ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

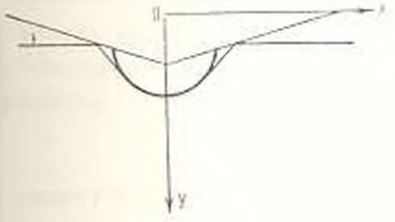
Физико-математические науки XXI, № 1, 1968 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. ГУРГЕНЯН

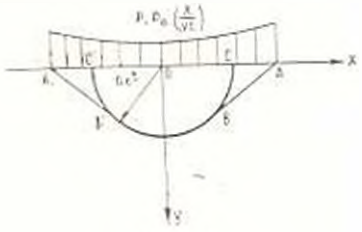
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ РЯДА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача о движении упругого или жидкого полупространства под действием ударной волны или твердых тел. К рассматриваемому кругу задач относится также задача о дифракции ударной волны на клине или конусе [1], фиг. 1.

Во всех рассматриваемых задачах в линейном случае, когда можно пренебречь малыми выше первого порядка, область возмущений ограничена волновыми поверхностями, причем в данной работе рассматривается случай, когда область возмущений ограничена линиями звуковой окружности BB' (фиг. 2), соответствующей области влияния начальной точки O поверхности, и линиями $AB-A'B'$, соответствующими волновым фронтам, порожденным возмущениями во фронте на поверхности. Для определенности рассмотрим задачу о движении сжимаемой жидкости под действием давления, возникающего на поверхности в точке O и движущегося по границе жидкости по закону



Фиг. 1.



Фиг. 2

$$P=\begin{cases} P_1 P_n\left(\dfrac{x}{Vt}\right) & x<Vt \\ 0 & x>Vt \end{cases} \qquad (1)$$

где P — давление, t — время с начала движения, V — скорость фронта давления по границе жидкости, P_1 — давление в точке A, P_n — профиль давления за фронтом на поверхности.

Ось $0x$ выбрана по невозмущенной границе жидкости, ось $0y$ направлена вглубь жидкости. В случае, когда давление возникает в одной точке на поверхности, задача будет осесимметричной, если же давление возникает вдоль прямой на поверхности, задача будет плоской.

Решение волнового уравнения плоской задачи для φ при граничном условии (1) и нулевых начальных условиях найдено в [2], причем на AB и $A'B'$ $P = P_1$, а вблизи BB', если ввести полярные координаты r_1, θ, давление имеет вид

$$P = P_1 f(\theta) \frac{\sqrt{t - \frac{r_1}{a}}}{\sqrt{\frac{r_1}{a}}} \tag{2}$$

где a — начальная скорость звука в жидкости

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2}\sin\theta \frac{V}{a}\int_{\xi_1}^{1} \frac{P_1(\xi)\,d\xi}{\left(1 - \frac{V}{a^2}\frac{x^2}{t}\right)^2}$$

в частном случае $P_1 = 1$

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi}\sin\theta \frac{\sqrt{1 - 2M}}{1 - M^2\cos^2\theta}, \quad M = \frac{V}{a} \tag{3}$$

Решение (2) имеет особенность на звуковой волне $r_1 = at$. Для исправления решения можно применить метод замены линейных характеристических переменных $t - \frac{r_1}{a}$ через Y_1, где $Y_1 = \text{const}$ — уравнение нелинейных характеристик [3].

Решение на ударной волне BB' запишется в виде

$$\frac{P}{P_1} = \frac{3}{2} + \frac{n-1}{2} f^2(\theta) \frac{P_1}{\rho_0 a^2} \tag{4}$$

где ρ_0 — начальная плотность жидкости с уравнением состояния

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$$

где $Bn = \rho_0 a^2$, $n = 7$ для воды.

Полученное решение (4) имеет второй порядок малости по $\gamma = \frac{P_1}{Bn}$ вдоль BB'.

При подходе к точке B, где $\cos\theta_0 = \frac{1}{M}$, являющейся точкой касания фронтов BB' и AB для $\theta - \theta_0 \sim \gamma^{\alpha}$, $\alpha < \frac{1}{2}$, решение (4) имеет порядок $\frac{P}{Bn} = \gamma^{1-2\alpha}$.

Потенциал скорости φ, связанный с давлением по формуле $P = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ имеет порядок $\varphi \sim \frac{P}{B\rho}\, l_1$ и поскольку по (2) $V \sim V_1 \sim \frac{P}{P_1 f(\delta)}$, то $V_1 \sim \varepsilon^{1-\alpha}$ и $\varphi \sim \varepsilon^{1-\alpha} l_1$.

Для трансверсальной составляющей скорости $V_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}$ получится порядок $V_\theta \sim \varepsilon^{1-\beta}$.

Уравнение для потенциала $\varphi = l\bar{\varphi}$ в переменных $\frac{r}{l} = r$ запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} - r\right)^2 - a^2\right) - \frac{1}{r^2}\left(2r - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta}\right)^2 -$$

$$-2\frac{1}{r^2}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta}\left(r - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}\right)\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^4}\left(\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta}\right)^2 - r^2 a^2\right)\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \theta^2} - \frac{a^2}{r}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \qquad (5)$$

где скорость звука a находится по интегралу Лагранжа

$$a^2 = a_0^2 - \frac{n-1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}\right)^2 - \frac{n-1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{r \partial \theta}\right)^2 - (n-1)\left(\bar{\varphi} - r\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}\right)$$

Если учесть приведенные выше порядки и оставить в уравнении (5) члены, имеющие основной порядок малости, получим вблизи линии $r_1 = a_0 t$ уравнение

$$a^2 = a_0^2 + (n-1)\, a_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2}\left(r^2 - a_0 (n+1)\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} - a_0^2\right) - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \theta^2} - a_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \qquad (6)$$

Согласно рассмотренным порядкам величин очевидно, что $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = V_r \sim \varepsilon^{1-\alpha}$, причем по (2) дифференцирование по r соответствует по порядку делению на $\varepsilon^{1-\alpha}$, поскольку $dr \sim V_{1r}$, тогда и первый и третий члены в (6) имеют порядок $2-2\alpha$, а второй член имеет порядок $4-6\alpha$.

В случае $\alpha < \frac{1}{2}$ второй член будет более высокого порядка, чем первый и третий, и решение уравнения (6) будет одномерно по r. Это решение на BB' дается (4). При $\alpha = \frac{1}{2}$ все три слагаемых — одинакового порядка, и решение будет двумерным. Вводя переменные

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}=a_0\mu\gamma, \quad \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}=a_0\gamma^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\nu, \quad r=a_0\left(1+\frac{n+1}{2}\gamma\delta\right) \tag{7}$$

$$\delta-\delta_0=\gamma^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,Y$$

уравнение (6) можно переписать в виде уравнений коротких волн

$$\frac{\partial\mu}{\partial\delta}(\mu-\delta)+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial Y}=0$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial Y}=\frac{\partial\nu}{\partial\delta} \tag{8}$$

Решение линейной задачи вблизи точки B в переменных (7) имеет вид [2]

$$\mu=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2|\delta|}}{Y}, \quad 2\delta=-Y^2\operatorname{tg}^2\mu\pi \tag{9}$$

Для получения решения системы (8) удобно вместо δ, Y ввести независимые переменные μ, Y. Тогда (7) запишется в виде

$$\mu-\delta+\frac{\mu}{2}\frac{\partial\delta}{\partial\mu}+\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial Y}\frac{\partial\delta}{\partial\mu}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta}{\partial Y}\right)^2=0$$
$$-\frac{\partial\delta}{\partial Y}=\frac{\partial\nu}{\partial\mu} \tag{10}$$

В линейном случае система (8) имеет место, только в первом уравнении в скобках μ следует отбросить. Тогда из (9) можно найти

$$\nu=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\mu\pi-\mu\right)Y \tag{11}$$

Решение системы (10), переходящее вдали от BB', т. е. при больших δ, в решение (9, 11), можно искать в виде

$$\delta=-\frac{1}{2}\varphi'Y^2+F(\mu), \quad \nu=\varphi(\mu)\,Y \tag{12}$$

причем для $\varphi(\mu)$ и $F(\mu)$ можно найти

$$\varphi(\mu)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\mu\pi-\mu\right)$$
$$F(\mu)=\mu+\frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi+B\sin^2\mu\pi \tag{13}$$

Решение имеет вид

$$\delta=-\frac{1}{2}Y^2\operatorname{tg}^2\mu\pi+\mu-\frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi+B\sin^2\mu\pi$$
$$\nu=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\mu\pi-\mu\right)Y \tag{14}$$

Точка B находится из пересечения ударной волны AB и параболической линии BC, заданной уравнением

$$r = a_0 \left(1 + \frac{n+1}{2}\frac{P_1}{Bn}\right)$$

причем для ее координат можно найти

$$\theta = 1, \quad Y = -1, \quad \nu = 1, \quad \mu = 1 \tag{15}$$

В области вблизи BB' для конечных $\theta - \theta_0$, заменяя в формуле (3) $t - \frac{r_1}{a}$ через Y_1 и интегрируя характеристики, можно найти решение в виде

$$\frac{P}{P_1} = f(\theta)\frac{\sqrt{Y_1}}{\sqrt{\frac{r_1}{a}}}, \qquad t = \frac{r_1}{a} - \gamma(n+1)\sqrt{\frac{r_1}{a}}\sqrt{Y_1} + Y_1 \tag{16}$$

или в переменных (7), учитывая, что вблизи B

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\gamma(\theta - \theta_0)}$$

можно получить

$$\nu = 2\mu - \frac{\mu^2}{2}\pi^2 Y^2 \tag{17}$$

причем это решение совпадает с (14) для больших Y и малых μ. Вблизи линии BC имеем

$$\frac{P}{P_1} = 1 - \frac{1}{\gamma}f(\theta)\frac{\sqrt{Y_1}}{\sqrt{\frac{r_1}{a}}}, \qquad P = P_1 + P' \tag{18}$$

Если ввести систему полярных координат r_1, θ_1, связанную с течением ABC

$$r\cos\theta = v\cos\beta + r_1\cos\theta_1$$
$$r\sin\theta = v\sin\beta + r_1\sin\theta_1$$

где v — скорость в области ABC, β — угол нормали ударной волны AB с OX, и применить к P' предыдущий метод, то можно найти решение в виде

$$\frac{P'}{P_1} = \mu = -f(\theta)\sqrt{Y_1}$$
$$r_1 = a_1 t - 2a_1\gamma\frac{n+1}{2}f(\theta)\sqrt{Y_1}\sqrt{\frac{r_1}{a}} - Y_1 \tag{19}$$

где a_1 — скорость звука в области ABC.

Если еще ввести $\xi_1 = \dfrac{x_1 - a_1 t}{\dfrac{n+1}{2} a_1 t}$, то решение можно записать в виде

$$\xi_1 = 2\varphi_1 - \frac{\pi}{2} = Y^2$$

и поскольку $\varphi_1 = \varphi - 1$, а вблизи точки B $\varphi_1 = \varphi = 1$, то вблизи BC можно найти

$$\xi = -1 + 2\varphi - \frac{(\varphi-1)^2\pi^2 Y^2}{2} \tag{20}$$

причем для больших $Y < 0$ и малых φ_1 (14) переходит в указанные формулы.

Для определения ударной волны BB' можно воспользоваться формулой для скорости ударной волны

$$\frac{dx}{dt} = -1 - \sqrt{2\varphi - \varphi^2} \tag{21}$$

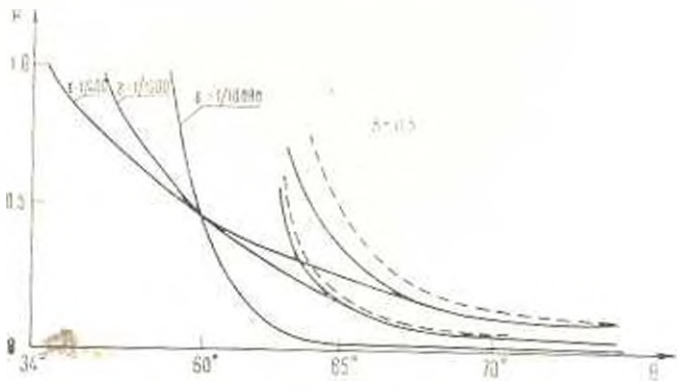
где выбран знак минус перед корнем, поскольку при возрастании φ φ убывает до второго порядка. Пользуясь (14—21), можно найти вдоль BB' уравнение

$$\frac{dx}{dY} = \frac{Y \operatorname{tg}^2 \varphi - \sqrt{Y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \pi + \frac{1}{\pi}\sin 2\varphi - 2B\sin^2\varphi}}{\frac{Y^2\pi \operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\varphi} + 1 - \cos 2\varphi - B\sin 2\varphi} \tag{22}$$

при условиях (15).

Постоянная B выбирается из условия равенства 0 касательной составляющей скорости к фронту в некоторой точке его, причем в точке B, согласно (15), касательная составляющая к фронту равна 0.

Результаты расчетов приведены на фиг. 3.



Фиг. 3.

Решение (22) соединяется для некоторых $\theta > \theta_0$ с решением по формуле (4). Для $\gamma = 1/10000$ оба решения непрерывно и гладко переходят друг в друга. Для $\gamma = 1/1000$, $\gamma = 1/400$ лучшие результаты дает $B = 0.5$, хотя для соединения с (4) можно взять решение $B = 0.5$, выходящее из точки $\mu = 1$, $Y = 1$, и соединить его с (4) посредством решения с измененным значением B (фиг. 3). Линии постоянного давления даны на фиг. 11.

Условие для касательной составляющей выполняется везде, кроме малой окрестности $\mu = 0.4$. Заметим, что в решении (4) $f(\theta)$ быстро растет с уменьшением θ и при $\theta = \theta_0 \sim 1/\gamma$ формула (4) дает большие значения P. Чтобы исправить решение (4) в области соединения с решением (22), следует учесть, что если в (4) заменить θ на $\theta + \gamma^{\alpha}$, $\alpha > \frac{1}{2}$, (4) будет по-прежнему решением в соответствующем порядке [4] с удовлетворением условия на фронте. В частности, на фиг. 3 достаточно взять при $\gamma = 1/10000$, $\gamma^{\alpha} = 0$, при $\gamma = 1/1000$, $\gamma^{\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$, при $\gamma = 1/400$, $\gamma^{\alpha} = 1^{3}$.

Другой подход заключается в построении решения, переходящего в (4) и (22) для соответствующих областей. Оно имеет вид:

$$r - 1 = -\frac{1}{\pi^2 f^2(\theta)} \operatorname{tg}^2 \mu\pi - \mu \frac{n+1}{2} \gamma + \frac{1}{2\pi} \frac{n+1}{2} \gamma \sin 2\mu\pi + \frac{n+1}{2} \gamma B \sin^2 \mu\pi \tag{23}$$

причем условие на ударной волне имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = -\sqrt{2(r-1) - \frac{n+1}{2}\gamma\mu^2} \tag{24}$$

Решение по этим формулам при условии $\theta = \theta_1$, $\mu = 1$ приведено на фиг. 4 (для $\gamma = 1/1000$ — линия bb', для $\gamma = 1/400$ — линия aa'). В точке, где $\sqrt{2\theta - \mu^2}$ обращается в нуль, и для больших значений θ вместо (21) и (24) можно брать условие $2\theta = \mu^2$.

В случае, если $P_1 < 0$, что соответствует в установившемся случае [4], [5], [6] задаче обтекания верха треугольного крыла, фронт $ABA'B'$ соответствует непрерывному переходу к нулевому давлению. В области ABB_1 (фиг. 5) течение будет с прямолинейными характеристиками. В переменных (7), где $\gamma = \frac{P_1'}{Bn}$, $P_1' = -P_{1x}$, решение имеет вид $\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$,

$$\theta = \frac{1}{2} Y^2 + \mu, \qquad \nu = -\theta Y + \frac{Y^3}{2}, \qquad \varphi = \frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{2} Y^2 \theta + \frac{Y^4}{8} \tag{25}$$

Параболическая линия данного решения $Y = 0$.

Решение линейной задачи вблизи линии BC имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-2\delta}}{Y}, \qquad \delta = -\frac{Y^2}{2}\operatorname{tg}^2\mu\pi \tag{26}$$

Решение системы (7), переходящее в (26), будет (14), причем соединить его с (25) непрерывно не удается. Таким образом, схему решения [5, 6] с непрерывным переходом через характеристику второго семейства для (25)

$$\delta = \frac{1}{2}Y^2 \tag{27}$$

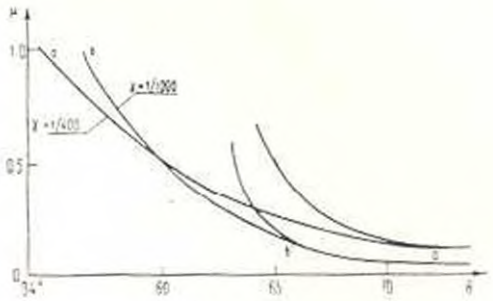
или через параболическую линию BKE (фиг. 5) осуществить не удается. Остается вариант [4] с ударной волной BC, затухающей в точке B. Уравнение ударной волны

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1} \tag{28}$$

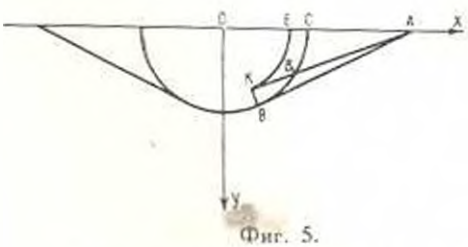
где μ_1 дается формулой (25), а μ — (14), найдется в виде

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{Y\operatorname{tg}^2\mu\pi + \sqrt{-\frac{Y^2}{2}\operatorname{tg}^2\mu\pi + \frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi + B\sin^2\mu\pi + \frac{Y^2}{2}}}{-\frac{\pi Y^2\operatorname{tg}\mu\pi}{\cos^2\mu\pi} + 1 + \cos 2\mu\pi - B\pi\sin 2\mu\pi} \tag{29}$$

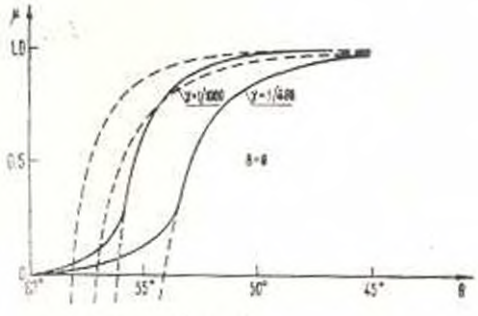
при условии $\mu = 0$, $Y = 0$. Поскольку в B $\frac{d\mu}{dY} = 0$, ударная волна вначале очень слаба.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Результаты расчетов для $B = 0$ приведены на фиг. 6, где реше-

вие (29) соединяется с решением на ударной волне B_1C вдали от точки B, которое находится так же, как и (4), в виде

$$\mu = -1 + \frac{3}{4}(n+1) f^2(\theta) \tau \qquad (30)$$

где $f(\theta)$ дается формулой (3).

Решение по формуле (29) ведется до точки $Y = -1$, 2, $\mu_1 = -1$, где оно соединяется с решением (30), в котором произведен сдвиг по θ на 2π.

Нетрудно показать, что решение (14) вдали от точки B при больших $Y > 0$ переходит в соответствующее одномерное решение, а вблизи B_1C при больших по модулю $Y < 0$ переходит в решение, одномерное относительно течения ABC, которое получается вышеприведенным методом

$$\zeta = 1 + 2\mu - \frac{\pi^2 Y^2}{2}(1+\mu)^2$$

В случае осесимметричной задачи решение на фронте BB^* (фиг. 2) имеет вид [3]

$$\frac{P}{P_0} = \varphi(\theta)\, e^{-\frac{1}{\frac{n+1}{2}\tau\varphi(\theta)}}, \quad \text{где } \varphi(\theta) = \frac{M^2 \sin\theta}{(1 - M^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \qquad (31)$$

Вблизи точки B можно использовать частное решение осесимметричного варианта системы (7) [7]

$$\zeta = -\frac{Y^2}{2} f'(\mu) + F(\mu), \quad \nu = Y f(\mu), \quad f(\mu) = \frac{A^2 - B^2 - \mu^2}{A + \mu} \qquad (32)$$

$$F(\mu) = \mu - \frac{(\mu + A)^2 - B^2}{2B} \ln\frac{\mu + A - B}{\mu + A + B} + C(\mu + A)^2 - CB^2$$

На фронте волны можно найти

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{-\dfrac{B^2 + (A+\mu)^2}{(A+\mu)^2}(Y - Y_1)}{\dfrac{B^2(Y-Y_1)^2}{(A+\mu)^3} + \dfrac{A+\mu}{B} 2\operatorname{arctg}\dfrac{B}{A+\mu} + 2C(A+\mu)} -$$

$$- \sqrt{\frac{\dfrac{B^2 + (A+\mu)^2}{(A+\mu)^2}(Y-Y_1)^2 + \mu + \dfrac{B^2 + (A+\mu)^2}{B} 2\operatorname{arctg}\dfrac{B}{A+\mu} + (A+\mu)^2 + CB^2}{\dfrac{B^2(Y-Y_1)^2}{(A+\mu)^3} + \dfrac{A+\mu}{B} 2\operatorname{arctg}\dfrac{B}{A+\mu} + 2C(A+\mu)}} \qquad (33)$$

где постоянные A, B, C определяются следующим образом:

$$A = -1 - \frac{\tau Y_1}{2}, \qquad B = \frac{\tau}{2}(-Y_1)^{\frac{1}{2}}, \qquad \sin\alpha_1 = \frac{1}{M} \qquad (34)$$

$$C = -\frac{1}{2}\frac{1}{k_1^2} = \frac{1}{2B^2}\,Y_1^3, \quad \lambda = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}, \quad k_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{-Y_1}}$$

а Y_1 определяется из уравнения

$$\frac{1}{4}\frac{\lambda}{-Y_1}\sqrt{-Y_1}\,\lambda = -\lambda Y_1 \qquad (35)$$

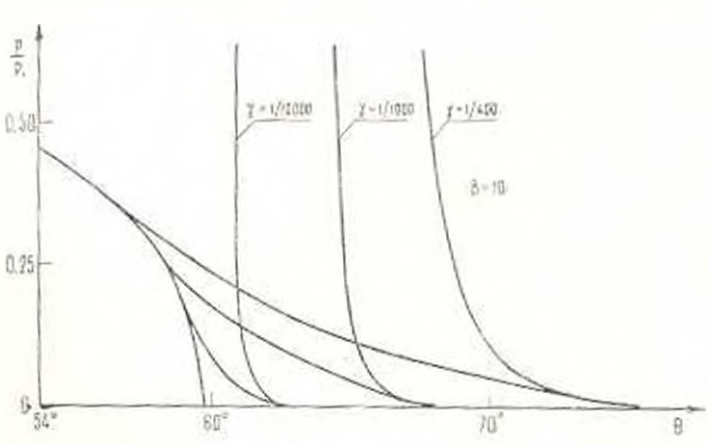
При определении этих постоянных используется условие конечности $k_1 = \frac{dp}{dY}$ на параболической линии $\theta = \alpha_1$ [7], а также условие соединения решения (32) с решением на ударной волне AB в точке пересечения ее с BB':

$$\frac{P}{P_1} = \sqrt{\frac{\xi - a_0\sin\alpha_1}{\xi}}\,\frac{1}{\cos\alpha_1} \quad \text{или} \quad \frac{P}{P_1} = \sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{n-1}{2}}\,Y}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}}, \quad t = \frac{x}{t} \qquad (36)$$

а условие (35) получается на пересечении AB и BB' [7].

Для значения $n = 7$, $M = \sqrt{2}$ проделаны расчеты по формуле (31) для $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, по формуле (32) вблизи θ_0 и по (36) вплоть до $\theta = 0$.

На фиг. 7 приведены результаты расчетов, где для $\gamma = 1/1000$ и $\gamma = 1/400$ решение, построенное по формуле (33), с начальным условием, взятым в некоторой точке решения (31), гладко переходит в решение (36) для $B = 10$.



Фиг. 7.

В случае проникания узкого конуса с углом 2β в жидкость с постоянной сверхзвуковой скоростью V, область возмущенного движения ограничена линией $ABCA'B'$ (фиг. 8). Ось Or выбрана по поверхности жидкости, ось Oz — по оси конуса.

Вдоль BC давление постоянно [8]

$$\frac{P'}{Bn} = M^6 (M^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} (n+1)\tau^4, \quad \text{где} \quad \tau = \tau_0, \quad \sin\tau_0 = \frac{1}{M} \tag{37}$$

Для решения задачи вблизи точки B можно внести переменные (7), где $\gamma = \frac{P'}{Bn}$.

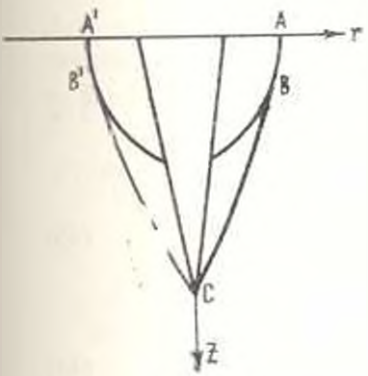
Решение позади параболической линии BB' в линейном случае имеет вид

$$\mu = c(Y + \sqrt{Y^2 - 2\nu}) \quad \text{при} \quad \nu < 0 \tag{38}$$

$$\nu = -\frac{\mu^2}{2c}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Решение осесимметричных уравнений коротких волн, которое получится из системы (8), если в первом уравнении второе слагаемое заменить на μ, переходящее для больших ν, μ и (38), имеет вид

$$z = \frac{\mu Y}{c} - \mu \ln \mu - \frac{\mu^2}{2c^2} - c_1\nu, \quad \nu = -\frac{\mu^2}{2c} + c_2 \tag{39}$$



Фиг. 8.

Фиг. 9.

Уравнение ударной волны BB' (фиг. 8) имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial Y} = \sqrt{2\nu - \mu}, \quad \frac{d\nu}{dY} = -\frac{\frac{\mu}{c} + \sqrt{2\frac{\mu Y}{c} - 2\mu\ln\mu - \frac{\mu^2}{c^2} + \mu - 2\frac{\mu}{c} + \frac{\mu^2}{c^2}}}{\frac{Y}{c} - \ln\mu - \frac{\mu}{c^2} - \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2}} \tag{40}$$

причем граничные условия, получающиеся из пересечения BC и BB', имеют вид

$$\mu = 1, \quad Y = 1, \quad z = 1, \quad \nu = -1 \tag{41}$$

Решение (40) приведено на фиг. 9 для $M = 2$, $n = 7$.

Линейное решение впереди параболической линии имеет вид

$$\delta = \frac{Y^2}{2} - \frac{\mu^2}{8C^2}, \quad v = -Y\mu, \quad \delta > 0 \tag{42}$$

Решение осесимметричных уравнений (8) можно искать в виде (32), где из условий (42) при больших δ можно найти $C = -\frac{1}{8c^2}$.

Условие совпадения решения (32) с решением вблизи BC [7] дает $A = 0$, $B = 0$:

$$\delta = \frac{Y^2}{2} + 2\mu - \frac{3}{2}\mu^2, \quad v = -Y\mu \tag{43}$$

Непрерывно соединить решение (39, 43) не удается, поэтому впереди параболической линии BB' будет ударная волна. Как видно из (39, 43), представляющих решение позади и впереди ударной волны в точке (41), ударная волна затухает. Легко показать, что уравнение ударной волны

$$\frac{d\delta}{dY} = \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1} \tag{44}$$

где μ_1 дается (43), а μ — (39), имеет мнимое решение, поскольку $\mu > 1$, $\mu_1 > 1$, а вблизи B в первом порядке по Y $\delta = 1$. Поэтому следует искать решение осесимметричного варианта, получаемого, если в первом уравнении (10) заменить $\frac{\mu}{2}\frac{\partial \delta}{\partial \mu}$ через $\mu \frac{\partial \delta}{\partial \mu}$, в виде

$$v = Yf(\mu) + \varphi(\mu), \quad \delta = -\frac{Y^2}{2} f'(\mu) - \varphi'(\mu) Y + F(\mu) \tag{45}$$

Тогда можем найти

$$f(\mu) = A' - \mu - \frac{B'^2}{A' + \mu}, \qquad \varphi(\mu) = C' \frac{(A' + \mu)^2 - B'^2}{(A' + \mu)^2} \tag{46}$$

$$F(\mu) = 1 - \frac{(A' + \mu)^2 - B'^2}{2B'} \ln \frac{A' + \mu - B'}{A' + \mu + B'} +$$

$$+ C' [(A' + \mu)^2 - B'^2] + \frac{1}{2} \frac{1}{(A' + \mu)^2}$$

где из условия совпадения с линейным решением (42) $C' = -\frac{3}{2}$.

В дальнейшем штрихи опускаем. Полагая $B = 0$ и записывая $\varphi = C\mu + C_1$, можно найти решение (46) в виде

$$\delta = \frac{Y^2}{2} - CY - A + 2\mu - \frac{3}{2}(A + \mu)^2 + \frac{1}{2} \tag{47}$$

$$v = Y(A - \mu) + C\mu + C_1$$

Условие непрерывного перехода (43) и (47) дает

$$A - \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2} + \frac{CC_1}{A} = 0 \tag{48}$$

$$\frac{C^2}{A} - 3A = 0 \tag{49}$$

Условия (41) дают

$$1 = \frac{1}{2} - C + A + 2 - \frac{3}{2}A^2 - 3A - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2}A^2 - 2A + C - \frac{1}{2} = 0 \tag{50}$$

Если в (49) полагать $C = A\sqrt{3}$, из (50) получится

$$A = -\frac{1}{3}(2A + \sqrt{3}) - \sqrt{\frac{(2A + \sqrt{3})^2}{9} + \frac{1}{3}} \tag{51}$$

где знаки выбраны из условия $\mu > 1$, $\mu_1 < 1$ и $2\mu - \mu - \mu_1 > 0$

Здесь μ_1 находится из (47) в виде

$$\mu_1 = \frac{2 - 3A}{3} -$$
$$- \sqrt{\frac{(2-3A)^2}{9} + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3} - A^2 - \frac{1}{2}Y^2 - \frac{2}{3}A\sqrt{3}\,Y - \frac{2}{3}\sqrt{\quad}} \tag{52}$$

а μ дается (39).

Уравнение ударной волны BB' имеет вид (44)

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{\sqrt{2\frac{\mu Y}{C} - 2\mu\ln\mu - \frac{\mu^2}{C^2} + \mu - \frac{2\mu}{C} + \frac{\mu^2}{C^2} - \mu_1 - \frac{\mu}{C}}}{\frac{Y}{C} - 1 - \ln\mu - \frac{\mu}{C^2} + \left(1 - \frac{1}{C} + \frac{1}{2C^2}\right)} \tag{53}$$

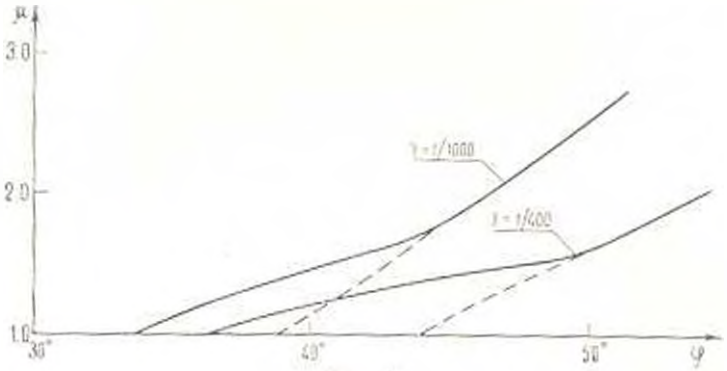
с начальным условием $\mu = 1$, $Y = 1$.

Полученное решение приведено на фиг. 10, где оно соединяется с решением вдали от точки B по BB', имеющем вид

$$\frac{P}{Bn} = \frac{\varkappa^2 M^2}{2}\ln\left(\frac{M-1}{M+1}\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right) + A\,\frac{2}{n+1}\,e^{\frac{1}{A}}$$
$$A = \frac{\varkappa M}{M^2\sin^2\varphi - 1} \tag{54}$$

Во всех рассмотренных задачах решение, сопрягаясь с линейным, вблизи точки B соединения фронтов волн удовлетворяет условию непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне лишь в нулевом порядке. В самом деле, поскольку вдоль параболи-

ческой линии BC $\mu = 1$, $\nu = -Y$, из (8) следует $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial Y} = 0$, т. е. в окрестности BC верно одномерное решение (20). В силу (20) при $\lambda = 1$, т. е. на BC $\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}$. Но в B из условий (21) и $\nu = \mu \sqrt{2\lambda - \mu}$ получается $\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = 0$. Таким образом, решение (14), дающее $\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}$ при $\lambda = 1$, $\mu = 1$, не удовлетворяет в первом порядке условию $\nu = \mu \sqrt{2\lambda - \mu}$.

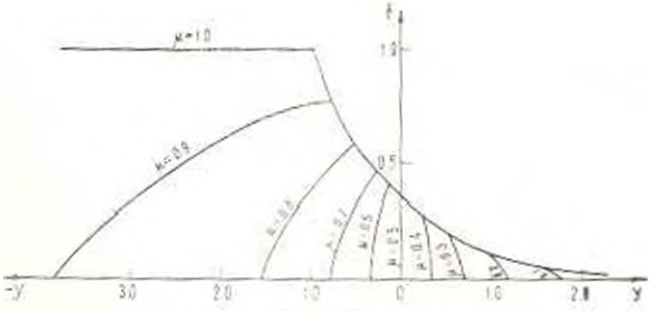


Фиг. 10.

Вблизи BC, где $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda - 1$, для потенциала можно найти [10]

$$\varphi = \frac{1}{2(n-1)}(\xi - a_1)^2 - \gamma(\xi - a_1)^3 \ln|\xi - a_1| + C(\eta)(\xi - a_1)^4, \tag{55}$$

$$\gamma = \frac{n+4}{6(n-1)^2}$$



Фиг. 11.

Если ввести переменные (7), а также обозначить

$$\mu - 1 = \mu_1, \quad \nu - Y = \nu_1, \quad \mu_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1}, \quad \nu_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial Y}$$

из системы (8) можно найти вблизи BC

$$\varphi_2 = \frac{1}{4}\xi_1^2 - c(Y)\xi_1^4, \quad c'' + 36c^2 = 0 \tag{56}$$

Решение последнего уравнения, дающего особенность в B, т. е. при $Y = -1$, запишется

$$c = \frac{1}{6(Y+1)^2}$$

Решение (56) не удовлетворяет условиям в точке B. Особое решение в точке B, соединяющее асимптотические решения (14), можно искать в виде $\varphi_2 = (Y+1)^4 G(\xi)$, $\xi = -\frac{\xi_1}{(Y+1)^3}$, причем подобные решения приведены в [8] и [10]. Можно также принять, что (14) верно лишь вблизи линейного решения, точка B [5] не особая, а в окрестности B уравнения (8) имеют решения, удовлетворяющие условиям в точке B, в которых $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ переменно вдоль BC. Более правдоподобно, однако, предположение о наличии особенности $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ в B. Если в (8) ввести переменные ξ_1, Y и полагать

$$\varphi_2 = (Y+1)^3 G(\xi), \quad \xi = -\frac{\xi_1}{(Y+1)^3} \tag{57}$$

можно найти уравнение, найденное ранее в [10]

$$G = \frac{Y_1(\xi)}{2}, \quad Y_1(4\xi^2 - 2\xi - Y_1) - Y_1'(1 - 10\xi) + 12Y_1 = 0$$

Асимптотика полученного уравнения для малых ξ, т. е. вблизи параболической линии BC имеет вид [10] $Y_1 = \frac{1}{2}\xi^2 + \xi^3$ или, переходя к потенциалу

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}(\xi-1)^2 - \frac{1}{2}\frac{(\xi-1)^4}{(Y+1)^3}, \quad u_2 = \frac{\xi-1}{2} - \frac{3}{2}\frac{(\xi-1)^2}{(Y+1)^3} \tag{58}$$

причем из сравнения с (56) получится $c = \frac{1}{3}$. Для больших ξ асимптотика имеет вид [10]: при $Y+1<0$

$$G(\xi) = \frac{a_1}{2}\xi^2 + \frac{a_2}{2}\xi^3, \quad \varphi_1 = \frac{a_1}{2}\xi_1^2 - \frac{a_2}{2}(-\xi_1)^{\frac{3}{2}}(Y+1) \tag{59}$$

Поскольку ударная волна AB с уравнением $\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y^2$ не касается параболической линии, $\frac{\xi_1}{Y+1}$ вдоль нее не мало и найти решение

с конечным ξ не удается. Если полагать, что при $Y+1>0$ решение имеет вид (57) с большим ξ и положить $G(\xi)=\frac{a_1}{2}\xi^2-\frac{a_2}{2}\xi^3$, то φ_1 дается (59) и смыкание имеет место. Но из условий на волне AB, $\mu_1=\delta_1=\nu_1=0$, $\frac{\partial\mu_1}{\partial\delta_1}-\frac{\partial\mu_1}{\partial Y}=\frac{\partial\nu_1}{\partial Y}=0$ следует $a_1=0$ и в окрестности $Y=-1$, $\mu_1>0$, что невозможно. Таким образом, в данной задаче нельзя искать решение в виде (57) в областях $Y+1<0$ и $Y+1>0$. В области $Y+1>0$ либо нужно решать двумерную задачу в окрестности B, либо подобрать подходящую особенность*. Интересно, что все известные решения дают $\frac{\partial\mu}{\partial\delta}=\frac{1}{2}$, т. е. условие в точке B в первом порядке не выполняется.

Для решения задачи о разрежении вблизи точки B, можно поступать аналогично. Около звуковой волны BB' с уравнением $\delta=0$ решение запишется подобно (58) в виде

$$\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial\delta},\quad \nu=\frac{\partial\varphi}{\partial Y},\quad \varphi=Y^2G(\xi),\quad \xi=-\frac{\delta}{Y^2},\quad \text{и при } \xi\to 0$$

$$G(\xi)=\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{6}\xi^3,\qquad \varphi=\frac{1}{4}\delta^2-\frac{1}{6}\frac{\delta^3}{Y^2} \tag{60}$$

где $G(\xi)$ удовлетворяет указанному выше уравнению. Теперь можно ввести $G_1=\frac{G(\xi)}{\xi}$ и численно интегрировать уравнение для G_1 с начальными условиями $G_1(0)=0$, $G_1'(0)=\frac{1}{4}$. Тогда для асимптотики при $\xi\to\infty$, $Y>0$ получится [10]

$$G_1=\frac{a_1}{2}\xi-\frac{a_2}{2}\xi^{\frac{1}{2}},\qquad \varphi_1=\frac{a_1}{2}\delta^2-\frac{a_2}{2}(-\delta)^{\frac{1}{2}}Y$$

с известными постоянными a_1, a_2. При $Y<0$ берется решение, соответствующее асимптотике

$$G_1=\frac{a_1}{2}\xi-\frac{a_2}{2}\xi^{\frac{1}{2}},\qquad \varphi_1=\frac{a_1}{2}\delta^2+\frac{a_2}{2}(-\delta)^{\frac{1}{2}}Y \tag{61}$$

На ударной волне BB_1, из условий (25), (28), (60) и условия сохранения касательной составляющей $\nu-\nu_1=(\mu_1-\mu)\sqrt{2\delta-\mu-\mu_1}$, полагая $\delta=\alpha Y^2$, можно получить $\alpha=-\sqrt{\alpha+G'+\frac{1}{2}}$. Численно инте-

* Решение [10] во всех задачах при $k>2$ не удовлетворяет условиям (21), (28) (и другим) на ударной волне. При $k=1$, $\nu=0$ [10] решение приближенно запишется в виде $\varphi_1=\frac{1}{4}\delta_1^2+2(Y+1)\delta_1$, а уравнение ударной волны — $\delta_1=\frac{7}{8}(Y+1)^2-(Y+1)$.

грируя уравнение для G_1, начиная с (61), можно найти α из написанного условия. Далее полученное вдоль BB_1 решение соединяется с найденным выше решением вдоль B_1C.

Проведенные расчеты дали для больших ξ порядок $G_1 \sim \xi^{1/4}$, что невозможно, т. к. тогда при $Y=0$ $\mu=\infty$. Поэтому решение не может иметь форму (60). Задача теперь заключается в выборе особенности [10]. Причем либо $\alpha=0$, что противоречит (28), либо на ударной волне ξ будет бесконечно. Те же рассуждения можно применить к задаче о конусе, тем более, что в (53) μ возрастает с ростом γ, в то время как γ_1 уменьшается при увеличении γ, по крайней мере, вблизи B.

Возможно, что это является следствием принятой схемы, в которой ударная волна BB' в точке B пересекается с параболической линией. Возможна схема решения, в которой ударная волна в точке B не затухает. Тогда ударная волна разделяет (45) и (39), причем постоянные определяются не из условия (41), а из уравнения сохранения касательных составляющих к фронтам ударных волн BB', BC, BB'' и непрерывности δ. Здесь этот вариант не рассматривается, поскольку можно показать, что при трех ударных волнах переход от BB' к BC непрерывен.

Из условия для касательной составляющей скорости к BC, BB', BB'' можно найти:

на BC $$\mu=1,\quad \nu=-Y,\quad \delta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Y^2$$

на BB' $$\nu+\sqrt{Y^2-\mu}\,\mu=-Y+\sqrt{Y^2-\mu}$$

на BB'' $$\nu+\mu\sqrt{Y^2-\mu+1}=0$$

откуда получается уравнение

$$-\mu\sqrt{Y^2+1-\mu}+\mu\sqrt{Y^2-\mu}=-Y+\sqrt{Y^2-\mu},$$

которое имеет единственное решение $\mu=1$, что и доказывает непрерывность перехода BB' в точке B.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 VI 1967

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

ՍԵՂՄՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԻ ՇԱՐՔ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկված են՝ սեղմելի հեղուկում ճնշման տարածման և կոնի թափանցման խնդիրները։ Որոշված են ճնշման բաշխումը հարվածային ճակատը-

նների վրա՝ կարճացված հավասարումների մասնավոր լուծումներ օգտագործելով։ Տարբեր լուծումները կարելու համար, արված են մի քանի առաջարկներ և բոլոր խնդիրների համար գծված է համապատասխան կորը, որը ցույց է տալիս ճնշման բաշխումը հարվածային ճակատի վրա։

A. G. BAGDOEV, A. A. GURGENIAN

APPROXIMATE SOLUTION OF SOME NON-LINEAR PROBLEMS FOR THE DETERMINATION OF SHOCK WAVES IN COMPRESSIBLE FLUID

S u m m a r y

The propagation of shock wave and the motion of a sharp cone in compressible fluid are considered.

The distribution pressure on a shock wave is determined by solution of the simplified equations near the front. The particular solutions obtained by comparison with the linear theory are used for the calculation of pressure curve along the shock.

These solutions are continued to their junction point with one dimensional solutions and some suggestions on the junction of two curves are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сагомонян А. Я.* Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1962.
2. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1961.
3. *Багдоев А. Г.* Определение давления на ударной волне в жидкости. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 5, 1964.
4. *Булах Б. М.* Ударные волны в конических потоках. ПММ, № 5, 1960.
5. *Бабаев Д. А.* Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. ПМПФ, № 2, 1962
6. *Powell I. R.* Exact and approximate solutions for the supersonic delta wing. J. Aeronaut Sci., 8, 1956.
7. *Багдоев А. Г.* Исследование распределения давления на ударной волне. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XV, № 4, 1964.
8. *Kuo Y. H.* A similarity rule for the interaction between a conical field and a plane shock. J. Aeronaut. Sci., vol. 22, № 7, p. 504—505. 1955.
9. *Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.* Теория коротких волн. ПМТФ, № 1, 1960.
10. *Булах Б. М.* Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, № 2, 1961.