ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ РАСТЯЖЕНИЯ, РАЗДУВАНИЯ И КРУЧЕНИЯ СОСТАВНОЙ ТРУБЫ ИЗ СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

В работе рассматриваются задачи больших упругих деформаций для трубы, составленной из нескольких надетых друг на друга и спаянных по боковым поверхностям однородных, изотропных круглых труб из различных сжимаемых материалов.

Решение задачи больших упругих деформаций для однородной трубы дано в [1, 2].

Эти задачи для составной трубы из несжимаемого материала рассмотрены в работе [6].

1. Пусть круглая цилиндрическая труба, состоящая из $(n-1)$ однородных, изотропных и сжимаемых слоев в недеформированном состоянии, имеет радиусы $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_n$.

Материалы слоев имеют различные функции энергии деформации $W_{(k)}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$. Между слоями существует полное сцепление.

Рассмотрим случай, когда труба испытывает одновременно следующие деформации:

а) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения λ,

б) кручение с углом закручивания ψ на единицу длины растянутой трубы,

в) раздувание, при котором радиусы $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_n$ переходят в $r_1 > r_2 > \cdots > r_n$. Если рассматривается задача выворачивания трубы, то $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$.

Рассматриваемая деформация трубы

$$r_{(k)} = r_{(k)}(\rho), \quad \theta = \vartheta + \lambda\psi x_3, \quad y_3 = \lambda x_3 \tag{1.1}$$

$$\rho_{(k)} = \rho_{(k)}(r), \quad \vartheta = \theta - \psi y_3, \quad x_3 = \frac{y_3}{\lambda} \tag{1.2}$$

где ρ, ϑ, x_3 и r, θ, y_3 — цилиндрические полярные координаты точки трубы в недеформированном и деформированном состояниях соответственно.

Индекс $(k=1, 2, \cdots, n-1)$ показывает номер слоя трубы.

Компоненты контрвариантного тензора напряжений определяются соотношениями [1]:

$$\tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi B^{ij} + pG^{ij} \tag{1.3}$$

где Φ, Ψ и p определяются выражениями

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad p = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3} \tag{1.4}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — инварианты деформации.

Метрические тензоры недеформированного и деформированного состояний тела будут [1]

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = r^2 \tag{1.5}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & -\psi\rho^2 \\ 0 & -\psi\rho^2 & \psi^2\rho^2 + \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} r_\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} + \lambda^2\psi^2 & \lambda^2\psi \\ 0 & \lambda^2\psi & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$g = \frac{\rho^2}{r_\rho^2\lambda^2} \tag{1.6}$$

Компоненты тензора B^{ij} выражаются в виде

$$B^{11} = r_\rho^2\left(\frac{r^2}{\rho^2} + \lambda^2\psi^2 r^2 + \lambda^2\right)$$

$$B^{22} = \frac{r_\rho^2}{\rho^2}(1 + \lambda^2\psi^2\rho^2) + \frac{\lambda^2}{\rho^2}$$

$$B^{33} = \lambda^2 r_\rho^2 + \frac{\lambda^2 r^2}{\rho^2} \tag{1.7}$$

$$B^{23} = \lambda^2\psi^2 r_\rho^2, \quad B^{12} = B^{31} = 0$$

Для компонентов контрвариантного тензора напряжения (1.3) из (1.5), (1.6) и (1.7) получаются выражения

$$\tau^{11} = r_\rho^2\left[\Phi + \left(\frac{r^2}{\rho^2} + \lambda^2\psi^2 r^2 + \lambda^2\right)\Psi\right] + p$$

$$r^2\tau^{22} = \tau^{11} + \left[\frac{r^2}{\rho^2}(1 + \lambda^2\psi^2\rho^2) - r_\rho^2\right]\Phi + \left(\frac{\lambda^2 r^2}{\rho^2} - \lambda^2 r_\rho^2\right)\Psi$$

$$\tau^{33} = \tau^{11} + (\lambda^2 - r_\rho^2)\Phi + \frac{r^2}{\rho^2}[\lambda^2 - r_\rho^2(1 + \lambda^2\psi^2\rho^2)]\Psi \tag{1.8}$$

$$\tau^{23} = \lambda^2\psi(\Phi + r_\rho^2\Psi), \quad \tau^{12} = \tau^{31} = 0$$

При отсутствии объемных сил напряженное состояние удовлетворяет уравнениям равновесия

$$r^2_{(k)}\tau^{22}_{(k)}=\frac{d}{dr_{(k)}}\left(r_{(k)}\tau^{11}_{(k)}\right),\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ n-1) \tag{1.9}$$

условиям сцепления

$$\begin{aligned} r_{(k)} &= r_{(k+1)} = r_{k+1} \quad \text{при} \quad \rho=\rho_{k+1} \\ \tau^{11}_{(k)} &= \tau^{11}_{(k+1)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

и условиям на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях составной трубы.

Результирующим моментом и результирующей силой системы сил, действующих на плоском торце составной трубы, будут

$$M=2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r^3_{(k)}\tau^{23}_{(k)}dr_{(k)}=2\pi\lambda^2\psi\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r^3_{(k)}\left(\Phi_{(k)}+r^2_{(k)}\psi^2\Psi_{(k)}\right)dr_{(k)} \tag{1.11}$$

$$N=2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r_{(k)}\tau^{33}_{(k)}dr_{(k)}=2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_k}\left\{\tau^{11}_{(k)}+\left(\lambda^2-\frac{r^2_{(k)}}{\rho^2}\right)\Phi_{(k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^2_{(k)}}{\rho^2}\left[\lambda^2-\frac{r^2_{(k)}}{\rho^2}\left(1+\lambda^2\rho^2\psi^2\right)\right]\Psi_{(k)}\right\}r_{(k)}dr_{(k)} \tag{1.12}$$

На внешней и внутренней цилиндрических поверхностях составной трубы могут быть заданы два из следующих четырех условий:

$$\begin{aligned} \tau^{11}_{(1)} &= P_1, \qquad r_{(1)}=r_1 \quad \text{при} \quad \rho=\rho_1 \\ \tau^{11}_{(n-1)} &= P_2, \quad r_{(n-1)}=r_n \quad \text{при} \quad \rho=\rho_n \end{aligned} \tag{1.13}$$

Условия (1.10) и (1.13) являются краевыми условиями, которым должны удовлетворять решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно искомых функций $r_{(k)}(\rho)$ (1.9).

Если из (1.9), (1.10) и (1.13) найдены $r_{(k)}(\rho)$, то на основании (1.8), (1.11) и (1.12) определяется напряженное состояние.

Если ψ или λ неизвестны, то для определения их к основным уравнениям (1.9) добавляется (1.11) или (1.12), где M или N заранее известны. Если оба ψ и λ неизвестны, то к (1.9) добавляются выражения (1.11) и (1.12).

2. При малых, но конечных деформациях функцию энергии деформации можно представить выражением, данным Мурнаганом [3]

$$W=A_1J_2+A_2J_1^2+A_3J_1J_2+A_4J_1^3+A_5J_3 \tag{2.1}$$

где J_1, J_2 и J_3 — инварианты деформации, определяемые формулами

$$
\begin{aligned}
J_1 &= I_1 - 3 \\
J_2 &= I_2 - 2I_1 + 3 \\
J_3 &= I_3 - I_2 + I_1 - 1
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$A_1 - A_5$ — постоянные, определяющие упругие свойства материалов.

Подставляя в (1.8) выражения

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{2}{\sqrt{I_3}}(3A_4I_1^2 + B_1I_1 + A_3I_2 + B_2) \\
\Psi &= \frac{2}{\sqrt{I_3}}(A_3I_1 + B_3) \\
p &= 2\sqrt{I_3}\,A_5
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

которые получаются из (1.4), (2.1) и (2.2) после введения новых постоянных

$$
\begin{aligned}
B_1 &= 2A_2 - 4A_3 - 18A_4 \\
B_2 &= -2A_1 - 6A_2 + 9A_1 + 27A_4 + A_5 \\
B_3 &= A_1 - 3A_3 - A_5
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

получим

$$
\begin{aligned}
\sigma^{11} &= \frac{2r_\rho^2}{\sqrt{I_3}}\Big[3A_4I_1^2 + B_1I_1 + A_3I_2 + B_2 + \\
&\quad + \left(\frac{r^2}{\rho^2} + \lambda^2\psi^2r^2 + \lambda^2\right)(A_3I_1 + B_3)\Big] + 2\sqrt{I_3}\,A_5 \\
r^2\sigma^{22} &= \sigma^{11} + \frac{2}{\sqrt{I_3}}\Big[\left(\frac{r^2}{\rho^2} + r^2\lambda^2\psi^2 - r_\rho^2\right)(3A_4I_1^2 + B_1I_1 + A_3I_2 + B_2) + \\
&\quad + \left(\frac{r^2\lambda^2}{\rho^2} - \lambda^2r_\rho^2\right)(A_3I_1 + B_3)\Big] \\
\sigma^{33} &= \sigma^{11} + (\lambda^2 - r_\rho^2)(3A_4I_1^2 + B_1I_1 + A_3I_2 + B_2)\frac{2}{\sqrt{I_3}} + \\
&\quad + \frac{2r^2}{\rho^2\sqrt{I_3}}[\lambda^2 - r_\rho^2(1 + \lambda^2\psi^2\rho^2)](A_3I_1 + B_3) \\
\sigma^{23} &= \frac{2\lambda^2\psi^2}{\sqrt{I_3}}[3A_4I_1^2 + B_1I_1 + A_3I_2 + B_2 + r_\rho^2(A_3I_1 + B_3)] \\
\sigma^{12} &= \sigma^{31} = 0
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Здесь инварианты I_1, I_2, I_3 определяются выражениями

$$
\begin{aligned}
I_1 &= g^{rs}G_{rs} = r'^2 + \frac{r^2}{\rho^2} + r^2\lambda^2\psi^2 + \lambda^2 \\
I_2 &= g_{rs}G^{rs} I_3 = \frac{r'^2 r^2}{\rho^2} + r'^2\lambda^2 + r'^2 r^2\lambda^2\psi^2 + \frac{r^2\lambda^2}{\rho^2} \qquad (2.6) \\
I_3 &= \frac{G}{g} = \frac{r'^2 r^2 \lambda^2}{\rho^2}
\end{aligned}
$$

На основании (2.5) уравнения равновесия (1.9) приводится к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{2r'_{(k)} r_{(k)}}{\sqrt{I_3^{(k)}}}\Big[3A_4^{(k)} I_1^{(k)2} + B_4^{(k)} I_1^{(k)} + A_2^{(k)} I_2^{(k)} + B_2^{(k)} + \right. \\
&\left. + \left(\frac{r_{(k)}^2}{\rho^2} + r_{(k)}^2\lambda^2\psi^2 + \lambda^2\right)\left(A_3^{(k)} I_1^{(k)} + B_3^{(k)}\right)\Big] + 2A_5^{(k)}\sqrt{I_3^{(k)}}\right\} - \\
&- \frac{2r_{(k)}}{\sqrt{I_3^{(k)}}}\Big[\left(\frac{r'^2_{(k)}}{\rho^2} + r'^2_{(k)}\lambda^2\psi^2\right)\left(3A_4^{(k)} I_1^{(k)2} + B_4^{(k)} I_1^{(k)} + A_2^{(k)} I_2^{(k)} + B_2^{(k)}\right) + \\
&+ \left(\frac{r'^2_{(k)} r_{(k)}^2}{\rho^2} + r'^2_{(k)} r_{(k)}^2\lambda^2\psi^2 + \frac{r'^2_{(k)}\lambda^2}{\rho^2}\right)\left(A_3^{(k)} I_1^{(k)} + B_3^{(k)}\right) + A_5^{(k)} I_3^{(k)}\Big] \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

3. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку трубы, состоящей из двух труб. Пусть функции энергии деформации материалов этих труб имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
W_{(1)} &= -2.46\, J_2^{(1)} + 10.9 J_1^{(1)2} - 11 J_1^{(1)} J_2^{(1)} - 2.76 J_3^{(1)} \\
W_{(2)} &= -5 J_2^{(2)} + 22 J_1^{(2)2} + 24 J_1^{(2)} J_2^{(2)} - 5.6 J_3^{(2)}
\end{aligned} \qquad (3.1)
$$

При подборе постоянных, входящих в $W_{(1)}$, использованы опытные данные Ривлина и Сандерса [4] на простой сдвиг и на простое удлинение. Постоянные, входящие в $W_{(2)}$, выбраны, используя результаты экспериментов Треолара [5].

Слагаемые в выражениях $W_{(1)}$ и $W_{(2)}$, содержащие J_3, отброшены для упрощения вычислений.

Если в уравнениях (3.1) пренебречь членами более высокого порядка, чем второй (по отношению к главным удлинениям), и инварианты I_1 и I_2 выразить через главные удлинения (см., например, [2])

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2(e_1 + e_2 + e_3) + (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 3 \\
I_2 &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 = 3 + 4(e_1 + e_2 + e_3) + \\
&+ 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) + O(e^3) \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

то после простых преобразований получим выражение W классической теории упругости

$$2W_{(1)} = 73.36\,(e_1^{(1)} + e_2^{(1)} + e_3^{(1)})^2 + 2\cdot 4.92\,(e_1^{(1)2} + e_2^{(1)2} + e_3^{(1)2})$$
$$2W_{(2)} = 156\,(e_1^{(2)} + e_2^{(2)} + e_3^{(2)})^2 + 2\cdot 10\,(e_1^{(2)2} + e_2^{(2)2} + e_3^{(2)2}) \qquad (3.3)$$

Отсюда видно, что выбранным материалам при малых деформациях соответствуют упругие постоянные Ламе $\mu_1 = 4.92$, $\mu_2 = 10$, $\lambda_1 = 73.36$, $\lambda_2 = 156$, коэффициенты Пуассона $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.47$ и модули Юнга $E_1 = 14.4$ *кг/см²*, $E_2 = 29.4$ *кг/см²*.

Для рассматриваемого частного примера из (2.7) получаем

$$r_{(1)\rho\rho}\left(-0.6\,r^2_{(1)\rho}\rho + 66\,\frac{r^2_{(1)\rho}r^2_{(1)}}{\rho} - 24.66\,\frac{r^2_{(1)}}{\rho} + 11\,\frac{r^4_{(1)}}{\rho^3} - 8.14\,\rho\right) -$$
$$-0.2\,r^3_{(1)\rho} + 33\,\frac{r^4_{(1)\rho}r_{(1)}}{\rho} - 22\,\frac{r^3_{(1)\rho}r^2_{(1)}}{\rho^2} - 24.66\,\frac{r^2_{(1)\rho}r_{(1)}}{\rho} +$$
$$+24.66\,\frac{r_{(1)\rho}r^2_{(1)}}{\rho^2} + 22\,\frac{r^2_{(1)\rho}r^3_{(1)}}{\rho^3} - 33\,\frac{r_{(1)\rho}r^4_{(1)}}{\rho^4} -$$
$$-8.14\,r_{(1)\rho} + 0.2\,\frac{r^3_{(1)}}{\rho^3} + 8.14\,\frac{r_{(1)}}{\rho} = 0 \qquad (3.4)$$

$$r_{(2)\rho\rho}\left(-12\,r^2_{(2)\rho}\rho + 144\,\frac{r^2_{(2)\rho}r^2_{(2)}}{\rho} - 57\,\frac{r^2_{(2)}}{\rho} + 24\,\frac{r^4_{(2)}}{\rho^3} - 11\,\rho\right) -$$
$$-4r^3_{(2)\rho} + 72\,\frac{r^4_{(2)\rho}r_{(2)}}{\rho} - 48\,\frac{r^3_{(2)\rho}r^2_{(2)}}{\rho^2} - 57\,\frac{r^2_{(2)\rho}r_{(2)}}{\rho} + 57\,\frac{r_{(2)\rho}r^2_{(2)}}{\rho^2} +$$
$$+48\,\frac{r^2_{(2)\rho}r^3_{(2)}}{\rho^3} - 72\,\frac{r_{(2)\rho}r^4_{(2)}}{\rho^4} - 11r_{(2)\rho} + 4\,\frac{r^3_{(2)}}{\rho^3} + 11\,\frac{r_{(2)}}{\rho} = 0 \qquad (3.5)$$

На основании (1.10) и (2.5) имеем условия

$$r_{(1)} = r_{(2)} = r_2$$

$$r^3_{(1)\rho}\left(22\,\frac{r_2^2}{\rho_2^2} - 0.2\,\rho_2\right) + r_{(1)\rho}\left(11\,\frac{r_2^4}{\rho_2^3} - 24.66\,\frac{r_2^2}{\rho_2} - 8.14\,\rho_2\right) =$$
$$= r^3_{(2)\rho}\left(48\,\frac{r_2^2}{\rho_2} - 4\rho_2\right) + r_{(2)\rho}\left(24\,\frac{r_2^4}{\rho_2^3} - 57\,\frac{r_2^2}{\rho_2} - 11\,\rho_2\right) \qquad (3.6)$$

при $\rho = \rho_2$.

Варианты постановки рассматриваемой задачи непосредственно связаны с конкретными условиями на внешней и внутренней поверхностях трубы. Два из этих вариантов рассматриваются на следующих численных примерах.

Пусть двухслойная труба из вышеподобранных материалов в недеформированном состоянии имеет радиусы поперечного сечения: $\rho_1 = 20$ *см*, $\rho_2 = 19$ *см*, $\rho_3 = 18$ *см*. Труба выворачивается наизнанку так, что после деформаций внешняя поверхность переходит на свободную от напряжений внутреннюю поверхность ($r_3 = -18$ *см*) при коэффициенте растяжения $\lambda = -1$.

На свободной от напряжений цилиндрической поверхности $r_1 = -18$ *см* имеем следующие граничные условия:

$$r_{(1)}(20) = r_1 = -18 \text{ см}$$

$$r_{(1)\rho}\big|_{\rho=\rho_1} = \sqrt{\left(24.66\frac{r_1^2}{\rho_1} - 11\frac{r_1^4}{\rho_1^3} + 8.14\rho\right)\Big/\left(22\frac{r_1^2}{\rho_1} - 0.2\rho_1\right)} \tag{3.7}$$

Последнее выражение получается из условия $\tau_{(1)}^{11} = 0$, когда $\rho = \rho_1 = 20$ *см*, а знак перед корнем выбран на основании геометрических соображений.

Определяя решение дифференциального уравнения (3.4), удовлетворяющее граничным условиям (3.7), из (3.6) легко найти r_2 и $r_{(2)\rho}\big|_{\rho=18}$, т. е. граничные условия, которым должно удовлетворять решение дифференциального уравнения (3.5).

Подставляя полученные значения $r_{(1)}$, $r_{(1)\rho}$, $r_{(2)}$ и $r_{(2)\rho}$ в (2.5), получаем величины компонентов контрвариантного тензора напряжений.

Численное решение задачи найдено с помощью вычислительной машины „Наири—1". Результаты с точностью до пропущенных знаков приведены в табл. 1.

Там же, с целью сопоставления, в скобках приводятся результаты соответствующих величин для трубы из несжимаемых материалов, т. е. когда в (3.1) принимается $I_3^{(1)} = I_3^{(2)} = 1$.

Результирующая сила на торцевой плоскости составной трубы получается из (1.12)

$$N = 62.886 \text{ кг}$$

Для указанного несжимаемого материала

$$N = 47.281 \text{ кг}$$

Пусть теперь рассматриваемая двухслойная труба выворачивается наизнанку так, что и внешняя и внутренняя поверхности после деформаций остаются свободными от напряжений при коэффициенте растяжения $\lambda = -1$.

На цилиндрических поверхностях $\rho_1 = 20$ *см* и $\rho_2 = 18$ *см* после деформации имеем следующие граничные условия:

$$r_{(1)\rho}\big|_{\rho=20} = \sqrt{\frac{1.233\, r_1^2 - 0.001375\, r_1^4 - 162.8}{1.1\, r_1^2 - 4}} \tag{3.8}$$

$$r_{(2)\rho}\big|_{\rho=18} = \sqrt{\frac{3.1667\, r_2^2 - 0.004115\, r_2^4 + 198}{2.6667\, r_2^2 - 72}} \tag{3.9}$$

которые получаются из условий $\tau_{(1)}^{11}\big|_{\rho=20} = 0$ и $\tau_{(2)}^{11}\big|_{\rho=18} = 0$.

Эти граничные условия вместе с (3.6) достаточны для решения дифференциальных уравнений (3.4) и (3.5). Программа для вычисли-

Таблица 1

	ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	τ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\tau^{22}$ в *кг/см*^{2}	τ^{33} в *кг/см*^{2}
Первый слой	20.0	—18 (—18)	1.0890	0.0000 (0.0000)	—1.5561 (—2.0813)	—0.7513 (—1.0795)
	19.8	—18.2160 (—18.2198)	1.0709	—0.0171 (—0.0226)	—1.3210 (—1.6633)	—0.6440 (—0.8775)
	19.6	—18.4283 (—18.4347)	1.0527	—0.0306 (—0.0393)	—1.0438 (—1.2471)	—0.5140 (—0.6661)
	19.4	—18.6371 (—18.6451)	1.0344	—0.0402 (—0.0506)	—0.7282 (—0.8321)	—0.3651 (—0.4522)
	19.2	—18.8421 (—18.8510)	1.0160	—0.0458 (—0.0569)	—0.3784 (—0.4179)	—0.2002 (—0.2399)
	19.0	—19.0434 (—19.0526)	0.9974	—0.0474 (—0.0585)	0.0004 (—0.0142)	—0.0221 (—0.0314)
Второй слой	19.0	—19.0434 (—19.0526)	0.9977	—0.0474 (—0.0585)	0.0442 (0.0520)	—0.0015 (—0.0065)
	18.8	—19.2411 (—19.2500)	0.9789	—0.0424 (—0.0527)	0.8596 (0.8920)	0.3821 (0.4114)
	18.6	—19.4350 (—19.4432)	0.9600	—0.0292 (—0.0396)	1.7001 (1.7251)	0.7810 (0.8161)
	18.4	—19.6251 (—19.6326)	0.9407	—0.0084 (—0.0186)	2.5454 (2.5473)	1.1909 (1.2151)
	18.2	—19.8113 (—19.8182)	0.9210	0.0195 (0.0092)	3.3708 (3.3531)	1.6080 (1.6146)
	18.0	—19.9935 (—20.0000)	0.9010	0.0536 (0.0432)	4.1476 (4.1375)	2.0287 (2.0242)

Таблица 2

	ρ в см	r в см	r_ρ	τ^{11} в $кг/см^2$	$r^2\tau^{22}$ в $кг/см^2$	τ^{33} в $кг/см^2$
Первый слой	20.0	—17.5965 (—17.7123)	1.1074	0.0000 (0.0000)	—1.7648 (—2.4025)	—0.8512 (—1.2335)
	19.8	—17.8161 (—17.9356)	1.0890	—0.0206 (—0.0273)	—1.5741 (—1.9800)	—0.7706 (—1.0424)
	19.6	—18.0321 (—18.1539)	1.0706	—0.0379 (—0.0485)	—1.3372 (—1.5538)	—0.6617 (—0.8297)
	19.4	—18.2444 (—18.3675)	1.0523	—0.0514 (—0.0634)	—1.0574 (—1.1408)	—0.5304 (—0.6212)
	19.2	—18.4530 (—18.5765)	1.0338	—0.0610 (—0.0732)	—0.7385 (—0.7231)	—0.3798 (—0.4058)
	19.0	—18.6579 (—18.7810)	1.0152	—0.0666 (—0.0780)	—0.3850 (—0.3062)	—0.2132 (—0.1931)
Второй слой	19.0	—18.6579 (—18.7810)	1.0156	—0.0666 (—0.0780)	—0.7245 (—0.5416)	—0.3736 (—0.3118)
	18.8	—18.8591 (—18.9804)	0.9968	—0.0696 (—0.0783)	0.0570 (0.3053)	—0.0060 (—0.1121)
	18.6	—19.0566 (—19.1772)	0.9779	—0.0640 (—0.0701)	0.8814 (1.1495)	0.3820 (0.5261)
	18.4	—19.2503 (—19.3692)	0.9587	—0.0503 (—0.0538)	1.7306 (1.9857)	0.7853 (0.9316)
	18.2	—19.4400 (—19.5572)	0.9392	—0.0287 (—0.0303)	2.5828 (2.8087)	1.1995 (1.3328)
	18.0	—19.6259 (—19.7415)	0.9193	0.0000 (0.0000)	3.4129 (3.6134)	1.6205 (1.7375)

тельной машины составлена так, что, задавая r_1 и решая дифференциальные уравнения (3.4) и (3.5), добиваемся удовлетворения (3.9). Результаты решения приведены в табл. 2.

Для результирующей силы получаем

$$N = -1.6097 \text{ кг} \ (-5.8157 \text{ кг})$$

Здесь тоже сопоставляются полученные числовые результаты с соответствующими результатами для трубы из несжимаемых материалов.

Из таблиц видно, что при выворачивании двухслойной трубы наизнанку учет малой сжимаемости материалов (соответствующей $\sigma = 0.47$ при переходе к линейной теории) значительно изменяет напряженное состояние. Изменение деформированного состояния незначительно.

По-видимому, изменения напряженного состояния нельзя считать следствием только влияния сжимаемости материала, так как учет I_3 в W вообще изменяет зависимость между напряжениями и деформациями.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность К. С. Чобаняну за постановку задачи и руководство работой.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 II 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՍԵՂՄԵԼԻ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՁԳՄԱՆ, ԸՆԴԱՐՁԱԿՄԱՆ ԵՎ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա աշխատանքում՝ մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության հիման վրա, դիտարկվում է սեղմելի նյութերից պատրաստված, կլոր գլանային խողովակներ ներկայացնող, շերտերից կազմված բաղադրյալ խողովակի ձգման, ընդարձակման և ոլորման խնդրի լուծումը, երբ դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան ունի ընդհանուր տեսք։

Ուսումնասիրված է նաև այն դեպքը, երբ դեֆորմացիաները մեծ չեն (բայց վերջավոր են) և դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան կարելի է արտահայտել Մուռնագանի արտահայտության միջոցով։ Մասնավորապես, թվային օրինակների տեսքով, դիտարկվում է երկշերտ խողովակի շրջման խնդիրը։

Աշխատանքում օգտագործվում է՝ համասեռ, սեղմելի նյութից պատրաստված խողովակի համար Գրինի [1,2] կողմից տրված լուծումը։

R. E. MKRTCHIAN

LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF EXTENSION, INFLATION AND TORSION OF A COMPRESSIBLE COMPOSITE TUBE

Summary

The solution of the problem of large elastic deformation for extension, inflation and torsion of tubes, composed of compressible circular, cylindrical tubes is considered. The strain-energy function has been taken in a general form.

The case, when deformations are not large (but are finite), and the strain-energy function has Murnaghan's form is also considered. In particular the solution of the problem of tube composed of two layers and turned inside out is given with the help of numerical examples.

A. E. Green's solutions [1, 2] for homogeneous compressible cylindrical tubes are used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Green A. E.* Finite elastic deformation of compressible isotropic bodies. Proc. Roy. Soc., A 227, 1955, 271—278.
2. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд-во „Мир", М., 1965.
3. Реология, под. ред. Ф. Эйриха. ИЛ, 1962.
4. *Rivlin R. S., Saunders D. W.* Large elastic deformations of isotropic materials, VII. Experiments on the deformation of rubber. Phil. Trans. Roy. Soc., A 243, 1951, 251—288
5. Расчеты на прочность в машиностроении, под редакцией С. Д. Пономарева. Машгиз, М., 1958, т. II, 522—529.
6. *Чобанян К. С., Мкртчян Р. Е.* Общие решения задач конечных упругих деформаций для растяжения, раздувания и кручения составных труб. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.