

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА С ОДНОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ГРАНЬЮ

Рассматриваются две плоские контактные задачи для упругого клина ($-\alpha \leq \theta < \alpha$, $0 \leq r < \infty$), грань которого $\theta = \alpha$ жестко закреплена. Развивается мысль, изложенная в качестве замечания в конце работы [1]. Попутно исправляется замеченная в [1] неточность. Решения обеих задач получены в виде простых асимптотических формул, охватывающих все практически интересные случаи.

§ 1. *Постановка задач.* Первая задача — задача о вдавливании силой Q абсолютно жесткого штампа с произвольным основанием и поверхность $\theta = \alpha$ упругого клина. Силы трения между штампом и поверхностью клина предполагаем отсутствующими. Вне штампа грань клина $\theta = \alpha$ не нагружена.

Вторая задача — задача о взаимодействии нерастяжимой, но абсолютно гибкой пластинки* с поверхностью $\theta = \alpha$ упругого клина. Между пластинкой и поверхностью клина осуществляется жесткое сцепление. Пластинка нагружена касательной силой Q . Вне пластинки на грани клина $\theta = \alpha$ напряжения отсутствуют.

В соответствии со сказанным граничные условия задач можно представить в виде:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (0 < r < \infty) \\ & \sigma_r(r, \alpha) = 0 \quad \text{при } 0 < r < a \text{ и } b < r < \infty \\ & u_\theta(r, \alpha) = \dot{\epsilon}(r) \quad \text{при } a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\dot{\epsilon}(r)$ — осадка точек поверхности $\theta = \alpha$ упругого клина в области контакта $a \leq r \leq b$. Полагается, что напряжения при $r \rightarrow \infty$ исчезают;

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sigma_\theta(r, \alpha) = 0, \quad (0 < r < \infty) \\ & \tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0 \quad \text{при } 0 < r < a \text{ и } b < r < \infty \\ & u_r(r, \alpha) = \dot{\epsilon} \quad \text{при } a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\dot{\epsilon}$ — смещение пластинки под действием касательной силы Q . Полагается, что напряжения при $r \rightarrow \infty$ исчезают.

Применяя к уравнениям Ламе, записанным в полярной системе координат, и граничным условиям (1.1), (1.2) рассматриваемых задач интегральное преобразование Меллина по переменной r , сведем обе задачи к решению следующего интегрального уравнения:

* Пластинка типа мембраны.

$$\int_a^b q(\varphi) K(\ln \varphi/r) d\varphi = \pi \Delta_0(r) \quad (a < r < b) \quad (1.3)$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u, z)}{u} \cos ut du \quad \left(\Delta = \frac{G}{1-\mu} \right)$$

G и μ — упругие постоянные клина. Здесь для первой задачи $q(\varphi)$ — функция распределения контактных давлений под штампом,

$$L(u, z) = \frac{2x \operatorname{sh} 4uz - 2u \sin 4x}{2x \operatorname{ch} 4uz + 2u^2 + x^2 + 1 - 2u^2 \cos 4x} \quad (x = 3 - 4\mu) \quad (1.4)$$

для второй задачи $q(\varphi)$ — функция распределения контактных касательных напряжений под пластинкой, $\bar{\sigma}(r) = \bar{\sigma}$,

$$L(u, z) = \frac{2x \operatorname{sh} 4uz - 2u \sin 4x}{2x \operatorname{ch} 4uz + 2u^2 + x^2 + 1 - 2u^2 \cos 4x} \quad (1.5)$$

Если, как показано в работе [1], функцию $L(u, z)$ аппроксимировать выражением $\operatorname{th}[A(x)u]$, где соответственно для рассматриваемых задач

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(4x - \sin 4x)(x + 1)^{-2} \\ A(x) &= 2(4x + \sin 4x)(x + 1)^{-2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

то решения обеих задач могут быть представлены в замкнутом виде, причем относительная погрешность этого решения не будет превосходить погрешности указанной аппроксимации. Для нажного частного случая $\bar{\sigma}(r) = \bar{\sigma} = \text{const}$ замкнутое решение дается формулами (3.10), (3.11) и (3.13) работы [1], причем (3.13) имеет смысл только для первой задачи.

Здесь следует заметить, что в работе [1] формулы (1.5) и вторая (1.6) приписаны по недосмотру первой задаче, вместо второй. Поэтому табл. 1 и 2, в которых указаны максимальные относительные ошибки аппроксимации функции $L(u, z)$ гиперболическим тангенсом и значения постоянной $A(x)$ для различных углов x следует использовать для второй рассматриваемой задачи. Для первой задачи значения ошибки δ и $A(x)$ при $x = 1.8$ даны в приводимой здесь табл. 1.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай малых углов x . Легко видеть, что при малых x

$$L(u, z) = L^*(2ux) + O(x^3) \quad (1.7)$$

$$L^*(\xi) = \frac{2x \operatorname{sh} 2\xi \mp 4\xi}{2x \operatorname{ch} 2\xi + x^2 + 1 + 4\xi^2}$$

где знак „—“ в числителе — для первой задачи, а знак „+“ — для второй. Следовательно, имеет смысл при малых x заменить функцию

$L(u, z)$ выражением $L^*(2uz)$. Погрешность такой аппроксимации при $\mu = 1.8$, всех $u \in [0, \infty)$ и $0 < z < 7.5$ не превосходит для обеих задач $5 \cdot 10^{-4}$.

Таблица 1

z^0	$A(z)$	$\bar{K}^0_{10}$	z^0	$A(z)$	$\bar{K}^0_{10}$	z^0	$A(z)$	$\bar{K}^0_{10}$
7.5	0.1129	9	67.5	2.4189	1	127.5	3.9597	1
15	0.2599	4	75	2.6252	1	135	4.3277	1
22.5	0.4662	7	82.5	2.7723	1	142.5	4.6956	1
30	0.7408	10	90	2.8851	1	150	5.0295	1
37.5	1.0746	10	97.5	2.9980	2	157.5	5.3041	1
45	1.4425	8	105	3.1451	2	165	5.5103	1
52.5	1.8106	6	112.5	3.3513	1	172.5	5.6574	1
60	2.1444	3	120	3.6260	1			

С учетом указанной аппроксимации представим ядро $K(t)$ интегрального уравнения (1.3) в виде

$$K(t) = K^*(z) = \int_0^1 \frac{L^*(\beta)}{\beta} \cos^2 z \, d\beta^2 \quad \left(z = \frac{t}{2\alpha} \right) \quad (1.8)$$

Если теперь ввести новые переменные и обозначения по формулам

$$z = \frac{\mu}{2\alpha} \ln \frac{\beta}{\alpha} - 1, \quad s = \frac{\mu}{2\alpha} \ln \frac{r}{\alpha} - 1, \quad \mu = 4\alpha \left(\ln \frac{b}{\alpha} \right)^{-1} \quad (1.9)$$

$$\varphi(z) = z^*(z), \quad (2z)^{-1} \Delta \mu \varphi(r) = f^*(s)$$

то интегральное уравнение (1.3) с ядром (1.8) можно представить в форме

$$\int_{-1}^1 z^*(z) K^* \left(\frac{z-s}{\mu} \right) dz = \pi f^*(s) \quad (|s| < 1) \quad (1.10)$$

Легко убедиться (см., например, [2]), что в случае первой рассматриваемой задачи уравнение (1.10) совпадает с интегральным уравнением контактной задачи для упругой полосы с жестко защемленной нижней гранью. Поэтому в случае малых α могут быть полностью использованы все многочисленные результаты, полученные к настоящему времени при больших μ [2] и малых μ [3, 4] для задачи о сдавливании штампа в полосу.

Для второй рассматриваемой задачи уравнение (1.10), как можно показать, также совпадает с интегральным уравнением соответствующей контактной задачи для упругой полосы и здесь могут быть использованы асимптотические при больших и малых μ формулы, данные в работах [2-4].

Приведем необходимые значения постоянных a_i ($i = 0, 1, 2$), входящих в формулы (2.9), (2.10) [2] и B, C , входящих в аппроксимацию (1.3) [4],

$$1) \quad a_0 = -0.527, \quad a_1 = 0.716, \quad a_2 = -0.245, \quad B = 0.7, \quad C = 1.715$$

$$2) \quad a_0 = 0.420, \quad a_1 = 0.331, \quad a_2 = -0.127, \quad B = 0.7, \quad C = 0.49$$

Все постоянные подсчитаны при $\kappa = 1.8$. Погрешность аппроксимации (1.3) [4] при указанных значениях B и C не превосходит 8% для задачи 1) и 7% для задачи 2).

§ 2. Асимптотические решения рассматриваемых задач. Произведем в интегральном уравнении (1.3) замену переменных и введем обозначения по формулам (1.3) работы [1], аналогичным вышеприведенным (1.9).

Будем иметь

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \quad |x| \leq 1 \quad \left(\lambda = 2\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{-1}\right) \quad (2.1)$$

Безразмерный параметр $\lambda \in (0, \infty)$ характеризует, очевидно, относительное положение штампа или пластинки на грани клина.

Изучим сначала случай больших λ (штамп или пластинка находится относительно далеко от вершины клина). Для этого представим ядро $K(t)$ интегрального уравнения (2.1), определяемое второй формулой (1.3), в виде

$$K(t) = -\ln|t| + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) t^{2i} \quad (2.2)$$

$$a_0 = \int_0^{\pi} \frac{1 - L(u, z) - \cos u}{u} du, \quad a_i = \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int_0^{\pi} [1 - L(u, z)] u^{2i-1} du \quad (i \geq 1)$$

При $\kappa = 1.8$ численным интегрированием для обеих рассматриваемых задач найдено

$$\alpha = 45^\circ \quad a_0 = 0.522 \quad a_1 = 0.1442 \quad a_2 = -0.01631$$

$$\alpha = 90^\circ \quad a_0 = 1.315 \quad a_1 = 0.0230 \quad a_2 = 0.000349$$

$$\alpha = 135^\circ \quad a_0 = 1.708 \quad a_1 = 0.01081 \quad a_2 = 0.0000837$$

Используя асимптотику функций $L(u, z)$ вида (1.4) и (1.5) при больших значениях u

$$L(u, z) \sim 1 + O(e^{-\ln u}) \quad (2.3)$$

можно показать, что ряд в (2.2) абсолютно сходится при $|t| < 4\lambda$.

Отсюда следует, что все результаты, основанные на (2.2), будут, по крайней мере, иметь смысл при $\lambda > (2\lambda)^{-1}$.

Асимптотическое при больших λ решение интегрального уравнения вида (2.1) с ядром типа (2.2) получено в работе [2] и дается соотношениями (2.9), (2.10) с точностью до λ^{-6} . Возвращаясь в этих формулах к старым переменным и обозначениям в соответствии с формулами (1.3) [1], получим приближенное решение рассматриваемых контактных задач для клина при больших λ и виде

$$\begin{aligned}
 q(r) = & \frac{Q}{\pi r \sqrt{\ln b/r \ln r/a}} \left[1 + 2a_1 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + \right. \\
 & \left. + 4a_2 \left(\frac{7}{8\lambda^4} - \frac{1}{\lambda^2} \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} - \ln^4 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + O(\lambda^{-6}) \right] - \\
 & - \frac{\lambda \Delta}{\pi r \sqrt{\ln b/r \ln r/a}} \int_a^b \sqrt{\ln b/\rho \ln \rho/a} \, \varphi(\rho) \left\{ \frac{1}{\lambda \ln \rho/r} - \frac{2a_1}{\lambda} \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} - \right. \\
 & - \frac{2a_2}{\lambda} \left[6 \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} - 6 \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} \ln \frac{\rho}{\sqrt{ab}} + 2 \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} \ln^2 \frac{\rho}{\sqrt{ab}} - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} + \frac{3}{\lambda^2} \ln \frac{\rho}{\sqrt{ab}} \right] - \frac{2a_1^2}{\lambda^4} \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} + O(\lambda^{-6}) \right\} d\rho \\
 & \lambda Q = \left[\ln 2\lambda - a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{a_1^2}{4\lambda^4} + \frac{9a_2}{4\lambda^4} + O(\lambda^{-6}) \right]^{-1} \times \\
 & \times \left[\lambda \Delta \int_a^b \frac{\varphi(\rho) d\rho}{\rho \sqrt{\ln b/\rho \ln \rho/a}} - \lambda \Delta \int_a^b \sqrt{\ln b/\rho \ln \rho/a} \, \varphi(\rho) \ln \frac{\rho}{\sqrt{ab}} \times \right. \\
 & \left. \times \left(a_1 + a_2 \ln^2 \frac{\rho}{\sqrt{ab}} + \frac{7a_2}{2\lambda^2} \right) d\rho + O(\lambda^{-6}) \right]
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для важного частного случая $\varphi(r) \equiv 1$ формулы (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned}
 q(r) = & \frac{Q}{\pi r \sqrt{\ln b/r \ln r/a}} \left[1 + 2a_1 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + \right. \\
 & \left. + 4a_2 \left(\frac{7}{8\lambda^4} - \frac{1}{\lambda^2} \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} - \ln^4 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + O(\lambda^{-6}) \right] \\
 Q = & \pi \lambda \Delta \left[\ln 2\lambda - a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{a_1^2}{4\lambda^4} + \frac{9a_2}{4\lambda^4} + O(\lambda^{-6}) \right]^{-1}
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

для первой рассматриваемой задачи определим еще из условия (3.12) [1] расстояние H от вершины клина, на котором нужно приложить силу Q , чтобы обеспечить поступательное перемещение штампа

$$H = \sqrt{ab} \left| 1 + \frac{1}{4i} - \frac{1}{64i^2} - \frac{a_1}{8i^3} - O(i^{-6}) \right| \quad (2.6)$$

Перейдем, наконец, к рассмотрению случая малых i (штамп или пластинка находится относительно близко к вершине клина).

Аппроксимируем функцию $\zeta(r)$ на отрезке $a \leq r \leq b$ выражением

$$\zeta(r) = \sum_{n=1}^N A_n r^{v_n} \quad (2.7)$$

где все v_n различны. Увеличивая номер N , можно достигнуть любой точности этой аппроксимации, если при $N \rightarrow \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N v_n^{-1} = \infty$ [5].

Учитывая сказанное и линейность рассматриваемых задач, ограничимся далее изучением случая

$$\zeta(r) = r^i, \quad f(x) = \Delta i (ab)^{i-1} e^{-ix} \quad (2.8)$$

Согласно изложенному в работе [4], нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения (2.1) с правой частью (2.8) при малых i может быть представлен в форме (1.12) [4]. Возвращаясь к старым переменным и обозначениям согласно формулам (1.3) [1], сформулируем этот результат для интегрального уравнения (1.3) с правой частью (2.8) следующим образом: нулевой член асимптотики решения уравнения (1.3) при малых i имеет вид

$$q(r) = q_1(r) q_2(r) v^{-1}(r) \quad (a \leq r \leq b) \quad (2.9)$$

где функции $q_1(r)$, $q_2(r)$ и $v(r)$ являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^b q_1(\rho) K(\ln \rho/r) d\rho &= \pi \Delta r^i \quad (0 \leq r \leq b) \\ \int_a^\infty q_2(\rho) K(\ln \rho/r) d\rho &= \pi \Delta r^i \quad (a \leq r < \infty) \\ \int_0^\infty v(\rho) K(\ln \rho/r) d\rho &= \pi \Delta r^i \quad (0 \leq r < \infty) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь отметим, что анализ приближенного решения (3.10) [1] для случая $\zeta(r) = r^i$ при малых i подтверждает правильность структуры нулевого члена асимптотики (2.9).

Решения первых двух интегральных уравнений (2.10) могут быть найдены методом Винера-Хопфа [6]. Для получения практически приемлемых результатов аппроксимируем функции $L(u, z)$ вида (1.4) и (1.5) выражением

$$L(u, z) = u \frac{\sqrt{u^2 + B^2(z)}}{u^2 + C^2(z)}, \quad \left(C(z) = \sqrt{\frac{B(z)}{A(z)}} \right) \quad (2.11)$$

где $A(z)$ имеет вид (1.6), а постоянная $B(z)$ подбирается из условия наилучшего приближения аппроксимирующей функции (2.11) к заданным значениям $L(u, z)$ при всех $u \in [0, \infty)$. В аппроксимации (2.11) учтены свойства функций $L(u, z)$, определяемые соотношениями (2.3) и

$$L(u, z) \sim uA(z) + O(u^3) \quad \text{при } u \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

Если для некоторых значений угла z точность аппроксимации (2.11) окажется недостаточной, то могут быть использованы более сложные аппроксимации (1.4), (1.5) работы [4].

При $\nu = 1.8$ и всех $u \in [0, \infty)$ для углов $z = 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ погрешность аппроксимации (2.11) не превосходит 3% , если постоянная $B(z)$ соответственно равна

$$B = 1.035, \quad B = 0.814, \quad B = 0.522$$

Не останавливаясь на подробностях применения метода Винера-Хопфа, приведем полученные решения первых двух интегральных уравнений (2.10) при аппроксимации (2.11)

$$q_1(r) = \frac{\Delta b^+ (C + \nu)}{r \sqrt{B + \nu}} \left\{ \frac{(C - \nu)}{B - \nu} \left(\frac{r}{b} \right)^{\nu} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{(B - \nu) \ln b \cdot r}{a}} + \right. \\ \left. + (\pi \ln b \cdot r)^{-1/2} \left(\frac{r}{b} \right)^B \right\} \quad (2.13)$$

$$q_2(r) = \frac{\Delta a^+ (C - \nu)}{r \sqrt{B - \nu}} \left\{ \frac{(C + \nu)}{B + \nu} \left(\frac{a}{r} \right)^{\nu} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{(B + \nu) \ln r \cdot a}{b}} + \right. \\ \left. + (\pi \ln r \cdot a)^{-1/2} \left(\frac{a}{r} \right)^B \right\}$$

Решение третьего интегрального уравнения (2.10) находится без труда применением теоремы о свертках для преобразования Меллина. При аппроксимации (2.11) это решение имеет вид

$$v(r) = \frac{\Delta (C^2 - \nu^2)}{\sqrt{B^2 - \nu^2}} r^{-1/2} \quad (2.14)$$

Заметим, что формулы (2.13) и (2.14) получены в предположении $-B < \nu < B$. Однако, их можно формально распространить и на случаи $\nu > B$ и $\nu < -B$, учитывая, что

$$\operatorname{erf} ix = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} F(x), \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.15)$$

(таблица функции $F(x)$ имеется в [7]). Появляющаяся при этом минимость в некоторых из формул (2.13) и (2.14) сокращается при составлении нулевого члена асимптотики решения при малых λ по формуле (2.9).

Для важного частного случая $\delta(r) = \delta$ приближенное решение в форме (2.9) имеет вид

$$q(r) = \frac{\Delta\delta}{Ar} g(\ln b/r) g(\ln r/a), \quad g(x) = \operatorname{erf} \left(\sqrt{Bx} \right) + \sqrt{\frac{A}{\pi x}} e^{-Bx} \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в формулы (3.9) и (3.12) [1] и интегрируя, найдем выражения для силы Q , а также расстояния H в случае первой рассматриваемой задачи

$$Q = \Delta\delta \left| \frac{2}{A\delta} + D(2-D) - (1-D)^2 \exp\left(-\frac{2B}{\lambda}\right) \right| \quad \left(D = \frac{1}{AC} \right)$$

$$H = 2\Delta\delta a \left[\frac{d}{ds} A_3\left(\frac{s}{2}\right) + e^s C(C+1) A_7\left(\frac{s}{2}\right) - C(C-1) A_3\left(\frac{s}{2}\right) \right] \quad (2.17)$$

$$A_n(x) = \int_0^x e^{s\tau} I_0(\tau) d\tau, \quad s = \frac{2}{\lambda}, \quad \beta = -2B + 1, \quad \gamma = -2B - 1$$

При вычислении интегралов здесь использован прием § 3 работы [4] и методы контурного интегрирования.

В табл. 2 для сравнения даны некоторые результаты расчетов по формулам (3.10), (3.11), (3.13) [1] (строки I), формулам (2.5), (2.6) (строки II) и формулам (2.16), (2.17) (строки III). Выбраны такие значения угла α , при которых результаты для обеих рассматриваемых задач совпадают. В 1-х, 2-х, 3-х, 4-х и 5-х колонках табл. 2 даны соответственно значения величин

$$q \frac{(1/\alpha b) a}{\Delta\delta}, \quad \frac{a}{\Delta\delta} \lim_{r \rightarrow a} q(r) \sqrt{\ln r/a}, \quad \frac{a}{\Delta\delta} \lim_{r \rightarrow b} q(r) \sqrt{\ln b/r}, \quad \frac{Q}{\Delta\delta}, \quad \frac{H}{1/\alpha b}$$

На основании числового материала, приведенного в табл. 2, и аналогичных расчетов, произведенных для ряда других углов α , можно заключить, что при $\alpha = 1.8$ и использовании аппроксимации (2.11) происходит надежное смыкание асимптотических решений (2.5), (2.6) и (2.16), (2.17) для всех $7.5^\circ \leq \alpha \leq 172.5^\circ$. Смыкание наблюдается при $\lambda = \alpha^{-1}$.

Таким образом, для случая $\delta(r) = \text{const}$ асимптотические решения для больших и малых λ в комплексе позволяют полностью и эффективно исследовать рассматриваемые задачи. Окончательные формулы достаточно просты и могут быть использованы при инженерных расчетах.

№ п.п.	1	2	3	4	5	1	2	3	
$\alpha = 45^\circ$	λ	8 -				4 -			
	I	0.775	0.494	0.225	1.396	1.038	0.383	0.474	$0.984 \cdot 10^{-1}$
	II	0.809	0.509	0.232	1.447	1.038	0.405	0.490	0.102
	III						0.408	0.486	0.101
$\alpha = 90^\circ$	λ	4 -				2 -			
	I	0.262	0.349	$0.726 \cdot 10^{-1}$	1.396	1.159	$0.872 \cdot 10^{-1}$	0.335	$0.145 \cdot 10^{-1}$
	II	0.260	0.348	$0.723 \cdot 10^{-1}$	1.388	1.150	$0.882 \cdot 10^{-1}$	0.334	$0.144 \cdot 10^{-1}$
	III						$0.877 \cdot 10^{-1}$	0.338	$0.146 \cdot 10^{-1}$
$\alpha = 135^\circ$	λ	8 3-				4 3-			
	I	0.118	0.285	$0.270 \cdot 10^{-1}$	1.396	1.376	$0.265 \cdot 10^{-1}$	0.273	$0.246 \cdot 10^{-2}$
	II	0.118	0.286	$0.271 \cdot 10^{-1}$	1.397	1.374	$0.265 \cdot 10^{-1}$	0.274	$0.247 \cdot 10^{-2}$
	III						$0.268 \cdot 10^{-1}$	0.276	$0.248 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

4	5	1	2	3	4	5
		$2/\pi$				
1.966	1.155	0.145	0.471	$0.203 \cdot 10^{-1}$	3.060	1.650
2.053	1.153					
2.062	1.154	0.154	0.472	$0.204 \cdot 10^{-1}$	3.146	1.656
		$1/\pi$				
1.966	1.700	$0.155 \cdot 10^{-1}$	0.332	$0.621 \cdot 10^{-11}$	3.060	5.115
1.968	1.694					
1.959	1.700	$0.155 \cdot 10^{-1}$	0.332	$0.621 \cdot 10^{-11}$	3.058	5.081
		$2/3\pi$				
1.966	2.896	$0.214 \cdot 10^{-2}$	0.271	$0.219 \cdot 10^{-1}$	3.060	19.14
1.967	2.828					
1.967	2.894	$0.216 \cdot 10^{-2}$	0.272	$0.219 \cdot 10^{-1}$	3.067	19.09

В случае первой задачи для ряда неплоских штампов (наклонный штамп, параболический штамп) численным анализом также установлено смыкание асимптотических решений при больших и малых ϵ . В тех же случаях, когда смыкания не удается достигнуть с достаточной для практики степенью точности, приближенные решения интегрального уравнения (1.3) или (2.1) могут быть получены в области отсутствия смыкания методом сведения его к системе линейных алгебраических уравнений [8, 9]. Возможность такого подхода показана, кстати, в недавно вышедшей работе [10].

Ростовский государственный
университет

Поступила 3 VII 1967

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ

ՄԵԿ ԵՒՍՏՈՎ ԿՈՇՏ ԱՄՐԱՅԵՂԱԾ ԱՌԱՋԴԱՊԼԱ ՍԵՊԻ
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՈՒՐԴՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Առաջագան ևսյի համար երկու հարթ կոնտակտային խնդիրները հանգեցված են (1.3) ինտեգրալ հավասարման հետազոտմանը: Մտնված են ոչնչ հավասարման ասիմպտոտիկ լուծումները չափողականությու՝ն չտնեցող պարամետրի մեծ և փոքր արժեքների դեպքում $\epsilon = 2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1}$:

Յուրջ է տրված, որ պրակտիկորեն հետաքրքիր բոլոր դեպքերի համար, ռոտացված պարզ ասիմպտոտիկ բանաձևերով տրվում են դիտարկվող խնդիրների լուծումները:

Սխառմամանակ ուղղված է [7] նկատված անճշտությունը:

V. M. ALEXANDROV

ON CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC WEDGE WITH ONE FIXED SIDE

S u m m a r y

Two plane contact problems for an elastic wedge are reduced to exploring the integral equation (1.3). Asymptotic solutions are found for this equation under big and little rates of undimensional parameter $\epsilon = 2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1}$. It is shown that for all obtained practical interesting cases, simple asymptotic formulas give full solutions of examined problems. By the way, the noticed inaccuracy is corrected in [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР, механика, т. 20, № 1, 1967.
2. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 5, 1962.
3. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. 27, вып. 5, 1963.
4. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, механика, № 2, 1965.
5. Леккер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Изд. «Наука», 1965.
6. Нобл Б. Метод Випера-Ховфа. Изд. иностр. лит., 1962.
7. Янке Е и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.
8. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 14, № 3, 1961.
9. Александров В. М. О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 2, 1964.
10. Лутчанко С. А. О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина. Прикл. механика, т. 2, вып. 12, 1966.