ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 1, 1968 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПОЛОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С ПЕРИОДИЧЕСКИ НАСАЖЕННЫМИ НА НЕГО ДИСКАМИ

Осесимметричная контактная задача для сплошных и полых цилиндров исследовалась в работах Окубо [1], П. З. Лившица [2], Б. И. Когана [3], Т. А. Ворониной [4], В. М. Александрова [5, 6], Г. Я. Попова [7], Олесяка [8, 9, 10] и других [11–16].

Окубо рассматривает контактную задачу о сопряжении по цилиндрической поверхности сплошного и полого конечных упругих цилиндров различной длины. Задача решается в рядах Фурье, граничные условия для нормальных напряжений на торцах цилиндров удовлетворяются приближенно — в интегральном смысле.

В работе П. З. Лившица рассмотрена задача о контактных напряжениях при горячей посадке с натягом упругого диска на сплошной вал бесконечной длины, с учетом сил трения, действующих по поверхности контакта. В работе использованы результаты А. И. Лурье, полученные для толстых плит [17] и сплошного цилиндра бесконечной длины [18]. Контактные напряжения представлены в виде рядов, коэффициенты которых определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений.

Задача о деформации бесконечного цилиндра, сжатого по конечному участку поверхности жестким бандажом заданной формы, без учета касательных напряжений рассмотрена Т. А. Ворониным. Здесь радиальные перемещения точек поверхности вала от сосредоточенной единичной кольцевой радиальной нагрузки рассматриваются как функции влияния. Далее, при заданных на поверхности вала радиальных перемещениях контактные напряжения определяются из интегрального уравнения, рассмотренного Э. Рейснером. Однако, как указывалось в [5], результаты, полученные в работе [4], сомнительны ввиду ошибочного представления ядра интегрального уравнения.

Эта же задача рассмотрена В. А. Александровым, который в предельных случаях (при очень больших и очень малых значениях параметра $\lambda = \frac{R}{a}$) получает практически точное решение интегрального уравнения в замкнутом виде. Для промежуточных значений параметра λ интегральное уравнение решается приближенно, путем сведения его к системе алгебраических уравнений.

Контактная задача о действии жесткого штампа на внутреннюю поверхность полого цилиндра, жестко закрепленного по внешней поверхности, исследована в работе [16]. Задача сведена к решению некоторого вырожденного интегро-дифференциального уравнения, которое легко решается.

Исследованию напряженного состояния бесконечно длинной упругой трубы постоянной толщины при посадке ее на полубесконечный жесткий гладкий вал посвящены работы [11, 13]. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную обойму, исследовано Б. И. Коганом и Г. Я. Поповым.

Работа [12] посвящена исследованию напряженного состояния в двух (конечных и бесконечных) трубах, соединенных соосно посредством натяга, при конечной длине поверхности контакта. Интегральное уравнение задачи, полученное из условий совместности деформаций, решается численным методом.

З. Олесяк рассматривает контактную задачу о прессовой посадке на вал (как полый, так и сплошной) ряда дисков, расположенных на равных расстояниях по длине вала. Интегральное уравнение первого рода, полученное обычным путем, заменяется конечной системой линейных алгебраических уравнений. В частности, получено приближенное решение задачи о посадке одного диска на бесконечно длинный вал.

В настоящей работе получено точное решение смешанной осесимметричной задачи для бесконечного полого цилиндра с насаженными по внешней поверхности жесткими дисками, равноудаленными друг от друга, когда на внутренней поверхности и части внешней поверхности цилиндра между дисками приложены радиальные нагрузки. Для простоты предполагаем, что касательные напряжения на поверхностях цилиндра (как под дисками, так и вне) отсутствуют. Решение задачи представлено в виде тригонометрического ряда. Определение постоянных интегрирования сведено к решению „парных" рядов-уравнений. Далее задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Доказывается, что сумма коэффициентов при неизвестных стремится к нулю, как $0\left(\frac{\ln k}{k}\right)$, вследствие чего бесконечная система в общем случае квазивполне регулярна. Свободные члены этой системы имеют порядок $0(k^{-1})$.

Предельным переходом получено решение той же задачи для сплошного цилиндра.

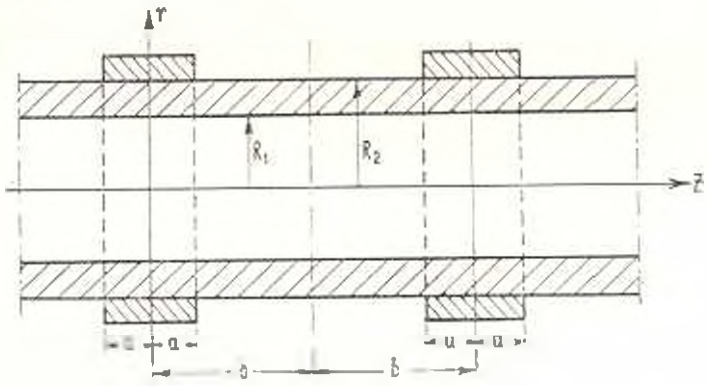
Получены также формулы для определения контактных напряжений как внутри контактной области, так и у краев дисков.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу для полого круглого бесконечного цилиндра с радиусами R_1, R_2, на внешней поверхности которого насажены равноотстоящие друг от друга жесткие, абсолютно

гладкие одинаковые диски заданной формы (фиг. 1). На внутренней поверхности и части внешней поверхности цилиндра между дисками приложены радиальные нагрузки. Касательные же напряжения по внешней и внутренней поверхностям цилиндра отсутствуют.

Предположим, что граничные условия в интервалах $-b \leqslant z \leqslant 0$ и $0 \leqslant z \leqslant b$ симметричны относительно оси r. Примем также, что граничные условия по всей длине цилиндра являются периодическим повторением граничных условий, заданных в интервале $(-b, b)$. Ввиду этого сечения $z = 0$ и $z = b$ являются плоскостями симметрии.

В силу симметрии достаточно рассмотреть деформацию части цилиндра в интервале $0 \leqslant z \leqslant b$.



Фиг. 1.

Граничные условия для рассматриваемой части цилиндра имеют вид

$$\sigma_r(R_1, z) = -f_1(z) = -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_k z \qquad 0 \leqslant z \leqslant b \qquad (1.1)$$

$$\tau_{rz}(R_1, z) = 0$$

$$\begin{aligned} u_r(R_2, z) &= f_2(z) && 0 < z < a \\ \sigma_r(R_2, z) &= f_3(z) && a < z < b \\ \tau_{rz}(R_2, z) &= 0 && 0 \leqslant z \leqslant b \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Полагаем, что $f_1(z)$ и $f_3(z)$ — кусочно-непрерывные функции, а $f_2(z)$ — непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной.

Условия симметрии по сечениям $z = 0$ и $z = b$ представляются соотношениями

$$\begin{aligned} u_z(r, 0) &= \tau_{rz}(r, 0) = 0 \\ u_z(r, b) &= \tau_{rz}(r, b) = 0 \end{aligned} \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \qquad (1.3)$$

Решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к нахождению функции $\Phi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (1.4)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right), \qquad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right), \qquad u_r = -\frac{1}{2G}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z} \quad (1.5)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right], \qquad u_z = \frac{1}{2G}\left[2(1-\nu)\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Решение уравнения (1.5) для рассматриваемой нами задачи представим в виде

$$\Phi(r, z) = z(E_0 r^2 + F_0 z^2 + H_0 \ln r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}[A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + C_k \alpha_k r I_1(\alpha_k r) + D_k \alpha_k r K_1(\alpha_k r)]\sin\alpha_k z \quad (1.6)$$

где $I_i(x)$, $K_i(x)$ — модифицированные цилиндрические функции, соответственно первого и второго рода, E_0, F_0, H_0, A_k, B_k, C_k, D_k — произвольные постоянные.

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{b}$$

Вычислив по формулам (1.5) с помощью (1.6) напряжения и перемещения, получим

$$\sigma_r(r, z) = -2(1-2\nu)E_0 + 6F_0\nu z - \frac{H_0}{r^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\left\{\left[I_0(\alpha_k r) - \frac{I_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r}\right]A_k + \left[K_0(\alpha_k r) + \frac{K_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r}\right]B_k + \right.$$

$$+ [(1-2\nu)I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)]C_k -$$

$$\left. - [(1-2\nu)K_0(\alpha_k r) - \alpha_k r K_1(\alpha_k r)]D_k\right\}\cos\alpha_k z \quad (1.7)$$

$$\sigma_z(r, z) = 4(2-\nu)E_0 + 6(1-\nu)F_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2[A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) - [2(2-\nu)I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)]C_k +$$

$$+ [-2(2-\nu)K_0(\alpha_k r) - \alpha_k r K_1(\alpha_k r)]D_k\}\cos\alpha_k z \quad (1.8)$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \{A_k I_1(\alpha_k r) - B_k K_1(\alpha_k r) + [2(1-\nu) I_1(\alpha_k r) + \alpha_k r I_0(\alpha_k r)] C_k + [2(1-\nu) K_1(\alpha_k r) - \alpha_k r K_0(\alpha_k r)] D_k \} \sin \alpha_k z \tag{1.9}$$

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2G} \{2E_0 r + \frac{H_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [A_k I_1(\alpha_k r) - B_k K_1(\alpha_k r) - C_k \alpha_k r I_0(\alpha_k r) - D_k \alpha_k r K_0(\alpha_k r)] \cos \alpha_k z \} \tag{1.10}$$

$$u_z(r, z) = \frac{1}{2G} \{6(1-2\nu) F_0 z + 8(1-\nu) E_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + [4(1-\nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)] C_k + [-4(1-\nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] D_k \} \sin \alpha_k z \} \tag{1.11}$$

Как следует из (1.9) и (1.11), три из условий (1.3) удовлетворяются тождественно, а из условия $u_z(r, b) = 0$ получим

$$E_0 = -\frac{3(1-2\nu)}{4(1-\nu)} F_0 \tag{1.12}$$

Удовлетворяя условиям (1.1) и третьему из условий (1.2), получим

$$H_0 = -\frac{R_1^2}{2} \left(a_0 + \frac{3F_0}{1-\nu} \right) \tag{1.13}$$

$$\left[I_0(\beta_k) - \frac{I_1(\beta_k)}{\beta_k} \right] A_k + \left[K_0(\beta_k) + \frac{K_1(\beta_k)}{\beta_k} \right] B_k + [(1-2\nu) I_0(\beta_k) + \beta_k I_1(\beta_k)] C_k - [(1-2\nu) K_0(\beta_k) - \beta_k K_1(\beta_k)] D_k = -\frac{a_k}{\alpha_k^2}$$

$$A_k I_1(\beta_k) + B_k K_1(\beta_k) + [2(1-\nu) I_1(\beta_k) + \beta_k I_0(\beta_k)] C_k + [2(1-\nu) K_1(\beta_k) - \beta_k K_0(\beta_k)] D_k = 0 \tag{1.14}$$

$$A_k I_1(\gamma_k) - B_k K_1(\gamma_k) + C_k [2(1-\nu) I_1(\gamma_k) + \gamma_k I_0(\gamma_k)] + [2(1-\nu) K_1(\gamma_k) - \gamma_k K_0(\gamma_k)] D_k = 0$$

где

$$\beta_k = \alpha_k R_1, \qquad \gamma_k = \alpha_k R_2$$

Из первого и второго условий (1.2) получим

$$-2(1-\nu)c_0X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2\{A_kI_2(\gamma_k)-B_kK_2(\gamma_k)+$$

$$+C_k\gamma_kI_0(\gamma_k)-D_k\gamma_kK_0(\gamma_k)\}\cos\gamma_kz=-2G\varphi(z)=-\frac{(1-\nu)a_0R_1^2R_2}{R_2^2-R_1^2}\qquad(1.15)$$

$$(0<z<a)$$

$$\frac{\pi}{6}X_0-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_kX_k\cos\gamma_kz=f_1(z)\qquad(a<z<b)\qquad(1.16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$c_0=\frac{\pi[(1-2\nu)R_2^2+R_1^2]R_2}{2(1-\nu)(R_2^2-R_1^2)b}\qquad(1.17)$$

$$X_0=\left|\frac{3F_0}{2(1-\nu)}-\frac{H_0}{R_2^2}\right|\frac{b}{\pi}-\frac{a_0b}{2\pi}\frac{R_1^2}{R_2^2}+\frac{3b}{2(1-\nu)\pi}\left(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)F_0\qquad(1.18)$$

$$X_k=-\gamma_k^2\left\{\left|I_0(\gamma_k)-\frac{I_1(\gamma_k)}{\gamma_k}\right|A_k-\left|K_0(\gamma_k)+\frac{K_1(\gamma_k)}{\gamma_k}\right|B_k+\right.$$

$$\left.+[(1-2\nu)I_0(\gamma_k)-\gamma_kI_1(\gamma_k)]C_k-[(1-2\nu)K_0(\gamma_k)-\gamma_kK_1(\gamma_k)]D_k\right\}\qquad(1.19)$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений (1.14), (1.19), получим

$$A_k=\frac{\Delta_{k1}}{\Delta_k},\quad B_k=\frac{\Delta_{k2}}{\Delta_k},\quad C_k=\frac{\Delta_{k3}}{\Delta_k},\quad D_k=\frac{\Delta_{k4}}{\Delta_k}\qquad(1.20)$$

где

$$\Delta_k=\frac{4(1-\nu)}{\gamma_k\beta_k}+\frac{\gamma_k^2+\beta_k^2}{\gamma_k\beta_k}+\gamma_k\beta_kS_1^2(\beta_k,\gamma_k)-$$

$$-\gamma_k\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k}+\beta_k\right|S_2^2(\beta_k,\gamma_k)-\beta_k\left|\frac{2(1-\nu)}{\gamma_k}+\gamma_k\right|S_3^2(\beta_k,\gamma_k)+$$

$$+\left|\frac{2(1-\nu)}{\gamma_k}+\gamma_k\right|\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k}-\beta_k\right|S_4^2(\beta_k,\gamma_k)\qquad(1.21)$$

$$\Delta_{k1}=\frac{X_k}{\gamma_k^2}q_1(\beta_k,\gamma_k)-\frac{a_k}{\gamma_k}q_1^*(\beta_k,\gamma_k)$$

$$\Delta_{k2}=\frac{X_k}{\gamma_k^2}q_2(\beta_k,\gamma_k)-\frac{a_k}{\gamma_k}q_2^*(\beta_k,\gamma_k)$$

$$\Delta_{k3}=\frac{X_k}{\gamma_k^2}q_3(\beta_k,\gamma_k)-\frac{a_k}{\gamma_k}q_3^*(\beta_k,\gamma_k)\qquad(1.22)$$

$$\Delta_{k4}=\frac{X_k}{\gamma_k^2}q_4(\beta_k,\gamma_k)-\frac{a_k}{\gamma_k}q_4^*(\beta_k,\gamma_k)$$

$$q_1(\beta_k, \gamma_k) = 2(1-\nu)\frac{\gamma_k}{\beta_k}K_0(\gamma_k) - \left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k\right| K_1(\gamma_k) -$$

$$-\gamma_k\beta_k K_0(\beta_k)\,S_1(\beta_k\gamma_k) + \gamma_k\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k\right| K_1(\beta_k)\,S_2(\beta_k, \gamma_k) -$$

$$-2(1-\nu)\beta_k K_0(\beta_k)\,S_3(\beta_k, \gamma_k) + 2(1-\nu)\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k\right| K_1(\beta_k)S_4(\beta_k, \gamma_k) \tag{1.23}$$

$$q_2(\beta_k, \gamma_k) = -2(1-\nu)\frac{\gamma_k}{\beta_k}I_0(\gamma_k) - \left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k\right| I_1(\gamma_k) +$$

$$+\gamma_k\beta_k S_3(\beta_k, \gamma_k)\,I_0(\beta_k) - \gamma_k\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k\right| I_1(\beta_k)\,S_2(\beta_k, \gamma_k) +$$

$$+2(1-\nu)\beta_k I_0(\beta_k)\,S_3(\beta_k, \gamma_k) + 2(1-\nu)\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} - \beta_k\right| I_1(\beta_k)S_4(\beta_k, \gamma_k) \tag{1.24}$$

$$q_3(\beta_k, \gamma_k) = -\frac{\gamma_k}{\beta_k}K_0(\gamma_k) + \beta_k K_0(\beta_k)\,S_1(\beta_k, \gamma_k) -$$

$$-\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} - \beta_k\right| K_1(\beta_k)\,S_4(\beta_k, \gamma_k) \tag{1.25}$$

$$q_4(\beta_k, \gamma_k) = -\frac{\gamma_k}{\beta_k}I_0(\gamma_k) - \beta_k I_0(\beta_k)\,S_3(\beta_k, \gamma_k) +$$

$$+\left|\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k\right| I_1(\beta_k)\,S_2(\beta_k, \gamma_k) \tag{1.26}$$

$$q_j^*(\beta_k, \gamma_k) = q_j(\gamma_k, \beta_k) \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}
S_1(\beta_k, \gamma_k) &= I_0(\gamma_k)\,K_0(\beta_k) - K_0(\gamma_k)\,I_0(\beta_k)\\
S_2(\beta_k, \gamma_k) &= I_0(\gamma_k)\,K_1(\beta_k) + K_0(\gamma_k)\,I_1(\beta_k)\\
S_3(\beta_k, \gamma_k) &= I_1(\gamma_k)\,K_0(\beta_k) + K_1(\gamma_k)\,I_0(\beta_k)\\
S_4(\beta_k, \gamma_k) &= I_1(\gamma_k)\,K_1(\beta_k) - K_1(\gamma_k)\,I_1(\beta_k)
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Подставив значения A_k, B_k, C_k, D_k по формулам (1.20)—(1.27) в уравнение (1.15) и далее в (1.15) и (1.16), переходя к новой переменной $\varphi = \frac{\pi z}{b}$, окончательно получим следующие парные тригонометрические ряды-уравнения относительно X_k:

$$c_0 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(1 - N_k)\,X_k \cos k\varphi = g(\varphi) \quad \left(0 < \varphi < h = \frac{\pi a}{b}\right) \tag{1.29}$$

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos k\varphi = h(\varphi) \qquad (h < \varphi < \pi)$$

где

$$N_k = 1 + \frac{1}{\Delta_k}\left\{\frac{1}{\beta_k} - \beta_k S_3^2 + \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k\right] S_1^2\right\} \tag{1.30}$$

$$g(\varphi) = \frac{G}{1-\nu} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) - \frac{a_0 R_1^2 R_2}{2(R_2^2 - R_1^2)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \left| \frac{\beta_k}{\gamma_k} S_3(\beta_k, \gamma_k) - S_2(\beta_k, \gamma_k) \right|}{\alpha_k \Delta_k} \cos k\varphi \tag{1.31}$$

$$h(\varphi) = \frac{b}{\pi} f_3\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) \tag{1.32}$$

Таким образом, коэффициенты E_0, H_0, F_0, A_k, B_k, C_k, D_k, выражаемые формулами (1.12), (1.13), (1.18) и (1.20), будут определены, если будут найдены X_k из парных рядов (1.29). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещения в любой точке цилиндра.

Отметим, что если в вышеприведенных выражениях положить

$$H_0 = B_k = D_k = 0, \quad R_1 = 0, \quad f_2(z) = 0, \quad (a_0 = a_k = 0) \tag{1.33}$$

то получим выражения, соответствующие задаче сплошного вала радиуса $R_2 = R$, определяемой условиями (1.2) и (1.3). Решение этой задачи также сводится к решению уравнений (1.29), в которых, однако, следует положить

$$c_0 = \frac{(1-2\nu)R}{2(1-\nu)b}, \quad g(\varphi) = \frac{G}{1-\nu} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right), \quad h(\varphi) = \frac{b}{\pi} f_3\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) \tag{1.34}$$

$$N_k = 1 - \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k[I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu)\frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}} \tag{1.35}$$

где $\gamma_k = \alpha_k R$; коэффициенты же F_0, E_0, A_k, C_k, входящие в выражения напряжений и перемещений, определяются через X_k посредством формул

$$E_0 = -\frac{(1-2\nu)\pi}{2b} X_0, \qquad F_0 = \frac{2(1-\nu)\pi}{3b} X_0$$

$$A_k = -\frac{X_k}{\alpha_k^2} \frac{2(1-\nu) I_1(\gamma_k) + \gamma_k I_0(\gamma_k)}{\gamma_k[I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu)\frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}} \tag{1.36}$$

$$C_k = \frac{X_k}{\alpha_k^2} \frac{I_1(\gamma_k)}{\gamma_k[I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu)\frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}}$$

Отметим также, что асимптотические формулы выражений (1.30) и (1.35) для больших „k", получаемые на основании асимптотического представления модифицированных цилиндрических функций для больших значений аргумента совпадают и имеют вид

$$N_k = \frac{(1-2\nu)\,b}{\pi R_2}\,\frac{1}{k} + \frac{(1-32\nu-32\nu^2)\,b^2}{8\pi^2 R_2^2}\,\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad (1.37)$$

Таким образом, числа N_k, ограниченные сверху, при возрастании индекса „k" стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{k}\right)$.

2. Решение парных рядов-уравнений типа (1.29) в случае, когда $N_k = 0$, получено в работах [19, 20] и имеет вид

$$X_0 = \frac{1}{2\left|c_0 - \ln\sin^2\frac{\gamma}{2}\right|}\left|2g(0) - \int_0^{\gamma} g_1(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta - \int_{\gamma}^{\pi} h_1(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\right| \quad (2.1)$$

$$X_k = \frac{g_k(\cos\gamma)}{k}\,X_0 + \omega_k \quad (2.2)$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{2}\int_0^{\gamma} g_1(\theta)\,Z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\pi} h_1(\theta)\,Z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta \quad (2.3)$$

$$g_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\gamma}\frac{g'(\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}$$

$$h_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\frac{h(\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}} \quad (2.4)$$

$$g_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \qquad Z_k = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$

$P_k(x)$ – полиномы Лежандра $|x| \le 1$.

В нашем случае, для решения (1.29), в первом уравнении этой системы член, содержащий N_k, перенесем вправо. Далее, пользуясь решениями (2.1) и (2.2), после некоторых преобразований для определения неизвестных X_k из (1.29) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp}X_p + \omega_k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \quad (2.5)$$

где

$$a_{k0} = \frac{y_k(\cos\lambda)}{k}, \qquad a_{kp} = \frac{pN_pQ_{kp}(\lambda)}{2}$$

$$Q_{kp}(\lambda) = \int_0^{\pi} Z_k(\cos\vartheta)\, Z_p(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta =$$

$$= \frac{ky_k(\cos\lambda)\, Z_p(\cos\lambda) - py_p(\cos\lambda)\, Z_k(\cos\lambda)}{p^2 - k^2} \qquad (p \neq k)$$

$$Q_{kk}(\lambda) = \frac{2}{2k}\left[P_k^2(\cos\lambda) - P_{k-1}^2(\cos\lambda) - 2P_{k-1}(\cos\lambda)\, P_k(\cos\lambda)\right] +$$

$$+ \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{j+1}\left[\cos\lambda P_j(\cos\lambda) - P_{j-1}(\cos\lambda)\right]P_j(\cos\lambda) \qquad (2.6)$$

ω_k определяется по формуле (2.3).

При получении (2.5) мы предварительно продифференцировали первое из уравнений (1.29). Поэтому (2.5) тождественно удовлетворяет только второму из уравнений (1.29). После подстановки (2.5) в первое из уравнений (1.29) и некоторых преобразований, члены, содержащие независимую переменную ε, исчезают, и для определения X_0 получим следующее уравнение:

$$2\left(c_0 - \ln\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)X_0 = 2g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} N_k X_k y_k(\cos\lambda) -$$

$$- \int_0^{\pi} g_1(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta - \int_0^{\pi} h_1(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta \qquad (2.7)$$

Пользуясь тем, что числа N_k, входящие в (1.29), (2.5)—(2.7), ограничены сверху и, как следует из (1.37), стремятся к нулю, как $0\left(\frac{1}{k}\right)$, докажем квазивполнерегулярность системы (2.5). Для этого оценим сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}|$. Учитывая неравенства

$$|N_k| < \frac{m}{k}, \quad |y_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}}, \quad |Z_k(x)| < \frac{2}{k}; \quad |x| < 1 - \varepsilon \qquad (2.8)$$

легко показать, что

$$|a_{k0}| < \frac{2}{k}, \qquad Q_{kk} < \frac{2}{k}, \quad |Q_{kp}| < \frac{4}{|\sqrt{kp}\,|k-p|} \qquad (2.9)$$

и для суммы модулей коэффициентов при неизвестных получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{kp}| = |a_k| + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} p|N_pQ_{kp}(\lambda)| + \frac{1}{2}k|N_kQ_{kk}(\lambda)| <$$

$$< \frac{2}{k^{3/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left| \sum_{p=1}^{p=k-1} \frac{1}{\sqrt{p}\,(k-p)} + \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}\,(p-k)} \right| =$$

$$= \frac{2}{k^{3/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left| \sum_{p=1}^{p=k-1} \frac{1}{\sqrt{p}\,(k-p)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\sqrt{k+p}} \right| <$$

$$< \frac{2}{k^{3/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left| \frac{\sqrt{k-1}+1}{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{(\sqrt{1+k}+\sqrt{k})^2(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})^2(\sqrt{k}-1)}{\sqrt{k}+1} \right| <$$

$$< m \frac{4+2\ln 4k}{k} + \frac{2(1+m)}{k^{3/2}} \qquad (2.10)$$

Полученная оценка, являющаяся весьма грубой, при возрастании „k“ стремится к нулю, откуда следует, что, начиная с некоторого k_0, будет иметь место неравенство

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| < 1 - \varepsilon \quad (k > k_0)$$

т. е. система (2.5) квази-вполнерегулярна. Для сплошного вала можно положить $m = 1$, т. к. $|N_k| < 1$. Нетрудно показать, что при сделанных предположениях относительно функций $f_2(z)$ и $f_3(z)$ свободные члены ω_k системы (2.5) ограничены сверху и при $k \to \infty$ стремятся к нулю, как $0(k^{-3/2})$.

Таким образом, система (2.5) квази-вполнерегулярна и имеет ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены, что позволяет определять неизвестные X_k с желаемой точностью. При этом, пользуясь методом последовательных приближений, легко доказать, что неизвестные коэффициенты X_k стремятся к нулю, как $0(k^{-3/2})$.

После нахождения X_k можно определить значение рядов, входящих в уравнения (1.29). Т. к. числа X_k при $k \to \infty$ стремятся к нулю, как $0(k^{-3/2})$, то сумма первого ряда системы (1.29) будет ограниченной и непрерывной функцией, которую можно будет вычислить численно. Второй же ряд системы (1.29) абсолютно не сходится. Однако вдали от концов дисков сумму этого ряда можно вычислить непосредственной подстановкой значения X_k. У краев диска $\varphi = 1 - 0$ ряд расходится, поэтому для получения формул, пригодных вблизи краев диска, целесообразно предварительно преобразовать выражение этого ряда. Для этого X_k из бесконечной системы (2.5) представим в виде

$$2X_k = [2X_0 - g_1(\nu) + h_1(\nu)] \frac{u_k(\cos\nu)}{k} + \frac{1}{k} \int_0^{\nu} g_1(\theta) u_k(\cos\theta)\, d\theta +$$

$$+\frac{1}{k}\int_0^{\vartheta} h_1(\theta)\,y_k(\cos\theta)\,d\theta+\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{\infty} pN_pX_p\left|p\int_0^{\lambda} y_k(\cos\theta)\,y_p(\cos\theta)\,\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-\right.$$

$$\left.-y_k(\cos\lambda)\,Z_p(\cos\lambda)\right| \qquad (2.11)$$

и далее, подставив (2.11) во второе уравнение системы (1.29) и используя значение ряда [20]

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos\theta)\cos k\varphi=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}} & \varphi<\theta\\ 0 & \varphi>\theta\end{cases}$$

с учетом $0<\varphi<\lambda$, окончательно получим

$$z_1(R_2,\varphi)=\frac{M\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\lambda}}+F(\varphi)\qquad(0<\varphi<\lambda)$$

где

$$M=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|2X_0-g_1(\lambda)+h_1(\lambda)-\sum_{k=1}^{\infty} kN_kX_kZ_k(\cos\lambda)\right|$$

$$F(\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\int_0^{\varphi}\frac{g_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}+\int_0^{\varphi}\frac{h_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{\infty} p^2N_pX_p\int_0^{\lambda}\frac{y_p(\cos\theta)\,\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}\right|\cos\frac{\varphi}{2}$$

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 3 IV 1967

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ՊԱՐԲԵՐԱԲԱՐ ՀԱԳՑՎԱԾ ՍԿԱՎԱՌԱԿՆԵՐՈՎ ԱՆԱՄԵՋ ԱՆՎԵՐՋ ԿԱՆԱՉ ԱՌԱՆՑՔԱԱԻՄՆՏԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում բերված է անամեջ անվերջ երկար գլանի առանցքասիմետրիկ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ գլանի արտաքին մակերևույթի վրա հագցված են միանման, իրարից հավասարաչափ հեռացված կոշտ սկա-

վառակներ, իսկ արտաքին մակերևույթի մեացած մասի և ներքին մակերևույթի վրա կիրառված են արտաքին ուժեր, որոնք ազդում են մակերևույթների նորմալի ուղղությամբ։

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է եռանկյունաչափական շարքերի տեսքով, որոնց գործակիցների որոշման համար ստացված են զույգ շարք-հավասարումներ։ Վերջինս բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը, որի համար ապացուցված է քվազի-լիովին ռեգուլյարությունը։

A. A. BABLOYAN, A. A. MELKONIAN

AXISYMETRICAL PROBLEM FOR CORED INFINITE CYLINDER WITH PERIODICALLY IMPLANTED DISKS

Summary

In this paper the exact solution of the axisymetric mixed problem for infinite cylinder with rigid disks implanted on equal distance from one another on the external surface is obtained. On the internal surface and in the part of the external surface between the disks a radial pressure is applied.

The solution of the problem is represented in trigonometrical series. Determination of arbitrary constant is brought to the dual series-equations. Later the problem is brought to the solution of an infinite system of algebraic equations, for which quasi-quite regularity is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Okubo H.* The Stress Distribution in Shaft Press-fitted with a Coller. Zeitschr. für ang. Math. and Mech., Bd. 32, № 6, 1952.
2. *Лившиц П. З.* О распределении напряжений по контактной поверхности при горячей посадке диска постоянной толщины на сплошной вал. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1955.
3. *Коган Б. И.* Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму. ПММ, т. XX, № 2, 1956.
4. *Воронин Т. А.* Контактные напряжения, возникающие при тугой посадке жесткой втулки на бесконечный цилиндр. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1957.
5. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1962.
6. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. XXVII, № 5, 1963.
7. *Попов Г. Я.* К решению контактных (смешанных) задач теории упругости для бесконечно длинного кругового цилиндра. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 4, 1964.

8. *Olesiak Z.* Stan naprezen i odksztalcen rurze lub wale wspolpracujayeh z pierscieniami lub tarczami kolowymi. Archiwum Budowy maszyn. T. IV, № 2, 1957.
9. *Olesiak Z.* The State of Stress and Strain in Tubes Reinforced with Rings. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Classe quatrieme. Vol. V, № 3, Varsovie, 1957.
10. *Olesiak Z.* The state of stress and strain in shaft with press-fitted rings or circular disks. Bulletin de l'Academie Polonaise des Science. Class quatrieme. Vol. V, № 3, 1957.
11. *Sparenberg J. A.* On a sharink-fit problem. Appl. Scient. Res., A—7, 2—3, 1958.
12. *Severn R. T.* Sharink-fit stresses between tubes having a finite interval of contact. Quart. J. Mech. and Appl. Math., т. 12, № 1, 1959.
13. *Коган Б. И., Хрусталев А. Ф.* Об одной осесимметричной задаче теории упругости для полого цилиндра. ПММ, т. XXII, № 5, 1958.
14. *Хрусталев А. Ф.* Осесимметрическая смешанная задача теории упругости для трансверсально-изотропного материала. Изв. высш. учебных заведений, Математика, № 1, 1964.
15. *Хрусталев А. Ф., Вайнштейн Ф. А.* Об одной смешанной задаче теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра. Изв. высш. учебных заведений, Математика, № 3, 1963.
16. *Александров В. М., Бибешко В. А., Белоконь А. В., Воронич И. И., Устинов Ю. А.* Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины. Инж. ж., Мех. тв. тела, № 1, 1966.
17. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, т. VI., вып. 2—3, 1942.
18. *Лурье А. И.* Напряженное состояние в упругом цилиндре, нагруженном по боковой поверхности. Инж. сб., т. XVII, 1953.
19. *Srivastav R. P.* III Dual relations involving trigonometric series. Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A), vol. 66, Pt. III, 1964, 173—184.
20. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.