ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 2, 1968 Механика

Г. З. МИКАЕЛЯН

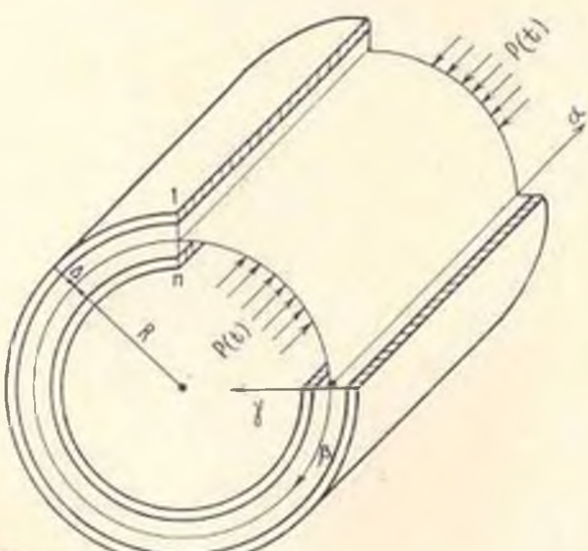
ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

При рассмотрении динамической устойчивости замкнутых цилиндрических оболочек, как правило, невозмущенное состояние оболочки отождествляется с ее недеформированным состоянием.

Ниже рассматривается задача о динамической устойчивости слоистой цилиндрической оболочки, к торцам которой внецентренно по отношению к толщине стенки приложены сжимающие усилия, периодически изменяющиеся во времени. Предполагается, что докритическое напряженное состояние является моментным, осесимметричным. Показано, что эксцентриситет приложения нагрузки резко изменяет границы зоны динамической неустойчивости.

Аналогичная задача о динамической устойчивости стержней рассмотрена В. В. Болотиным [4].

1. Пусть α и β — криволинейные ортогональные координаты, совпадающие с линиями кривизны цилиндрической координатной поверхности радиуса R; γ — расстояние по нормали от точки $(\alpha, \beta, 0)$ до точки (α, β, γ), а Δ — расстояние координатной поверхности от внешней поверхности оболочки (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предполагается, что плоскости упругой симметрии материала каждого слоя перпендикулярны к координатным линиям α, β, γ.

Принимается, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза недеформируемых нормалей.

Отметим также, что при рассмотрении движения оболочки будем использовать аппарат теории пологих оболочек. Силы инерции, соответствующие перемещениям в координатной поверхности, учитывать не будем.

Пусть осевые сжимающие силы с интенсивностью $P(t)$ равномерно распределены по торцевым линиям $\alpha = 0$, $\alpha = l$ координатной поверхности и меняются периодически во времени

$$P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$$

Имеем следующую систему разрешающих дифференциальных уравнений [2]:

$$L(a_j)\varphi + L(a_k)w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} \tag{1.1}$$

$$L(b_j)w - L(a_k)\varphi = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} -$$

$$- 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

Здесь w — нормальное перемещение, φ — функция напряжений,

$$L(a_j) = a_1\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + a_2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_3\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

$$L(b_j) = b_1\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + b_2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + b_3\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

$$L(a_k) = a_4\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + a_5\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_6\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

$$a_1 = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_2 = \frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_3 = \frac{C_{11}}{\Omega}$$

$$a_4 = \frac{1}{\Omega}(K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}), \qquad \Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$$

$$a_5 = \frac{1}{\Omega}(K_{11}C_{22} - 2K_{12}C_{12} + K_{22}C_{11}) - 2\frac{K_{66}}{C_{66}}$$

$$a_6 = \frac{1}{\Omega}(K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12})$$

$$b_1 = D_{11} - \frac{1}{\Omega}(K_{11}^2C_{22} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2C_{11})$$

$$b_2 = 2\left\{D_{12} - \frac{1}{\Omega}\left[K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + \right.\right.$$

$$+ K_{22}K_{12}C_{11}] + 2\left(D_{66} - \frac{K_{66}^2}{C_{66}}\right)\Bigg\}$$

$$b_3 = D_{22} - \frac{1}{\Omega}\left(K_{22}^2 C_{11} - 2K_{22}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{22}\right)$$

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^{n} B_{jk}^i\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right)$$

$$K_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B_{jk}^i\left[\left(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2\right) - 2\Delta\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right)\right]$$

$$D_{jk} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} B_{jk}^i\left[\left(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3\right) - 3\Delta\left(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2\right) + 3\Delta^2\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right)\right]$$

m_0 — масса оболочки, отнесенная к единице площади координатной поверхности оболочки

$$m_0 = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left(\delta_i - \delta_{i-1}\right)$$

где γ_i — удельный вес материала i-го слоя, δ_i — расстояние внутренней поверхности i-го слоя от внешней поверхности оболочки

$$B_{11}^i = \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i\nu_2^i}, \qquad B_{22}^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i\nu_2^i}, \qquad B_{66}^i = G_{12}^i$$

$$B_{12}^i = \nu_1^i B_{22}^i = \nu_2^i B_{11}^i$$

Пусть нагрузка $P(t)$ такова, что вызывает в оболочке осесимметричное напряженное состояние F_0. При определенных соотношениях параметров это состояние может оказаться динамически неустойчивым, то есть наряду с состоянием F_0 становится возможным неосесимметричное напряженное состояние F^*. Обозначая нормальное перемещение и функцию напряжений для состояния F_0 через w_0 и φ_0, а для F^* — через w^*, φ^*, будем иметь

$$\begin{aligned} w^* &= w_0 + w_1 \\ \varphi^* &= \varphi_0 + \varphi_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где w_1 — дополнительное малое перемещение, которое нужно сообщить оболочке, чтобы перевести ее из положения F_0 в положение F^*, а φ_1 — соответствующее приращение функции напряжений.

Подставляя (1.3) в уравнения (1.1), (1.2) и учитывая, что w_0, φ_0 связаны той же системой (1.1), (1.2), получаем „уравнения в вариациях"

$$L(a_i)\,\varphi_1 + L(a_k)\,w_1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}$$

$$L(b_i)\,w_1 - L(a_i)\,\varphi_1 = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\beta^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta^2} - m_0\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \qquad (1.4)$$

Система уравнений (1.4) является линейной и однородной относительно неизвестных функций w_1, φ_1 и имеет однородные граничные условия.

Таким образом, определение критических значений частоты внешней нагрузки сводится к интегрированию системы уравнений (1.4).

2. Рассмотрим докритическое напряженное состояние F_0.

Пусть оболочка по торцевым линиям координатной поверхности шарнирно оперта и совершает осесимметричные вынужденные колебания под действием нагрузки $P(t)$.

Нормальное перемещение оболочки примем в виде

$$w_0 = A_0(t)\sin\frac{\pi\alpha}{l} \qquad (2.1)$$

При этом выполняется геометрическое граничное условие $w_0 = 0$ при $\alpha = 0$, $\alpha = l$.

Подставляя выражение (2.1) в (1.1) и учитывая статические граничные условия

$$T_1 = -P(t), \quad T_2 = -T_c \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \quad \alpha = l$$

для функции напряжений получаем

$$\varphi_0 = \frac{A_0(t)}{a_1}\left(\frac{l^2}{\pi^2 R} - a_1\right)\sin\frac{\pi\alpha}{l} - \frac{P(t)\beta^2}{2} - \frac{T_c\alpha^2}{2} \qquad (2.2)$$

Усилие T_c определяется из условия замкнутости оболочки и имеет вид [5]

$$T_c = \frac{C_{12}}{C_{11}}P(t) = \vartheta P(t)$$

Для нахождения функций w_0 и φ_0 (в зависимости от $P(t)$) используем уравнение Лагранжа. Если $A_0(t)$ рассматривать как обобщенную координату, то уравнение Лагранжа будет иметь вид [4]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}_0(t)}\right) + \frac{\partial U}{\partial A_0(t)} = \frac{\partial W}{\partial A_0(t)} \qquad (2.3)$$

Здесь T — кинетическая энергия оболочки, U — потенциальная энергия оболочки, W — работа внешней нагрузки.

С учетом (2.1), (2.2) для T, U, W получаем следующие выражения [1, 5—7]:

$$T = \frac{1}{2}[\dot{A}_0(t)]^2\, m_0\pi R l$$

$$U=2\pi Rl\{(C_1+C_2\theta^2+C_4\theta)P^2(t)-\left[(2C_2\theta+C_4)\frac{a}{\pi}+\right.$$

$$\left.+(C_6\theta+C_5)\frac{\pi}{l^2}\right]2P(t)A_0(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[C_2a^2+C_3\left(\frac{\pi}{l}\right)^4+C_6a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]A_0^2(t)\}$$

$$W=2\pi Rl\left[(A_{12}\theta+a_3)P^2(t)-2\left(A_{12}\frac{a}{\pi}-d_{11}\frac{\pi}{l^2}\right)P(t)A_0(t)\right]$$

где

$$C_1=\frac{1}{2}(a_3^2C_{11}+2a_3A_{12}C_{12}+A_{12}^2C_{22})$$

$$C_2=\frac{1}{2}(A_{12}^2C_{11}+2A_{12}a_1C_{12}+a_1^2C_{22})$$

$$C_3=\frac{1}{2}(d_{11}^2C_{11}+2C_{12}d_{11}a_4+a_4^2C_{22})-$$

$$-(K_{11}d_{11}+K_{12}a_4)+\frac{1}{2}D_{11}$$

$$C_4=a_3A_{12}C_{11}+a_3a_1C_{12}+A_{12}^2C_{12}+a_1A_{12}C_{22}$$

$$C_5=-(a_3d_{11}C_{11}+a_3a_4C_{12}+A_{12}d_{11}C_{12}+a_4A_{12}C_{22})+K_{11}a_3+K_{12}A_{12}$$

$$C_6=-(A_{12}d_{11}C_{11}+A_{12}a_4C_{12}+a_1d_{11}C_{12}+a_1a_4C_{22})+K_{11}A_{12}+K_{12}a_1$$

$$A_{12}=-\frac{C_{12}}{\Omega}$$

$$d_{11}=\frac{1}{\Omega}(K_{11}C_{22}-K_{12}C_{12})$$

$$a=\left(a_4\frac{\pi^2}{l^2}-\frac{1}{R}\right)\frac{1}{a_1}$$

Подставляя значения T, U, W в (2.2), получим следующее уравнение вынужденных колебаний оболочки:

$$\ddot{A}_0(t)+\Omega_0^2A_0(t)=H_0(P_0+P_t\cos\theta t) \tag{2.4}$$

Здесь

$$\Omega_0=\sqrt{\frac{2}{m_0}\left[C_2a^2+C_3\left(\frac{\pi}{l}\right)^4+C_6a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]}$$

— частота собственных осесимметричных колебаний незагруженной оболочки,

$$H_0=\frac{4}{m_0}\left[(2C_2\theta+C_4-A_{12})\frac{a}{\pi}+(C_6\theta+C_5+d_{11})\frac{\pi}{l^2}\right]$$

Имеем следующие начальные условия:
при $t=0$

$$A_0(t)=\frac{P_0+P_t}{\Omega_0^2}H_0, \qquad \dot{A}_0(t)=0$$

Тогда решение уравнения (2.4) представится в виде

$$A_0(t)=e_0-e_1\cos\Omega_0 t+e_2\cos\theta t \tag{2.5}$$

где $e_0=\dfrac{H_0P_0}{\Omega_0^2}$,

$$e_1=\frac{H_0P_t}{\Omega_0^2}-\frac{H_0P_t}{\Omega_0^2-\theta^2}, \qquad e_2=\frac{H_0P_t}{\Omega_0^2-\theta^2} \qquad (\Omega_0\neq\theta)$$

Решение (2.5) показывает, что оболочка колеблется вокруг некоторого изогнутого положения, имеющего параметр прогиба e_0.

Подставляя (2.5) в (2.1), (2.2), получаем окончательные выражения для искомых функций w_0 и φ_0, характеризующих напряженное состояние F_0.

3. Определим области динамической неустойчивости осесимметричного напряженного состояния оболочки.

Считая, что при потере устойчивости образуется m полуволн вдоль образующей и n полных волн вдоль окружности, примем для w_1 и φ_1 выражения

$$\begin{aligned} w_1&=A_1(t)\sin\frac{m\pi\alpha}{l}\sin\frac{n\beta}{R}\\ \varphi_1&=B_1(t)\sin\frac{m\pi\alpha}{l}\sin\frac{n\beta}{R}\end{aligned} \tag{3.1}$$

которые удовлетворяют следующим граничным условиям на торцах оболочки:

при $\alpha=0,\quad \alpha=l \qquad w_1=T_1^1=T_2^1=0$

Подставляя в (1.4) значение w_0 (2.1), функцию напряжений φ_0 (2.2), а также φ_1, w_1 (3.1) и пользуясь вариационным методом Бубнова-Галеркина, приходим к следующей системе уравнений относительно параметров $A_1(t)$, $B_1(t)$:

$$\left[\Phi(a_i)+A_0(t)(\lambda_0\lambda_2)^2m_1-\frac{\lambda_1^2}{R}\right]A_1(t)+\Phi(a_j)B_1(t)=0$$

$$m_0\ddot{A}_1(t)+\left[\Phi(b_j)-P(t)(\lambda_1^2+\vartheta\lambda_2^2)+A_0(t)a\lambda_2^2m_1\right]A_1(t)+$$

$$+\left[\frac{\lambda_1^2}{R}-\Phi(a_k)-A_0(t)(\lambda_0\lambda_2)^2m_1\right]B_1(t)=0 \tag{3.2}$$

где $\Phi(a_j)$, $\Phi(b_j)$, $\Phi(a_k)$ — квадратичные формы от переменных λ_1^2, λ_2^2 с коэффициентами соответственно

$$a_1, \quad \frac{a_2}{2}, \quad a_3, \quad b_1, \quad \frac{b_2}{2}, \quad b_3, \quad a_4, \quad \frac{a_5}{2}, \quad a_6$$

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_1 = \frac{m\pi}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{n}{R}, \quad m_1 = \frac{8m^2}{\pi(4m^2 - 1)}$$

Решая совместно уравнения (3.2), для определения $A_1(t)$ получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{A}_1(t) + \Omega_1^2[1 - 2(\mu_1 \cos \theta t - \mu_2 \cos \Omega_0 t)]A_1(t) = 0 \tag{3.3}$$

где

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{m_0}\Bigg\{\Phi(b_j) - P_0(\lambda_1^2 + \vartheta\lambda_2^2) + e_0 a\lambda_2^2 m_1 +$$

$$+\frac{1}{\Phi(a_j)}\left[\left(\Phi(a_k) - \frac{\lambda_1^2}{R}\right)^2 + 2e_0(\lambda_0\lambda_2)^2 m_1\left(\Phi(a_k) - \frac{\lambda_1^2}{R}\right)\right]\Bigg\}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2m_0\Omega_1^2}[P_t(\lambda_1^2 + \vartheta\lambda_2^2) - e_0 m_1\lambda_2^2 Q]$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2m_0\Omega_1^2}e_0\lambda_2^2 m_1 Q \tag{3.4}$$

$$Q = a - \frac{2\lambda_0^2}{\Phi(a_j)}\left(\Phi(a_k) - \frac{\lambda_1^2}{R}\right)$$

Как видно из (3.3), исследование динамической устойчивости оболочки значительно осложняется из-за того, что исходным состоянием оболочки считается осесимметричная форма колебаний.

Задача сравнительно упрощается, если считать, что частоты нагрузки (θ) и собственных осесимметричных колебаний оболочки (Ω_0) выражаются рациональными числами. Тогда функция

$$\Phi(t) = \mu_1 \cos \theta t + \mu_2 \cos \Omega_0 t$$

будет периодической с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\theta} d = \frac{2\pi}{\Omega_0} f$$

где d и f — взаимно простые натуральные числа. Представляя $\Phi(t)$ в виде ряда Фурье

$$\Phi(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \cos \frac{2\pi k}{T} t$$

известным образом [4] можно получить уравнения критических частот.

Если поступать так, как принято в классической теории, т. е. невозмущенное состояние оболочки (осесимметричное движение) считать „квазистатическим", то относительно $A_1(t)$ получится уравнение Матье. Полагая в (3.3) $\mu_2 = 0$, для этого случая будем иметь

$$\ddot{A}_1(t) + \Omega_1^2(1 - 2\mu_1 \cos\theta t)A_1(t) = 0 \tag{3.5}$$

Заметим, что в выражении μ_1

$$e_1 = \frac{H_1 P_1}{\Omega_0^2}$$

Области неустойчивости решений уравнения (3.5) хорошо изучены. Известно [4], что границы главной области динамической неустойчивости определяются формулой

$$\theta_* = 2\Omega_1(1 \mp \mu_1)^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

Согласно (3.6), увеличение частоты неосесимметричных колебаний оболочки Ω_1 приводит к увеличению критических частот θ_*. При увеличении коэффициента возбуждения μ_1 величина главной области неустойчивости возрастает.

4. Для исследования влияния докритического напряженного состояния F_0 на величину критических частот и областей динамической неустойчивости рассмотрим также динамическую устойчивость безмоментного начального состояния оболочки.

Не вдаваясь в подробности, приводим лишь окончательный результат

$$\theta_{\text{б}} = 2\Omega_{\text{б}}(1 + \mu_{\text{б}})^{\frac{1}{2}}$$

Здесь

$$\Omega_{\text{б}} = \sqrt{\frac{1}{m_0}\left[\Phi(b_j) - P_0\lambda_1^2 - \frac{1}{\Phi(a_j)}\left(\Phi(a_k) - \frac{\lambda_1^2}{R}\right)^2\right]} \tag{4.1}$$

$$\mu_{\text{б}} = \frac{P_t \lambda_1^2}{2m_0 \Omega_{\text{б}}^2}$$

Используя выражения (3.4), (3.5) и (4.1), для отклонения частоты неосесимметричных колебаний Ω_1 от соответствующего „безмоментного" значения $\Omega_{\text{б}}$ и отношения $\dfrac{\mu_1}{\mu_{\text{б}}}$ получаем

$$R_1 = \frac{\Omega_1 - \Omega_{\text{б}}}{\Omega_{\text{б}}} = \sqrt{1 + \frac{\Omega_2}{\Omega_{\text{б}}^2}} - 1 \tag{4.2}$$

$$R_2 = \frac{\mu_1}{\mu_{\text{б}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Omega_2}{\Omega_{\text{б}}^2}}\left[1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 k\right] \tag{4.3}$$

где

$$\Omega_2 = \Omega_1^2 - \Omega_{\text{б}}^2 = \frac{P_0\lambda_2^2}{m_0} k$$

$$k = -\vartheta + m_1 e Q \tag{4.4}$$

$e = \dfrac{H_0}{\Omega_0^2}$ — нормальное перемещение точек $x = \dfrac{l}{2}$ координатной поверхности под действием постоянной составляющей нагрузки $P(t)$, равной единице.

Анализ выражений (4.2)—(4.4) показывает, что при увеличении Δ отклонение частоты неосесимметричных колебаний Ω_1 от соответствующей частоты Ω_0 (найденной в предположении о безмоментности начального напряженного состояния оболочки) возрастает. С увеличением постоянной составляющей нагрузки (P_0) и числа волн в окружном направлении (n), частота Ω_1 все более отличается от „безмоментного" значения Ω_0. Неучет динамических явлений состояния Γ_0 не влияет на величину частоты Ω_1, но приводит к изменению величины главной области неустойчивости. В этом случае, с увеличением Δ и отношения длины полуволн в осевом направлении к длине полуволн в окружном направлении, величина главной области неустойчивости уменьшается.

Интересно отметить, что в принятой системе координат, при $0 < \Delta < h$, докритическое нормальное перемещение оболочки (не весьма короткой) под действием сжимающей нагрузки P_0 имеет отрицательное значение. Поэтому, при перемещении места приложения нагрузки от точек внешней поверхности к точкам внутренней поверхности оболочки происходит монотонное изменение параметров неустойчивости.

5. *Для иллюстрации приводим численные примеры.*

В частном случае слоистой изотропной оболочки, с одинаковым коэффициентом Пуассона слоев, имеем

$$R_1 = \left(1 + \frac{\omega k p r^2}{1 + \omega(\omega - p)}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$R_2 = (1 - r^2 k)(1 + R_1)^{-2}$$

где

$$\omega = \frac{\pi^2 m^2 (1 + r^2)^2 \sqrt{a_1 b_1}}{h} \frac{h}{R} \left(\frac{l}{R}\right)^{-2}$$

$$k = \frac{32}{\pi^2 (1 + r^2)^2} \frac{m^2 (1 + r^2)^2 + 2}{4m^2 - 1} \left(\nu - \frac{K\pi^2}{Ch} \frac{h}{R} \left(\frac{l}{R}\right)^{-2}\right) - \nu$$

$$p = P_0 R \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} < 2, \qquad r = \frac{h_2}{h_1}$$

Для однослойной изотропной оболочки получим

$$\omega = \frac{\pi^2 m^2 (1 + r^2)^2}{2\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{h}{R} \left(\frac{l}{R}\right)^{-2}$$

$$p = \frac{2P_0 R}{Eh^2} \sqrt{3(1 - \nu^2)} < 2$$

Если

$$\frac{l}{R}=\frac{\pi}{4},\quad \frac{h}{R}=\frac{1}{50},\quad m=r=1$$

$$p=\sqrt{3(1-\nu^2)},\quad \nu=0.25$$

то при $\Delta=0\quad R_1=-0.07,\quad R_2=1.465$

при $\Delta=\dfrac{h}{2}\quad R_1=0.08,\quad R_2=0.5875$

при $\Delta=h\quad R_1=0.235,\quad R_2=0.266$

Рассмотрим случай центрального сжатия двухслойной оболочки, составленной из изотропных материалов с равными коэффициентами Пуассона.

Пусть наружный слой изготовлен из стали $E_c=2\cdot10^6$ *кг/см²*, а внутренний — из капрона $E_k=10^4$ *кг/см²*.

Примем

$$\frac{l}{R}=\frac{\pi}{4},\quad \frac{h}{R}=\frac{1}{50},\quad m=1,\quad r=1.5$$

$$p=\sqrt{3(1-\nu^2)},\quad \nu=0.25,\quad h_c=h_k=\frac{h}{2}$$

Тогда при $\Delta=\dfrac{h}{2}\qquad R_1=0.35,\quad R_2=0.334$

При обратном расположении слоев получается

$$R_1=-0.08,\quad R_2=1.26$$

Результаты вычислений показывают, что в рассматриваемых случаях эксцентриситет приложения нагрузки существенно влияет на величину критических частот и резко изменяет границы зоны динамической неустойчивости.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 24 XI 1966

Հ. Զ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԵՎ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված է թաղանթի ժամանակային պարբերական միակի փոփոխել կայունության խնդիրը։

Աշխատանքի հիմքում դրված է փոքր կորության ունեցող բազմաշերտ անիզոտրոպ թաղանթների տեսությունը [1]։

Խնդրի անկայունության տիրույթների որոշմանը բերվում է Մատյեի հավասարման լուծմանը։

Հետազոտված է թաղանթի վրա առանցքային բեռնվածության կիրառման տեղի, ինչպես նաև շերտայնության բնույթի ազդեցությունը կրիտիկական հաճախականության և անկայունության գլխավոր տիրույթի վրա

G. Z. MIKAELIAN

DYNAMIC STABILITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL

S u m m a r y

The problem of dynamic stability of a momental stress state of a multilayer orthotropic cylindrical shell on the basis of the theory of multilayer anisotropic shells is considered.

The investigation reduces the determination of the regions of nonstability of the solution of Matie equation.

The influence of the location of the axial load application on the shell and also the influence of the nature of the multilayer on critical frequency and the main region of nonstability are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Гнуни В. Ц.* О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Казань, 1961.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.-М., 1948.
4. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
6. *Огибалов П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М., 1963.
7. *Микаелян Г. З.* Устойчивость многослойной ортотропной круговой цилиндрической оболочки. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 19, № 5, 1966.