

М. А. ЗАДОЯН

СМЕШАННОЕ ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ПОЛЗУЧЕГО ТЕЛА И ЗАДАЧА ВЫПУЧИВАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

В настоящей работе на основе идей Э. Рейснера [1] составляется вариационное уравнение нелинейно-ползучей среды [2, 3] (бетон, пластмасса, дерево, грунт), допускающее одновременное варьирование напряженного и деформированного состояния. Для сред ползучести, относящихся, главным образом, к металлам, смешанное вариационное уравнение ранее получено и применено в исследованиях [4, 5]. Для упруго-ползучего тела такое вариационное уравнение получено в нашей работе [6].

1. Зависимости между компонентами напряжения и деформации для рассматриваемой среды принимаем [2, 3, 7] в виде

$$2G\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma - \int_0^t \left(\sigma_{xx} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right) \frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i} K(t, \tau) d\tau$$

$$G\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy} - \int_0^t \sigma_{xy} \frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i} K(t, \tau) d\tau \quad (x, y, z) \quad (1)$$

Здесь модуль упругости и коэффициент Пуассона ν для простоты приняты постоянными, $E = 2(1 + \nu)G$, $3\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$, $K(t, \tau) = E \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C(t, \tau) = c(\tau) [1 - \beta e^{-\alpha(t-\tau)}]$ — мера ползучести материала,

σ_i — интенсивность касательных напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)} \quad (2)$$

В некоторых случаях закон нелинейности хорошо описывается степенными функциями [17, 18]

$$F(\sigma_i) = \alpha \sigma_i + \beta \sigma_i^m \quad (3)$$

где α , β , m — характеристики материала.

Для простоты объемные силы принимаем равными нулю, а относительные удлинения и сдвиги — малыми. Будем придерживаться обозначений книги [8]. Компоненты деформации выражаются через компоненты перемещения соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

Остальные зависимости будут получены из (4) путем круговой перестановки u, v, w и x, y, z .

Аналогично [6, 7, 9] введем функцию

$$\begin{aligned} U(t, \tau) &= \frac{1}{4G} [\varepsilon_{xx}(t) \varepsilon_{xx}(\tau) + \varepsilon_{yy}(t) \varepsilon_{yy}(\tau) + \varepsilon_{zz}(t) \varepsilon_{zz}(\tau) - \\ &- \frac{3\nu}{1+\nu} \varepsilon(t) \varepsilon(\tau)] + \frac{1}{2G} [\varepsilon_{xy}(t) \varepsilon_{xy}(\tau) + \varepsilon_{yz}(t) \varepsilon_{yz}(\tau) + \varepsilon_{xz}(t) \varepsilon_{xz}(\tau)] \end{aligned} \quad (5)$$

представляющую при $\tau = t$ удельную потенциальную энергию упругого материала.

Положим, что на части поверхности тела Ω_1 заданы смещения $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, а на другой части Ω_2 — напряжения $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$. Эти величины представляют собой удельную поверхностную нагрузку по неподвижным осям X, Y, Z . Через ξ, η, ζ обозначены координаты точек после деформации, x, y, z — начальные декартовы координаты, преобразующиеся в криволинейную систему координат в ходе деформации.

Проекции поверхностных нагрузок выражаются через напряжения по формулам [8]

$$\begin{aligned} p_x &= \varepsilon_{xx} \cos(n, X) + \varepsilon_{yx} \cos(n, Y) + \varepsilon_{zx} \cos(n, Z) \\ p_y &= \varepsilon_{xy} \cos(n, X) + \varepsilon_{yy} \cos(n, Y) + \varepsilon_{zy} \cos(n, Z) \\ p_z &= \varepsilon_{xz} \cos(n, X) + \varepsilon_{yz} \cos(n, Y) + \varepsilon_{zz} \cos(n, Z) \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yx}, \dots$ означают проекции напряжений на оси X, Y, Z и определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varepsilon_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \varepsilon_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varepsilon_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} \varepsilon_{yy} + \frac{\partial u}{\partial z} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varepsilon_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y} \varepsilon_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (7)$$

Остальные шесть соотношений получаются из (7) путем очевидной перестановки букв.

Пусть $u(t), v(t), w(t)$ — истинное поле перемещения, $\varepsilon_{xx}(t), \varepsilon_{xy}(t), \dots$ — истинное распределение деформаций, а $\varepsilon_{xx}(t), \varepsilon_{xy}(t), \dots$ — действительное распределение напряжения. В некоторый момент t рас-

смотрим бесконечно малое статически возможное приращение перемещений $\delta u(t)$, $\delta v(t)$, $\delta w(t)$ и соответствующие приращения деформаций $\delta \varepsilon_{xx}(t)$, $\delta \varepsilon_{xy}(t)$, ...

Одновременно с действительными напряжениями $\varepsilon_{xx}(t)$, $\varepsilon_{xy}(t)$, ... рассмотрим также бесконечно малое приращение напряжения $\delta \varepsilon_{xx}(t)$, $\delta \varepsilon_{xy}(t)$, ...

Вариации, сообщаемые телу в момент t , не связаны с вариацией в какой-либо момент $t + dt$. Эти вариации не меняются во времени [10, 6, 7, 9], т. е. аргумент t при варьировании играет роль параметра.

Покажем, что вариационное уравнение

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ \int \int \int \left[\varepsilon_{xx}(t) \delta \varepsilon_{xx}(t) + \dots + \varepsilon_{xy}(t) \delta \varepsilon_{xy}(t) - U(t, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \int U(t, z) \frac{F(z_i)}{z_i} K(t, z) dz \right] dv - \int \int [p_x(u - \bar{u}) + \right. \\ & \left. + p_y(v - \bar{v}) + p_z(w - \bar{w})] d\Omega - \int \int [\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w] d\Omega \right\} = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

где напряжения и деформации варьируются одновременно и независимо, эквивалентно дифференциальному уравнению равновесия, соотношениям между компонентами деформации и напряжений и соответствующим граничным условиям.

Для краткости введем обозначения

$$\delta J(t) = \int \int \int \left[\varepsilon_{xx}(t) \delta \varepsilon_{xx}(t) + \dots + \varepsilon_{xy}(t) \delta \varepsilon_{xy}(t) \right] dv \quad (9)$$

Используя преобразования типа

$$\int \int \int z_i \delta \frac{\partial u}{\partial x} dv = \int \int \int \frac{\partial}{\partial x} (z_i \delta u) dv - \int \int \int \frac{\partial z_{ix}}{\partial x} \delta u dv \quad (10)$$

$$\int \int \int \varepsilon_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} z_i \frac{\partial u}{\partial x} dv = \int \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right) dv - \int \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u dv$$

получим

$$\begin{aligned} \delta J = & \int \int \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{xx} \delta u + \varepsilon_{xy} \delta v + \varepsilon_z \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_y \delta u + \varepsilon_{yy} \delta v + \varepsilon_{yz} \delta w) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_z \delta u + \varepsilon_{zy} \delta v + \varepsilon_{zz} \delta w) \right\} dv - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right] \delta u + \left[\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right] \delta v + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] \delta w \right\} d\Omega
 \end{aligned} \quad (11)$$

Применив формулу Гаусса-Остроградского о преобразовании объемного интеграла в поверхностный, находим

$$\begin{aligned}
 \delta U = \iint_{\Sigma} [p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w] d\Omega - \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right] \delta u + [\dots] \delta v + [\dots] \delta w \right\} d\Omega
 \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь использовано также условие, что на Ω_2 заданы перемещения ($\delta u = \delta v = \delta w = 0$).

Одновременно, варьируя напряжения и деформации и (8) и используя (12), будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\varepsilon_{xx}(t) - \frac{\partial U(t, t)}{\partial \sigma_{xx}(t)} - 2 \int_{\xi}^{\zeta} \frac{\partial U(t, \tau) F(\tau)}{\partial \sigma_{xx}(t) \tau} K(t, \tau) d\tau \right] \delta \sigma_{xx}(t) + \dots \right. \\
 & \left. + \left[\varepsilon_{zz}(t) - \frac{\partial U(t, t)}{\partial \sigma_{zz}(t)} - 2 \int_{\xi}^{\zeta} \frac{\partial U(t, \tau) F(\tau)}{\partial \sigma_{zz}(t) \tau} K(t, \tau) d\tau \right] \delta \sigma_{zz}(t) \right\} d\Omega - \\
 & - \iiint_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right] \delta u + [\dots] \delta v + [\dots] \delta w \right\} d\Omega + \\
 & + \int_{\Sigma} [(u - \bar{u}) \delta p_x + (v - \bar{v}) \delta p_y + (w - \bar{w}) \delta p_z] d\Omega - \\
 & - \int_{\Sigma} [(p_x - \bar{p}_x) \delta u + (p_y - \bar{p}_y) \delta v + (p_z - \bar{p}_z) \delta w] d\Omega = 0
 \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку вариации перемещения и вариации напряжения произвольны, отсюда следует дифференциальные уравнения равновесия [8]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (\xi, \zeta, \tau) \quad (14)$$

соотношения между напряжениями и деформациями

$$\varepsilon_{xx}(t) = \frac{\partial U(t, t)}{\partial \varepsilon_{xx}(t)} - 2 \int \frac{\partial U(t, z)}{\partial \varepsilon_{xx}(t)} \frac{F(z_i)}{z_i} K(t, z) dz \quad (15)$$

$$\varepsilon_{xy}(t) = \frac{\partial U(t, t)}{\partial \varepsilon_{xy}(t)} - 2 \int \frac{\partial U(t, z)}{\partial \varepsilon_{xy}(t)} \frac{F(z_i)}{z_i} K(t, z) dz \quad (x, y, z)$$

идентичные с зависимостями (1), и граничные условия

$$\begin{aligned} u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} \quad \text{на} \quad \Omega_0 \\ p_x = \bar{p}_x, \quad p_y = \bar{p}_y, \quad p_z = \bar{p}_z \quad \text{на} \quad \Omega_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Для $F(z_i) = z_i$ и геометрически линейного случая аналогичное уравнение приведено в работе [6].

2. Рассмотрим задачу устойчивости призматического стержня (фиг. 1) из нелинейно-ползучего материала, описываемого соотношениями (1). Для линейно-ползучего материала наследственного типа задача устойчивости призматических стержней исследована в работах [11, 12]. Задача устойчивости металлических стержней в условиях ползучести исследована в работах [4, 13–16]. Подробное изложение этих вопросов приведено в монографии Ю. Н. Работнова [4].

Для рассматриваемого материала при одномерном сжатии имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_*(t) = \frac{\varepsilon_*(t)}{E} \\ - \int_0^t \left\{ F[\varepsilon_*(z)] \frac{\partial}{\partial z} C(t, z) dz \right. \quad (17) \end{aligned}$$

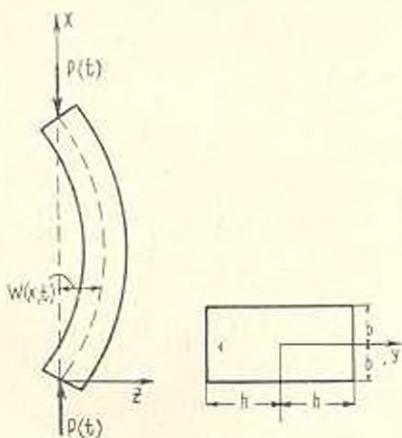
где

$$F(\varepsilon_*) = \alpha \varepsilon_* + \beta \varepsilon_*^n \quad (18)$$

Здесь ε_* является функцией как t , так и координат x, y .

Пусть стержень с шарнирно-закрепленными концами, имеющий в недеформированном состоянии начальное искривление $w_0(x)$, в момент $t = \tau_0$ сжимается продольными силами $P(t)$, которые меняются во времени по заданному закону. В момент $t = \tau_0$ возникает дополнительный прогиб, меняющийся во времени вследствие ползучести материала и изменения приложенной нагрузки. Полный прогиб в момент t обозначим через $w(x, t)$. Из условия закрепления концов стержня имеем

$$w(0, t) = w(l, t) = 0 \quad (19)$$



Фиг. 1.

Условимся считать сжимающее напряжение положительным, а поперечное сечение, для простоты, положим прямоугольным. Из условия равновесия части стержня имеем

$$2b \int_{-h}^h z_* dy = P, \quad 2b \int_{-h}^h z_* y dy = -Pw \quad (20)$$

Принимая гипотезу плоских сечений, будем иметь

$$\varepsilon_* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) y \quad (21)$$

где „ u “ — продольное перемещение, зависящее от x и t . Для нашей задачи функцией (4) будет

$$U(t, \tau) = \frac{z_*(t) z_*(\tau)}{2E} \quad (22)$$

а вариационным уравнением (8) —

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_{-h}^h \left\{ z_*(t) z_*(\tau) - \frac{z_*^2(t)}{2E} - \int_0^l z_*(t) F[z_*(\tau)] K(t, \tau) d\tau \right\} dx dy - \\ - \frac{P(t)}{2b} \delta u(t, t) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь принято $u(0, t) = 0$. Сближение концов стержня будет [14]

$$u(t, t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (24)$$

Варьируя в (23) напряжение и деформацию независимо, получим

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_{-h}^h \left\{ z_*(t) \delta z_*(t) - \varepsilon_*(t) \delta \varepsilon_*(t) - \frac{z_*(t)}{E} \delta z_*(t) - \right. \\ \left. + \int_0^l F(z_*) \varepsilon_*(\tau) \delta z_*(t) K(t, \tau) d\tau \right\} dx dy - \frac{P(t)}{2b} \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

За начальное искривление стержня примем

$$w_0(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (26)$$

где w_0 — некоторая постоянная. Ищем прогиб с одной неизвестной функцией в виде

$$w(x, t) = f(t) w(x, \tau_0), \quad w(x, \tau_0) = w_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (27)$$

причем $\omega_1 = \omega_0 / (1 - \mu)$, $\mu = \nu_0 / \nu_1$, $\nu_0 = P(\tau_0) / F$, $F = 4bh$, $\nu_1 = P_1 F$, $P_1 = \pi^2 EI / l^2$ (эйлерова сила), $I = 4bh^3 / 3$ — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, $f(t)$ — искомая функция от t , причем $f(\tau_0) = 1$.

Следуя В. И. Розенблюму [13], примем, что напряжения меняются по сечению по линейному закону

$$\sigma_0(x, y, t) = A(x, t) + B(x, t)y \quad (28)$$

Используя условия равновесия (20) и вводя обозначения

$$\omega = \frac{3\omega_0}{h}, \quad \nu(t) = \frac{P(t)}{F} \quad (29)$$

для напряжения получим выражение с одной неизвестной функцией от времени $f(t)$

$$\sigma_0(x, y, t) = \nu(t) \left\{ 1 - \frac{\omega}{1 - \mu} \frac{y}{h} \sin \frac{\pi x}{l} f(t) \right\} \quad (30)$$

Для целых m имеем

$$\sigma_0^m(x, y, t) = \nu^m(t) \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k \left(\frac{\omega}{1 - \mu} \right)^k \left(\frac{y}{h} \right)^k f^k(t) \sin^k \frac{\pi x}{l} \quad (31)$$

Подставляя (21) и (30) в уравнение (25), учитывая при интегрировании соотношения (26), (27), (31) и приравнявая нулю общий множитель $\nu^m f(t)$, приходим к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$[\nu_1 - \nu(t)] f(t) = \nu_1 - \nu_0 - \int_{\tau_0}^t [\lambda \nu(\tau) f(\tau) + \beta \nu^m(\tau) \Psi[f(\tau)]] K(t, \tau) d\tau \quad (32)$$

где обозначено

$$\Psi(f) = \frac{6}{\pi} \sum_{k=1, 3, \dots}^m C_m^k \left(\frac{\omega}{1 - \mu} \right)^k \frac{a_k f^k}{k+2} \quad (33)$$

Здесь $a_k = \int_0^{\pi} \sin^{k+1} x dx$. Для стареющих материалов $\varphi(\tau_0) = C_0$, $K(t, \tau) = -\lambda e^{-\lambda(t-\tau)}$, $\tau_0 = 0$, $\lambda = EC_0 \beta \gamma$. Тогда (32) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$[\nu_1 - \nu(t)] \frac{df}{dt} = \gamma [\nu_1 - \nu(t)] + \{\nu'(t) + \lambda \nu(t) - \gamma [\nu_1 - \nu(t)]\} f(t) + \beta \nu^m(t) \Psi[f(t)] \quad (34)$$

с начальным условием $f(\tau_0) = 1$.

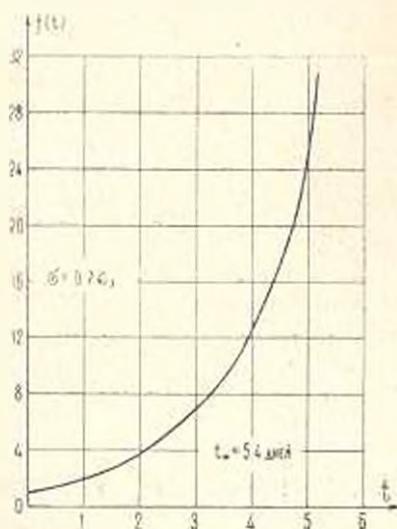
В случае $\nu(t) = \text{const} = \nu_0$ имеем

$$t = \int_0^f \frac{dz}{\gamma + \left(\frac{\lambda \alpha \mu}{1 - \mu} - \gamma \right) z + \frac{\beta \lambda \sigma_0^{m-1} \mu^m}{1 - \mu} W(z)} \quad (35)$$

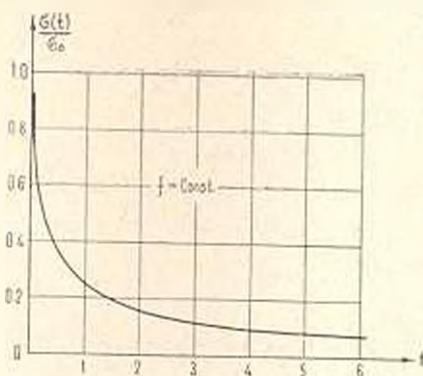
Легко заметить, что при безграничном возрастании f интеграл (35) остается конечным. Тогда критическое время t_* , т. е. срок службы стержня, будет

$$t_* = \int_0^1 \frac{dz}{\gamma + \left(\frac{\lambda \alpha \mu}{1 - \mu} - \gamma \right) z + \frac{\beta \lambda \sigma_0^{m-1} \mu^m}{1 - \mu} W(z)} \quad (36)$$

Можно поставить обратную задачу. Определить закон изменения $z(t)$, при котором прогиб стержня остается постоянным во времени: $w(x, t) = w(x, z_0)$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Принимая в (34) $f(t) = f(z_0) = 1$, получим

$$t = \int_0^{z_0} \frac{dz}{\gamma - (\gamma + \lambda \alpha) z - \beta \lambda W(1) \sigma_0^{m-1} z^m} \quad (37)$$

Для численного примера примем [17] $E = 1.68 \cdot 10^9 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $C_0 = 0.28 \cdot 10^{-5} \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$, $\gamma = 0.03$ 1/день, $\alpha = 0.999$, $\beta = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}^2}{\text{кг}^4}$, $m = 4$, $z_1 = 140 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $z_0 = 0.7 z_1$. На основании расчета, произведенного на вычислительной машине „Наири“, на фиг. 2, 3 построены графики $f(t)$ и $z(t)/\sigma_0$ по формулам (35)–(37).

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 4 V 1967

Մ. Ա. ԶԱԴՅԱՆ

ՈՉ-ԳՆԱՅԻՆ ՈՐՂՔՈՎ ՕՃՏՎԱՅԻՄ ԱՐԿԻՄԵՆԻ ԿԱՌԲ ՎԱՐԻԱՅԻՈՆ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՔ ԵՎ ՊՐԻՉՄԱՏԻՆԻ ՉՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԿՆԻԻՐԸ

Ֆ փ ո փ ո ւ փ

Հիմնվելով է. Լեյանների զաղափարի վրա, ձևակերպում է Մասլով-Արուտյունյանի ոչ-գծային սողքի միջավայրի խառը վարիացիոն հավասարումը, որը թույլ է տալիս միատամանակ փոփոխարկել լարվածային և զեֆուրմացիոն վիճակները: Որպես կիրառաթվում, բննարկված է ոչ-գծային սողքով օժտված պրիզմատիկ ձողի կայունության խնդիրը: Լարումները և զեֆուրմացիաները բնագամված են գծային, իսկ ճկվածքները արվում են սի-նուսի օրենքով՝ ժամանակից կախված անճայտ ամպլիտուդայով:

Խնդիրը թերվում է Վոյտերի ախպի ոչ-գծային ինտեգրալ հավասարման, որի լուծումը արվում է քառակուսման տեսքով:

M. A. ZADOYAN

MIXED VARIATIONAL EQUATIONS OF NON-LINEAR CREEPING BODY AND THE PROBLEM OF STABLE PRISMATIC BARS

S u m m a r y

On the foundation of Reissner's idea the variational equations for the theory of non-linear creep of Masslov-Aroutyounian are obtained.

The problem of stability of prismatic bars of non-linear creep materials is investigated. The strains and deformations are assumed linear, the displacements are given by the law of Sinus.

The problem of non-linear integral equations of Walter type is received.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рейснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости. Проблемы механики сплошной среды (к семидесятилетию акад. Н. И. Мухомелишвили). Изд. АН СССР, М., 1961.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести, М., 1952.
3. Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПИММ, т. 22, 1958.
4. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций. Изд. „Наука“, М., 1966.
5. Sanders J. L., Mc Comb H. G., Schlechte F. R. A variational theorem for creep with applications to plates and columns, NASA, Rep. № 1342, 1957.
6. Задоян М. А. О вариационных уравнениях теории ползучести. Докл. АН Арм. ССР, т. 26, № 5, 1958.
7. Задоян М. А. Об одном вариационном уравнении нелинейной теории ползучести. Докл. АН АрмССР, т. 27, № 5, 1958.

8. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
9. Задоян М. А. Ползучесть призматических составных стержней при стесненном кручении. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машин., № 1, 1959.
10. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
11. Бунятян Л. А. Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 6, № 2, 1951.
12. Ржаницын А. Р. Устойчивость при ползучести. Проблемы устойчивости в строительной механике. Труды Всесоюзн. конференц. по проблемам устойчивости. Изд. лит. по стр.-ву, М., 1965.
13. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в условиях ползучести. Инж. сб., т. 8, 1954.
14. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. ИЛ, 1955.
15. Работнов Ю. Н. и Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластин в условиях ползучести. ПММ, т. 21, вып. 3, 1957.
16. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
17. Карпетян К. С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 12, № 4, 1959.
18. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Инж. ВНИИГ, т. 49, 1953.