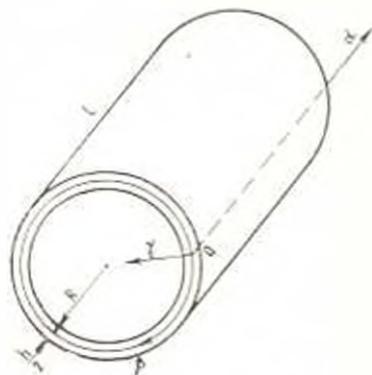


Г. Э. МИКАЕЛЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПО ДЛИНЕ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ

В данной статье рассматривается устойчивость моментного напряженного состояния упругой пологой круговой цилиндрической оболочки и исследуется влияние деформации невозмущенного состояния на величину критической нагрузки. Разбираются случаи однослойной изотропной и многослойной ортотропной оболочек.

1. Пусть изотропная цилиндрическая оболочка (фиг. 1) подвергается действию осесимметрично-сжимающей распределенной нагрузки  $q$ , которая нормально приложена к внешней цилиндрической поверхности и изменяется вдоль образующих по заданному закону. Очевидно, что состояние равновесия ( $F_0$ ) до потери устойчивости будет осесимметричным. Для определения этого состояния имеем следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений:



Фиг. 1.

$$D \frac{d^2 w_0}{dz^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2 \tau_0}{dz^2} - q \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{Eh} \frac{d^2 \tau_0}{dz^2} = - \frac{1}{R} \frac{d^2 w_0}{dz^2}$$

где  $w_0$  — нормальное перемещение,  $\tau_0$  — функция напряжений,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — жесткость оболочки на изгиб,  $E$  и  $\nu$  — упругие постоянные материала оболочки.

Допустим, что по торцам оболочка шарнирно скреплена с абсолютно жесткими шпангоутами, которые свободны в осевом направлении; тогда граничные условия для краев  $z = 0$ ,  $z = l$  имеют вид

$$M_1 = 0, \quad w_0 = 0, \quad T_1 = 0 \tag{1.2}$$

Решая систему уравнений (1.1), с учетом граничных условий (1.2), можно определить функции  $w_0$  и  $\tau_0$ , характеризующие невозмущенное состояние оболочки.

2. Рассмотрим устойчивость напряженного состояния  $F_0$ . Пусть при определенном соотношении параметров осесимметричное напря-

женное состояние оболочки теряет устойчивость и появляется неосесимметричное равновесное состояние  $F^*$ .

В силу осесимметричности состояния  $F_0$  будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки [1, 2]:

$$D\nabla^4 w_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi_1 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 w_1}{dx^2}$$

Здесь  $w_1$  — дополнительное малое нормальное перемещение, которое нужно сообщить оболочке, чтобы перенести ее из положения  $F_0$  в положение  $F^*$ ;  $\varphi_1$  — соответствующее приращение функции напряжений;

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$$

К уравнениям (2.1) необходимо присоединить следующие однородные граничные условия:

$$M_1^1 = T_1^1 = w_1 = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l \quad (2.2)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно функций  $w_1$ ,  $\varphi_1$ . Отметим, что переменные коэффициенты этих уравнений отражают влияние докритической деформации.

Из условия существования нетривиальных решений уравнений (2.1) определяется критическое значение нагрузки.

3. Рассмотрим устойчивость оболочки в случае, когда осесимметричная нагрузка изменяется вдоль образующих по закону

$$q = q_0 \sin \lambda x \quad \left( \lambda = \frac{\pi}{l} \right) \quad (3.1)$$

Решая совместно уравнения (1.1) и удовлетворяя всем граничным условиям (1.2), для  $w_0$  и  $\varphi_0$  получим

$$w_0 = A_0 \eta, \quad \varphi_0 = \frac{Eh}{l^2 R} A_0 \eta$$

где

$$A_0 = \frac{1}{D\lambda^4 + \frac{Eh}{R^2}}$$

Предполагая, что выпучивание оболочки характеризуется законом

$$w_1 = A_1 \sin \lambda x \sin \mu z \quad \left( \mu = \frac{\pi}{R} \right) \quad (3.2)$$

а соответствующая функция напряжений —

$$\varphi_1 = B_1 \sin \lambda x \sin \mu z \quad (3.3)$$

и интегрируя уравнения (2.1) методом Бубнова-Галеркина, находим критическое значение параметра нагрузки  $q_0$

$$q_0^* = q_0^* K \quad (3.4)$$

$$q_0^* = \frac{\frac{Eh}{R^2} i^2 + D(\lambda^2 + \mu^2)^2}{R^2 \mu^2 (i^2 + \mu^2)^2} \quad (3.5)$$

$$K = \frac{3\pi}{8} \frac{1 + \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(\frac{l}{R}\right)^{-4}}{1 + 2 \left| 1 + \frac{\pi^2}{z^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2 \right|^{-2}} \quad (3.6)$$

Здесь  $q_0^*$  — критическое значение равномерного внешнего давления в предположении безмоментности начального напряженного состояния;  $K$  — безразмерный параметр нагрузки.

Минимизируя  $q_0^*$  по  $n$ , определим верхнее значение критической нагрузки.

4. Рассмотрим влияние докритической деформации на величину критической нагрузки.

Как видно из (3.4) — (3.6), указанное влияние в основном характеризуется отношением длины оболочки к ее радиусу и числом волн  $n$  в окружном направлении оболочки.

Исследование зависимости (3.6) показывает, что при возрастании отношения  $\frac{l}{R}$  от нуля до некоторого значения в окрестности  $\frac{l}{R} = 0.5$  коэффициент  $K$ , начиная от  $\infty$ , убывает и получает минимальное значение в пределах  $\frac{1}{3} < K < \frac{3\pi}{8}$ ; при дальнейшем увеличении  $\frac{l}{R}$  коэффициент  $K$  возрастает и асимптотически стремится к пределу  $\frac{3\pi}{8}$ .

С увеличением числа волн  $n$  значения  $q_0^*$  все более приближаются к соответствующим значениям  $q_0^*$ .

Отметим также, что при  $\frac{l}{R} > 1$  последним членом в числителе выражения  $K$  можно пренебречь.

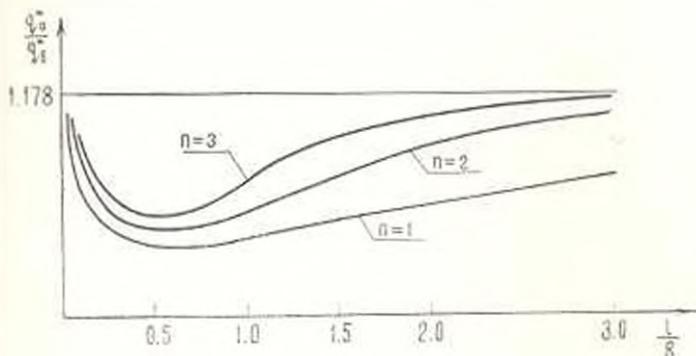
На фиг. 2 изображена зависимость между безразмерным параметром нагрузки  $\frac{q_0^*}{q_0^*}$  и отношением  $\frac{l}{R}$  при  $\nu = 0.3$ ,  $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Рассмотрение фиг. 2 позволяет определить интервал изменения  $\frac{l}{R}$ , когда различие между  $q_0^*$  и  $q_0^*$  становится более существенным.

При  $n = 2$ ,  $n = 3$ , можно считать, что указанные значения  $\frac{l}{R}$  лежат в пределах

$$0.25 < \frac{l}{R} < 2$$

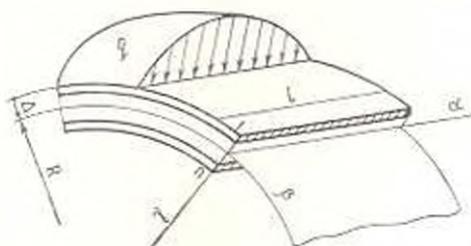
При  $l = 1$  поперечные сечения оболочки перемещаются как жесткое целое. В этом частном случае искомые значения  $\frac{l}{R}$  занимают почти весь встречающийся на практике диапазон значений этого отношения.



Фиг. 2

5. Приводим решение аналогичной задачи для многослойной ортотропной цилиндрической оболочки, отнесенной к системе криволинейных ортогональных координат  $\alpha, \beta, \gamma$  (фиг. 3). В этой системе цилиндрическая координатная поверхность радиуса  $R$  находится на расстоянии  $\Delta$  от внешней поверхности оболочки.

Будем считать, что плоскости упругой симметрии материала каждого слоя перпендикулярны координатным линиям  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Фиг. 3.

Оссимметричная равновесная форма  $F_0$  оболочки описывается следующей системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d^4 \tau_{21}}{d\alpha^4} + a_2 \frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} &= -\frac{1}{R} \frac{d^2 \sigma_{\alpha\alpha}}{d\alpha^2} \\ b_1 \frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} - a_3 \frac{d^4 \tau_{20}}{d\alpha^4} &= \frac{1}{R} \frac{d^2 \tau_{20}}{d\alpha^2} + q \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$a_1 = \frac{C_{21}}{\Omega}, \quad a_2 = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{22} - K_{11} C_{21})$$

$$b_3 = D_{11} - \frac{1}{\Omega} (K_{11}^2 C_{32} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{11})$$

$$\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$$

Для жесткостей  $C_{jk}$ ,  $K_k$ ,  $D_{jk}$  имеем

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^n B_{jk}^i (\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$K_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_{jk}^i [(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) - 2\Delta (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

$$D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n B_{jk}^i [(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) - 3\Delta (\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) + 3\Delta^2 (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

Здесь  $\delta_i$  — расстояние внутренней поверхности  $i$ -го слоя от внешней поверхности оболочки,

$$B_{11}^i = \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{12}^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{22}^i = G_2^i$$

$$B_{12}^i = \nu_1^i B_{22}^i = \nu_2^i B_{11}^i$$

Уравнения устойчивости напряженного состояния  $F_0$  оболочки имеют вид [4—6]

$$L(a_1) \varphi_1 + L(a_2) w_1 = - \frac{d^2 w_0}{dz^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

$$L(b_1) w_1 - L(a_3) \varphi_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dz^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2}$$

где

$$L(a_1) = a_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \xi^2} + a_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}$$

$$L(a_2) = a_4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_5 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \xi^2} + a_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}$$

$$L(b_1) = b_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + b_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \xi^2} + b_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}$$

Коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_2 = \frac{1}{C_{33}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_3 = \frac{C_{22}}{\Omega}$$

$$a_4 = \frac{1}{\Omega} (K_{11} C_{32} - 2K_{12} C_{12} + K_{22} C_{11}) - 2 \frac{K_{22}}{C_{33}}$$

$$a_6 = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12})$$

$$b_2 = 2 \left\{ D_{12} - \frac{1}{2} [K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + K_{22}K_{12}C_{11}] + \right. \\ \left. - 2 \left( D_{00} - \frac{K_{22}^2}{C_{11}} \right) \right\} \\ b_3 = D_{22} - \frac{1}{2} (K_{22}^2C_{11} - 2K_{12}K_{22}C_{12} + K_{12}^2C_{22})$$

Пусть оболочка находится под действием нагрузки (3.1) при граничных условиях (1.2). Повторяя предыдущие рассуждения и выкладки, определим критическое значение синусоидального внешнего давления.

Из (5.1) для определения  $w_0$  получаем дифференциальное уравнение

$$\left( \sigma_1 + \frac{a_1^2}{a_1} \right) \frac{d^4 w_0}{ds^4} + \frac{2a_1}{a_1 R} \frac{d^2 w_0}{ds^2} + \frac{w_0}{a_1 R^2} = q$$

С учетом (1.2) находим решение этого уравнения в виде

$$w_0 = A_0 q_0 \sin i s$$

Функция напряжений  $\varepsilon_0$  определяется выражением

$$\varepsilon_0 = \frac{A_0}{a_1 i^2} \left( \frac{1}{R} - a_1 i^2 \right) q_0 \sin i s$$

Здесь

$$A_0 = \left[ \left( b_1 + \frac{a_1^2}{a_1} \right) i^4 + \frac{2a_1}{a_1 R} i^2 + \frac{1}{a_1 R^2} \right]^{-1}$$

Принимая выражения для  $w_1$  и  $\varepsilon_1$  в виде (3.2), (3.3) и интегрируя уравнения (5.2), находим

$$q_0^* = q_1^* K \quad (5.3)$$

$$K = \frac{\left( \Phi(a_1) - \frac{i^2}{R} \right)^2 - \Phi(a_1)\Phi(b_1)}{R i^2 \Phi(a_1)} \\ K = \frac{3}{8} \frac{1 + 2a_1 R i^2 - (a_1 b_1 - a_1^2) R^2 i^4}{1 - a_1 R i^2 + \frac{2a_1 R i^2}{\Phi(a_1)} \left( \frac{i^2}{R} - \Phi(a_1) \right)}$$

где

$$\Phi(a) = a_1^4 - a_1^2 i^2 - a_1 i^4$$

$$\Phi(a_1) = a_1^4 - a_1^2 i^2 + a_1 i^4$$

$$\Phi(b) = b_1^4 + b_1^2 i^2 - b_1 i^4$$

Сравнивая полученный результат с аналогичным результатом для однослойной изотропной оболочки, замечаем, что сложность и уни-

зотропия, как и следовало ожидать, вносят только количественные поправки в выражение критической нагрузки.

6. Рассмотрим численные примеры.

Определим верхнее критическое значение синусоидального внешнего давления для дюралюминиевой и стальной однослойных оболочек и двухслойной оболочки, составленной из этих оболочек.

Пусть для дюралюминиевой оболочки

$$E_1 = 0.75 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.1 \text{ см}$$

для стальной оболочки

$$E_2 = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.1 \text{ см}$$

Будем считать, что  $R = 40 \text{ см}$ ,  $l = 2R$ .

Минимизируя  $q^*$  по  $n$ , для дюралюминиевой оболочки находим

$$q_{0, \text{min}}^* = 0.168 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 9$$

для стальной оболочки

$$q_{0, \text{min}}^* = 0.448 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 9$$

для двухслойной оболочки

$$q_{0, \text{min}}^* = 1.221 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 7$$

Интересно отметить, что для однослойных изотропных оболочек, при одинаковых размерах и граничных условиях, форма потери устойчивости, соответствующая  $q_{0, \text{min}}^*$ , зависит только от коэффициента Пуассона.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 28 XII 1966

## 2. 2. ՄԻՔՎԵԼՅԱՆ

### ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԵՎ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՏՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐՏԱՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԿԵՊՔՈՒՄ

Ո Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

‘Իրաբերվում է’ փոքր կորույթուն ունեցող շրջանային, գլանային առաձգարան թաղանթի մոմենտային շարվածային վիճակի կալուսությունը: Ուսումնասիրվում է՝ սրաաբին գլանային մակերևույթով առանցքաորմե-

արիկ ճնշման դեպքը: Հետազոտվում է թաղանթի առանցքային և շրջանային աղիցումների հրմային աղիցումները հրմային առանցքային դեպքում: Թնդիրը լուծվում է՝ բարակ և շերտավոր անիզոտրոպ թաղանթների տեսության համաձայն, շրջանային ճնշման դեպքում:

G. Z. MIKHAELIAN

STABILITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL UNDER PRESSURE

S u m m a r y

In this paper the stability of momental stress state of flexibility of a cylindrical shell is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.-М., 1948.
2. Муштарь Х. М., Галимов К. Э. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткингониздат, Казань, 1957.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
4. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
5. Гнуни В. Ц. О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961.
6. Микаелиан Г. Э. Известия АН АрмССР, Механика, т. XIX, № 5, 1966.