47, 51, 57—60] скоростью.

Из анализа уточненных теорий заключаем, что общая задача теории сильно анизотропных оболочек разделяется на две почти самостоятельные задачи: на внутреннюю задачу и на задачу краевой зоны.

Существующие уточненные теории, а зачастую и классическая теория, когда приведенная относительная толщина оболочки $h^* = h/R_0$ (h/R_0 , h/a_0 , E_0/G_0 , ...) мала ($1 \pm h^* \approx 1$), для внутренней задачи оболочки дают почти одинаковые и приемлемые для корректного расчета результаты. Что же касается задачи края, то ни одна уточненная теория в разумных пределах приближения не может дать корректных результатов о напряженно-деформированном состоянии краевой зоны оболочки. В этом случае очевидно, что мы должны привлечь трехмерную задачу теории упругости анизотропного тела.

Таким образом, нам кажется, что наилучшим вариантом общей теории сильно анизотропных оболочек следует считать симбиоз какой-либо уточненной теории (а иногда и классической теории) с теорией для края на уровне трехмерной задачи теории упругости. В этом случае, очевидно, краевые условия оболочки должны быть сформулированы с точки зрения трехмерной задачи теории упругости, что не так просто сделать, ибо нет единого метода построения трехмерных математических моделей реально осуществленных и осуществляемых схем закрепления краев оболочек вообще.

Наличие такой строгой теории является жизненной необходимостью, ибо, имея такую теорию, мы сумеем корректно установить пределы применимости всех уточненных теорий, которыми наводнена и, к сожалению, продолжает еще более наводняться современная теория оболочек.

До сих пор мы говорили о таких анизотропных оболочках, материал которых под нагрузкой не меняет своих механических свойств. Однако, некоторые современные конструкционные материалы, в частности, некоторые армированные и неармированные полимеры, под действием нагрузки становятся анизотропными, если даже и начальном ненапряженном состоянии были изотропными, или изменяют степень анизотропии, если в начальном состоянии уже были анизотропными [2, 3, 5].

Если оболочка изготовлена из материала, который обладает скачкообразными пиком свойствами, то известные теории оболочек без существенных коррективов не могут быть использованы.

Перед нами новая проблема теории оболочек с изменяемой анизотропией и с изменяемой неоднородностью. Здесь по сути дела мы будем сталкиваться с проблемами деформационной анизотропии и неоднородности [40, 61, 62].

Вопросы неоднородности. Конструкционные армированные пластики, вследствие наличия армирующих элементов, являются не только анизотропными, но и неоднородными.

Неоднородность механических характеристик конструктивных синтетических материалов может быть обусловлена также несовершенством технологии изготовления, температурным полем, пиковой нагрузкой, облучением и т. д. [1—8].

Армированные пластики, применяемые в оболочках, разделяются на три основные группы: слоистые, волокнистые и зернистые. Материалы первых двух групп, изготовленные с помощью ориентированных армирующих элементов, как правило, являются и неоднородными, и анизотропными. Пластики третьей группы, изготовленные пространственно-хаотически расположенными армирующими элементами, несмотря на локальную неоднородность, как правило, рассматриваются как приращенно-однородный материал с механическими характеристиками изотропного или трансверсально-изотропного тела.

Главная особенность механических характеристик рассматриваемых выше групп армированных материалов — это опять плохая сопротивляемость сдвигу и сжатию — растяжению в направлении, перпендикулярном к армирующим волокнам. Отсюда и главная специфика всех теорий многослойных армированных оболочек — отказ от гипотезы недеформируемых нормалей с целью учета поперечных сдвигов, поперечного обжатия и поперечного нормального напряжения.

Взамен единой гипотезы недеформируемых нормалей, сформулированной для всего пакета оболочки в целом [25, 26, 30], принимая более универсальные предположения, сформулированные для каждого слоя в отдельности [14, 15, 26, 27, 36, 53, 55, 56, 60, 64—66], или используя метод асимптотического интегрирования [63], на основании трехмерной задачи теории упругости построены некоторые уточненные теории многослойных оболочек.

Построенные теории, как и почти все уточненные теории оболочек, дают обоснованные представления о напряженно-деформированном состоянии оболочки вдали от линий искажения.

Анализ разрешающих уравнений уточненных теорий показывает, что наиболее существенным фактором, уточняющим классическую теорию многослойных оболочек, является учет деформаций поперечных сдвигов [45, 60]. Что же касается поклада моментных эффектов в армированных слоях и продольных деформаций нормалей, то они имеют одинаковый порядок и значительно уступают эффекту поперечных сдвигов [60].

Своеобразными являются краевые эффекты в оболочках из армированных материалов. Здесь, наряду с краевыми эффектами классического типа и краевым эффектом, обусловленным учетом поперечного сдвига, появляются краевые эффекты нового типа, например, эффект релаксации моментов в армирующих слоях, который аналогичен кра-

тому эффекту в теории сред Фойта-Коссера, или эффект релаксации продольных деформаций нормальных элементов [61, 68].

За последние годы многие авторы, проповедуя отказ от гипотезы недеформируемых нормалей, зачастую забывают предупредить читателей, что для громадного большинства осуществляемых оболочек, когда речь идет об определении напряженно-деформированного состояния вдали от линий искажения, нет никакой необходимости отказываться от компактной классической теории, построенной на основании гипотезы недеформируемых нормалей, сформулированной для всего пакета слоистой оболочки в целом.

Низкие сдвиговые и, вообще, низкие поперечные механические характеристики материала оболочки еще не помеха применению классической теории. Дело в том, что оболочка может быть настолько тонка, что поправочные члены к классической теории, которые во многих задачах выступают с множителем h^2/L^2 , по крайней мере, с точностью h/L могут быть пренебрежены.

Например [60], если $E_1/E_0 = 0.05$, $\nu_1 = \nu_0 = 0.25$ (E_1 , ν_1 и E_0 , ν_0 — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона связующего и армирующего материалов), коэффициент армирования $\mu = 0.7$, относительная толщина $h/L = 0.05$, то прогибы пятислойной квадратной ($L = L$) свободно опертой по всему контуру пластинки, найденные по классической теории и по уточненной теории, будут отличаться примерно на 10 %.

Или, например [8, 26, 17], в весьма тяжелом с точки зрения классической теории случае, когда отношение приведенного модуля упругости к приведенному модулю сдвига доходит до ста, т. е. $E/G(1 - \nu^2) = 100$, ошибка классической теории при определении прогибов будет менее 5 %, если относительная толщина пластинки менее 1/65.

Пределы применимости классической теории в случае оболочек значительно шире, чем в случае пластинок, для которых были приведены численные примеры. С увеличением подъемистости оболочки ошибка, допускаемая при принятии гипотезы недеформируемых нормалей, уменьшается (в случае соответствующей пластинки эта ошибка принимает свое максимальное значение). Дело здесь в том, что при увеличении подъемистости оболочки влияние изгибающих параметров на напряженное состояние оболочки уменьшается, а это означает также и уменьшение влияния перерезывающих сил N_T , т. е. поперечных касательных напряжений τ_{xz} , которыми и обуславливаются явления поперечного сдвига — главного фактора поправки к классической теории [26, 67].

Таким образом, каждый раз отказ от классической теории в пользу какой-либо уточненной теории должен быть обоснован предварительным, хотя бы грубым, анализом.

Технологические особенности изготовления армированных и неармированных пластиков таковы, что в них, в процессе формирования,

появляются внутренние—остаточные напряжения, которые по телу оболочки могут быть распределены как изотропно, так и анизотропно [69, 70].

Внутренние напряжения, которые возникают как в армированных, так и в неармированных полимерах, в процессе термоформирования материала нарастают, а затем частично релаксируют и устанавливается некоторый уровень внутренних напряжений. Установленный уровень внутренних—остаточных напряжений последующей термообработкой можно несколько снизить, но совершенно устранить невозможно [70].

Как показывают исследования, величины начальных напряжений могут достигать достаточно больших значений и при рассмотрении напряженно-деформированного состояния оболочки не всегда могут быть пренебрежены, тем более, когда рассматриваются реономные задачи.

Таким образом, теория оболочек из современных материалов должна быть пополнена новым, пожалуй, весьма интересным, разделом—теорией оболочек с внутренними—остаточными напряжениями.

Задача эта (за исключением тривиального случая, когда при вычислении напряжений и деформаций можно применять простой принцип суперпозиции) не так уж проста. Здесь мы можем сталкиваться и с непреодолимыми трудностями, если, например, не известны законы распределения и величины остаточных напряжений. Если же остаточные напряжения известны, то для определения добавочных напряжений мы должны построить соотношения между этими напряжениями и деформациями. Для этого, как известно, надо обратиться или к эксперименту, или к более общей теории, чем теория классических упругих тел. В частности, здесь можно обратиться к соотношениям упругости, содержащим геометрически нелинейные члены [40, 61, 62, 71, 72].

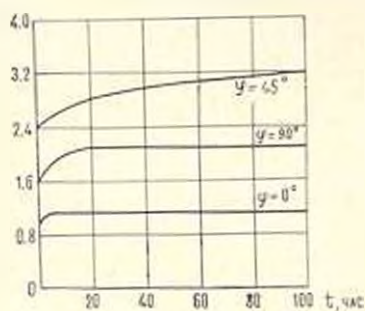
Температурная задача и вопросы ползучести. Одной из важных особенностей полимеров и армированных пластиков, как материалов для конструкций типа оболочек, является их чрезвычайная чувствительность к температурным воздействиям и к продолжительности действия нагрузки.

Многочисленные исследования [1—8, 73—85] на различных армированных и неармированных пластиках показывают, что их реономные свойства наиболее удачным образом описываются закономерностями вязко-упругих сред. При этом считается, что для многих задач и материалов приближенная линейная теория в состоянии давать вполне приемлемые для приложений результаты.

Исходя из сказанного выше, при построении теории тонкостенных конструкций типа оболочек с учетом упруго-вязких свойств неармированного полимерного материала оболочки большинство авторов реономные свойства для всего тела оболочки описывает с помощью

соотношений линейной теории наследственной упругости, что и определяет дальнейший ход решения поставленных задач. А именно, используя принцип Вольтерра, производится замена упругих постоянных упругими операторами, которые и описывают процессы, происходящие в оболочке по времени [73--86].

Картина существенно изменяется, когда имеем дело с армированными стеклопластиковыми. В этом случае, процесс ползучести вдоль волокон принципиально отличается от процесса ползучести по другим направлениям (фиг. 1). При ползучести вдоль волокон в начальный период происходит распределение усилий между арматурой и связующим, но при этом связующее постепенно релаксирует и вся нагрузка передается на арматуру, которая в условиях комнатной температуры не ползет. Таким образом, армированный стеклопластик вдоль волокон в начальный период нагружения проявляет свойства ползучести, а после определенного времени вовсе прекращает ползти. Что же касается характера ползучести в иных направлениях армированного пластика, то здесь мы имеем непрерывную, интенсивную, незатухающую ползучесть, которая в основном определяется свойствами ползучести связующего и направлением действия нагрузки [4--8, 77, 78, 80].



Фиг. 1.

На основании указанного выше решение задачи ползучести оболочки, изготовленной из ортогонально армированных пластиков, в общем случае должно проводиться в три этапа. Первый этап — в начале деформирования, когда оболочка ползет по всем главным направлениям, и притом, анизотропно. Второй этап — когда, вследствие различия (в общем случае) коэффициентов армирования по главным направлениям, по одному (с большим процентом армирования) главному направлению армирования оболочка теряет свойства ползучести, и с достаточно высокой точностью можно считать, что в этом направлении материал оболочки имеет характеристики упругого тела; при этом упругие характеристики будут соответствовать упругим характеристикам предельного случая, когда все усилия этого направления передаются арматуре, т. е. когда кривая ползучести в этом направлении практически может быть заменена своей асимптотой. И, наконец, третий этап — когда и второе главное направление армирования достигает своего предела и можно считать, что оба главных направления ведут себя упруго, но анизотропно. Что же касается явлений сдвига, то очевидно, что во всех трех этапах деформирования материал оболочки по отношению к сдвигу будет вести себя как наследственно-упругое тело. Для полноты укажем также, что если оболочка по

главным направлениям одинаково армирована, то за первым этапом деформирования последует сразу третий этап.

В связи с указанным выше становится неубедительным принятое некоторыми авторами предположение о том, что в слоистых оболочках армирующие слои могут трактоваться, как идеально упругие тела. Принимая такую гипотезу, совершенно искажаем картину сдвиговых деформаций ползучести в плоскостях, параллельных срединной поверхности оболочки. В этом легко убедиться, рассматривая тривиальную задачу кручения безмоментной круглой цилиндрической оболочки, ортогонально армированной упругими стекловолокнами [8, 26].

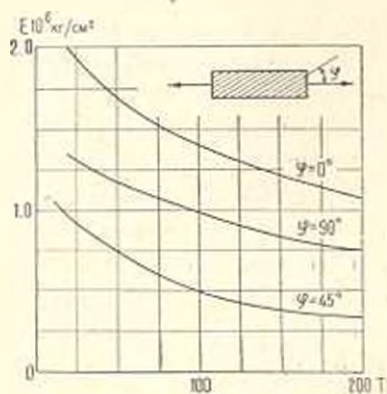
Рассматривая три этапа деформирования оболочки, замечаем, что первые два этапа имеют место при рассмотрении вопросов начальной кратковременной ползучести. В этих этапах деформирования материал оболочки подчиняется закономерностям анизотропного наследственно-упругого тела, при этом интенсивности деформации ползучести по главным направлениям армирования и по сдвигу должны быть учтены как равнозначимые. В третьем, основном, этапе ползучести значения деформаций ползучести по главным направлениям армирования становятся пренебрежимо малыми, и на первый план выступают явления, связанные со сдвигами. При этом, если задача рассматривается по классической теории оболочек, то вязко-упругие характеристики должны быть включены лишь в соотношения, характеризующие сдвиг в плоскостях, параллельных срединной поверхности оболочки [8, 89]. Если же задача рассматривается на уровне уточненных теорий, то упруго-вязкие характеристики должны быть включены и в элементы, представляющие поперечные сдвиги, ибо [учет поперечных сдвигов в некоторых реальных задачах оболочек может внести определенные коррективы [27, 90, 91].

Наконец, укажем также, что многие армированные и неармированные пластики обладают свойством „старения“, т. е. изменения механических характеристик во времени [80]. Явления старения в материалах можно описывать с помощью теории наследственной упругости с учетом старения [73, 79]. Эта теория наилучшим образом представляет упруго-вязкие явления с учетом старения и достаточно эффективна при рассмотрении задач теории оболочек [92, 93].

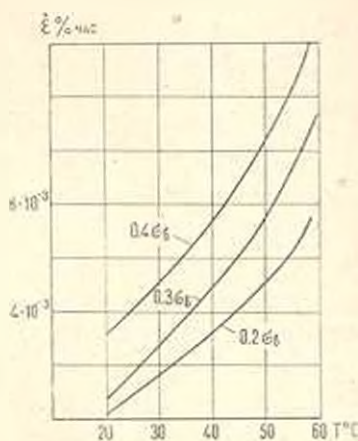
Температура оказывает существенное влияние на механические характеристики армированных и неармированных пластиков, применяемых как конструкционные материалы для оболочек, в частности, на прочность, на модули упругости и сдвига, на величину и скорость высокоэластических деформаций [1—8, 10].

Рассматривая результаты экспериментальных исследований (фиг. 2, 3), замечаем, что с ростом температуры уменьшаются величины модулей упругости, увеличиваются величины и скорости высокоэластических деформаций. И, что важно, эти изменения происходят за счет изменения свойств связующего и носят анизотропный характер, т. е. по разным направлениям изменяются по-разному.

В связи с этим существенно изменяется степень анизотропии материала. Однако, при этом следует заметить, что большие изменения претерпевают характеристики сдвига. Дело в том, что в рассматриваемых диапазонах изменения температуры (примерно от $+20^\circ$ до $+200^\circ\text{C}$) стекловолокно незначительно изменяет свои характеристики и поэтому по направлениям армирования модули упругости стеклопластика изменяются меньше, чем модуль сдвига, изменение которого обусловлено температурной зависимостью свойств связующего и в большинстве случаев весьма ощутимо.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Например [10], для стеклопластика КАСТ-В при изменении температуры от 20°C до 100°C модули упругости в главных направлениях армирования изменяются примерно в 1.3–1.4 раза, а модуль сдвига изменяется уже в 2.0 раза (фиг. 2).

Указанный характер поведения материала в температурном поле накладывает свои особенности на температурную задачу теории оболочек.

При рассмотрении стационарных задач приходится учитывать тот тип анизотропии и неоднородности, который устанавливается для рассматриваемой оболочки в данном установившемся поле температуры. После определения физико-механических характеристик оболочки задача термоупругости решается в классической постановке или на уровне уточненных теорий с учетом поперечных сдвигов [96–99].

В случае нестационарных задач проблема существенно осложняется. Дело в том, что если материал оболочки находится в переменном температурном поле, то переменными становятся не только абсолютные величины упругих характеристик, но и степень анизотропии, характер неоднородности и т. д. В этом случае мы сталкиваемся с задачей термоупругости оболочки с переменными механическими характеристиками [89, 99].

Несколько слов о разномодульности. Современные армированные и неармированные пластики и традиционные для оболочек материалы вообще, как правило, являются разномодульными, т. е. имеют разные модули упругости на растяжение и сжатие.

Как показывают исследования [22, 100, 101], разномодульность современных материалов ($\mu = E/E$) может достигать до значительных величин и пренебрегать ею при построении корректной теории оболочек нельзя. Из приведенной таблицы [100, 101] видно, например, что разномодульность μ для современных материалов может достигать до 0.6.

	Фторопласт-4	Капрон	Псевдоизотропный стеклопластик 3 М	Псевдоизотропный боропластик
μ	0.85	0.81	0.67-0.85	0.57-0.62

Учет разномодульности материала при построении теории оболочек вносит существенные осложнения и коррективы.

Первый вопрос, который возникает при этом, заключается в выборе основной гипотезы, т. е. гипотезы, на основании которой трехмерная задача разномодульной теории упругости [102, 103] приобщается к двумерной задаче теории оболочек [104-106].

Дело в том, что в разномодульной теории упругости принципиально важное значение имеют касательные напряжения τ_{ij} , которые в классической теории оболочек находятся в противоречии с деформациями ϵ_{ij} , но являются малыми и поэтому не рассматриваются. В разномодульной теории упругих оболочек необходимо оценить это противоречие ($\epsilon_{ij} = 0$, $\tau_{ij} \neq 0$) и указать те соотношения между основными напряжениями σ_i и напряжением τ_{12} , при которых гипотеза недеформируемых нормалей с известной точностью ($1 + \gamma_1 \approx 1$) становится справедливой и для тонких оболочек из разномодульных материалов.

Что же касается уточненных теорий, которые свободны от указанного выше противоречия, то здесь задача теории оболочек осложняется тем, что приходится вводить еще другие предположения, диктуемые разномодульностью материала [106].

Несмотря на указанные осложнения, теория оболочек из разномодульных материалов строится. Уже известно, что исходные уравнения и расчетные формулы теории разномодульных оболочек отличаются от соответствующих уравнений и формул классической или уточненных теорий наличием нелинейных членов, которые имеют разномодульное происхождение. Что же касается структуры линейных частей этих представлений, то они внешне совпадают с соответствующими уравнениями и формулами классической или уточненной теорий, однако при этом имеют сугубо разномодульное содержание.

Важной особенностью полученных уравнений и формул является то, что все нелинейные члены входят с малым параметром $\mu = \frac{E^* - E}{E^* + E}$ и превращаются в нуль в случае одномодульного материала.

Заключение. Здесь мы сделали первую попытку осветить некоторые особенности теории оболочек, изготовленных из новых материалов, механические свойства которых оставляют специфический отпечаток на современной теории оболочек.

Здесь рассмотрены лишь некоторые свойства материала и освещены лишь некоторые особенности теории.

Нами вовсе не рассмотрены нелинейные задачи: нелинейная геометрия, нелинейная упругость, нелинейные неомномные задачи и др. и совершенно не освещены задачи динамики, а в связи с этим новая и весьма интересная проблема термоупругости саморазогревающейся оболочки. Остались без внимания также и задачи пластичности.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 31 V 1968

Ա. Ա. ԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ

ԺԱՄԱՆԱԿԱԿԻՅ ՆՅՈՒԹՆՐԻՅ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԹԱԿԱՆՔՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՅՈՒՐԱՀԱՏՈՒԿ ԱԹԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա մ փ ա փ ո լ մ

Ներկա աշխատանքը նվիրված է թաղանթների տեսության մի բանի հարցերին, երբ թաղանթը պատրաստված է պոլիմերներից, ամրանալորված պլաստիկներից, որոնց մեխանիկական հատկությունները այնքան են տարբերվում թաղանթների համար «սրագիցիոն» նյութերի (մետաղներ, բետոն, երկաթբետոն, փայտ և ուր.) մեխանիկական հատկություններից, որ պահանջում են մտցնել էական ուղղումներ թաղանթների կլասիկ տեսության մեջ:

S. A. AMBARTSUMIAN

ESPECIAL FEATURES OF THE THEORY OF SHELLS FROM MODERN MATERIALS

S u m m a r y

The present paper is contributed to some questions on the theory of shells made of polymers and reinforced plastics, the mechanical characteristics of which is so different from those of „traditional“ mate-

rials (metals, concrete, reinforced concrete, wood etc.), that essential corrections must be made in the classical theory of shells.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Славинский Г. А. Механические свойства полимеров и свойства их растворов. Гизлегпром, М., 1951.
2. Амфрей. Механические свойства высокополимеров. ИЛ, М., 1952.
3. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. Изд. "Химия", М., 1964.
4. Рабинович А. А. Некоторые основные вопросы механики армированных полимеров. Докт. дис., 1965.
5. Ошиблов П. М., Суворова Ю. В. Механика армированных пластиков. Изд. МГУ, 1965.
6. Андреевская Г. Д. Высокопрочные ориентированные стеклопластики. Изд. "Наука", М., 1966.
7. Тарнопольский Ю. М., Скудри А. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Изд. "Зинатне", Рига, 1966.
8. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Изд. "Зинатне", Рига, 1967.
9. Рабинович А. А. О расчете ортотропных слоистых панелей на растяжение, сдвиг и изгиб. Тр. ЦАГИ, № 675, 1948.
10. Рабинович А. А., Штарков М. Г., Дмитриева Е. И. Методы определения и величины упругих постоянных стеклотекстолита при повышенной температуре. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та. Исследования по механ. и прикл. матем., вып. I, 1958.
11. Ошиблов П. М., Ломакин В. А. Механические свойства стеклопластиков. Инж. сб. АН СССР, т. 30, 1960.
12. Ошиблов П. М., Бикенини Ю. В. О механических свойствах армированных пластиков. Вестник МГУ, сер. 1, № 3, 1962.
13. Жуков А. М., Вялухина С. А. Механические свойства стеклопластика при комнатной температуре. Инж. ж. АН СССР, т. 2, вып. 4, 1962.
14. Болотин В. В. К теории слоистых плит. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 3, 1963.
15. Болотин В. В. Теория слоистых плит для случая большого числа слоев. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 1, 1964.
16. Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред. Механика полимеров, 2, 1965.
17. Хашин Э., Розен Б. В. Упругие модули материалов, армированных волокнами. Прикл. механ., серия Е (США, пер. с англ.), 71, № 2, 1964.
18. Ван Фан Фы Г. А. Напряженное и деформированное состояние синтетических материалов при сдвиге. ПММ, АН УССР, № 1, 1965.
19. Ван Фан Фы Г. А., Савин Г. Н. Об основных соотношениях теории сетчатых стеклопластиков. Механика полимеров, 1, 1965.
20. Аболиньш Д. С. Тензор податливости однонаправленно армированного упругого материала. Механика полимеров, 4, 1965.
21. Аболиньш Д. С. Тензор податливости армированного в двух направлениях упругого материала. Механика полимеров, 3, 1966.
22. Шварц Р. Т., Шварц Г. С. Свойства волокон бора и армированных ими пластиков. Ракетная техника и космонавтика (США, пер. с англ.), 5, № 2, 1967.
23. Тарнопольский Ю. М. Прикладные задачи теории упругости конструктивно-анизотропных материалов. Докт. дис., 1967.
24. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
25. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
26. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.

27. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Изд. „Наука“, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1967.
28. Амбарцумян С. А. Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, № 9, 1947.
29. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, т. 12, в. 1, 1948.
30. Амбарцумян С. А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. Докл. АН АрмССР, т. 8, № 5, 1948.
31. Мовсисян А. А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 11, № 4, 1958.
32. Амбарцумян С. А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 3, 1964.
33. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Изд. „Машиностроение“, 1965.
34. Гольденвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
35. Воронич И. И. Об общих представлениях решений уравнений теории многослойных анизотропных оболочек. ПММ, т. 29, в. 4, 1965.
36. Амбарцумян С. А. К расчету двухслойных ортотропных оболочек. Известия ОН АН СССР, № 7, 1957.
37. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 1, 1959.
38. Амбарцумян С. А. К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, т. 22, в. 2, 1958.
39. Тарнопольский Ю. М., Розе А. В. Экспериментальная оценка влияния поперечных сдвигов при изгибе пластин из ориентированных стеклопластиков. Механика полимеров, 1, 1967.
40. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. Изд. АН УССР, 1963.
41. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ, т. 2, в. 4, 1939.
42. Reissner E. On the theory of bending of elastic Plates. J. Math. and Phys., v. 23, 1944.
43. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М. О погрешности гипотезы Кирхгофа в теории оболочек. ПММ, т. 7, в. 5, 1943.
44. Гольденвейзер А. А. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. 24, в. 4, 1962.
45. Мушари Х. М., Терезулов И. Г. Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, № 6, 1959.
46. Лехницкий С. Г. К теории анизотропных толстых плит. Изв. АН СССР, ОН, механика и машиностроение, № 2, 1959.
47. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc., A 226, No. 1325, 1962.
48. Векуа И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Тр. Тбилисского мат. ин-та им. А. М. Размадзе, т. 30, 1965.
49. Полятовский В. В. К теории изгиба анизотропных пластинок. ПММ, т. 28, в. 6, 1964.
50. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
51. Аксентян О. К., Воронич И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, т. 27, в. 6, 1963.
52. Nagdi P. M. On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math., v. 14, No. 4, 1957.
53. Григорюк Э. И., Чулков П. П. Расчет элементов анизотропных конструкций, 1965.
54. Айкопян А., Нигул У. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Изв. АН Эстонской ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 1, 1965.

55. Куришин А. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. Расчет пространств. констр., Сб. статей, к. 7, 1962.
56. Галинш А. К. Расчет пластин и оболочек по уточненной теории. Исследования по теории пластин и оболочек. Сб. 5, Казань, 1967.
57. Адаловян А. А. К теории изгиба ортотропных пластин. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
58. Гольденвейзер А. А. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. 27, к. 4, 1963.
59. Гольденвейзер А. А., Колос А. В. К построению двумерных уравнений теории упругости тонких пластинок. ПММ, т. 29, к. 1, 1965.
60. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Пластинки и оболочки из армированных материалов — основные уравнения, количественные результаты. Сб. докл., Секция инженерностроительной, подсекция динамики и прочности машин, МЭН, 1967.
61. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
62. Берг Б. А. О деформационной анизотропии. ПММ, т. 22, к. 1, 1958.
63. Гусейн-Заде М. И. Построение теории изгиба слоистых пластинок. Труды VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Изд. „Мир“, 1966.
64. Амбарцумян С. А., Багдадян Г. Е., Гинди В. Ц. Некоторые динамические задачи трехслойных анизотропных оболочек. Теория пластин и оболочек. Тр. II Всесоюз. конф., Киев, 1962.
65. Хачатрян А. А. К расчету трехслойной ортотропной оболочки. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 5, 1959.
66. Остерник Э. С., Бир Я. А. Инженерный метод расчета многослойных анизотропных пластинок. Теория оболочек и пластин. Тр. конференции, Ереван, 1964.
67. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. ПММ, т. 24, к. 2, 1960.
68. Болотин В. В. О теории армированных сред. Изв. АН СССР, механика, № 1, 1965.
69. Киселев М. Р., Зубов П. И., Сухарева А. А., Зиборовский Е. Э., Донгуш Э. П. Исследования внутренних напряжений в стеклопластиках. Механика полимеров, 1, 1965.
70. Абибов А. А., Молодцов Г. А. Исследование остаточных (внутренних) напряжений в армированном эпоксидном полимере. Механика полимеров, 4, 1965.
71. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1937.
72. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
73. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд. „Наука“, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1966.
74. Малинин Н. И. Исследование вопросов ползучести и прочности пластмасс. Докт. диссерт., 1965.
75. Скудра А. М. Деформативность и статическая усталость армированных пластинок при простом плоском нагружении. Докт. диссерт., 1967.
76. Налюшин А. А., Ошбаба П. М., Некоторые основные вопросы механики полимеров. Механика полимеров, 3, 1965.
77. Брызгалов Г. И. К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ, № 6, 1963.
78. Ван Фо Фы Г. А. К теории анизотропной ползучести стеклопласты. Механика полимеров, 2, 1965.
79. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
80. Мартиросян М. М. Влияние старения на ползучесть стеклопластика СВМ при растяжении с учетом ориентации волокон. Механика полимеров, 6, 1965.
81. Мартиросян М. М. Об учете влияния ориентации образца на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести стеклопластика СВМ. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 3, 1965.

82. Ишлинский А. Ю. Линейный закон деформирования не вполне упругих тел. Докл. АН СССР, нов. сер., 26, 1, 1940.
83. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехтеориздат, 1949.
84. Рабинович А. А. Об уравнении связи при плоском напряженном состоянии некоторых армированных полимеров. Тр. Моск. физ.-теор. ин-та, 9 (54), 1962.
85. Киракосян Р. М. О ползучести слоистого стеклопластика при изотермическом растяжении. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 1, 1965.
86. Гольдсмит И. И., Николаенко Н. А. Ползучесть и несущая способность оболочек. «ЦЕНИСК», научн. сообщ., в. 13, 1960.
87. Никишин А. А., Рабинович А. А. Некоторые задачи цилиндрического изгиба трехслойных пластин с учетом вязкоупругой деформации обшивки из стеклопластика. Докл. АН СССР, т. 151, № 3, 1963.
88. Григорюк Э. И. Динамика упруго-вязких оболочек и пластин. Докл. АН СССР, т. 138, № 6, 1961.
89. Тергулян А. Г. Расчет пластин из ориентированного стеклопластика. Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Изд. «Мир», 1966.
90. Амбарцумян С. А. Об устойчивости неупругих пластин с учетом деформаций поперечных сдвигов. ПММ, т. 27, в. 4, 1963.
91. Тетер Г. А., Пелех Б. А. Устойчивость ортотропных оболочек при ползучести с учетом деформаций поперечных сдвигов. Механика полимеров, 1, 1966.
92. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках. Инж. сб., 24, 1956.
93. Григорян Г. С. К расчету слоистых ортотропных оболочек с учетом ползучести материала. Сб. тр. ЕрПИ, юбилейный выпуск, Ереван, 1961.
94. Либреску А. Динамическая задача плоских вязко-упругих тонких оболочек. Revue de Mécanique Appliquée, t. 7, No. 4, 1962. Académie RPR.
95. Синицын Е. Н. О применении теории однородных трансверсально-изотропных пластин к расчету конструкций из вязко-упругих слоистых пластинок. Сб. докл., Секция энергомашиностроения, подсекция «Динамика и прочности машин, МЭИ, 1967.
96. Амбарцумян С. А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 5, № 6, 1952.
97. Болотин В. В., Болотина К. С. Температурная задача для кругового цилиндра из армированного слоистого материала. Механика полимеров, 1, 1967.
98. Дургарян С. М. К температурному расчету тонких ортотропных оболочек вращения. Инж. ж. АН СССР, т. 2, № 3, 1962.
99. Ambartsumian S. A., Durgarian S. M. Some thermoelastic problems of anisotropic shells and plates. Non-classical shell problems. Proceedings of the IASS Symposium, Warsaw, 1963.
100. Земляков И. П. О различии модулей упругости полиамидов при различных видах деформации. Механика полимеров, 4, 1965.
101. Солян А. С. О связи между деформациями и напряжениями для разнородноупругого при растяжении и сжатии композиционного материала строго однонаправленной структуры. Изв. АН АрмССР, сер. техн. науки, т. 18, № 6, 1966.
102. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разнородноупругих при растяжении и сжатии. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 2, 1966.
103. Амбарцумян С. А. Уравнения плоской задачи разнородноупругой или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 19, № 2, 1966.
104. Амбарцумян С. А. Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочкой, изготовленной из материала, разнородноупругого при растяжении и сжатии. Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1965.

105. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Безмоментная теория оболочек, изготовленных из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок, Изд. „Мир“, 1966.
106. Амбарцумян С. А. Теория симметрично нагруженных, слабомоментных оболочек вращения, изготовленных из разномодульных материалов. Инж. ж., механика твердого тела, № 6, 1967.
107. Смирнова М. К., Соколов Б. П., Сидорин Я. С., Иванова А. П. Прочность корпусов судна из стеклопластика. Изд. „Судостроение“, 1965.