

К. С. ЧОБАНЯН, А. С. ХАЧИКЯН

ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА С ТОНКОСТЕННЫМ ГИБКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

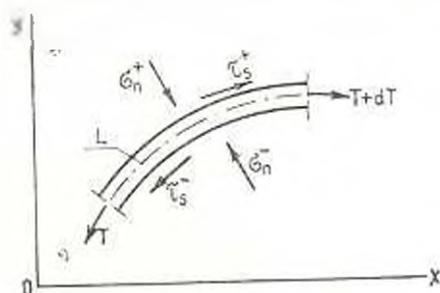
В работе рассмотрены условия на тонкостенном гибком включении, которым удовлетворяют предельные значения напряжений и перемещений в подпергнутом плоской деформации упругом теле.

Исследованы две задачи упругого равновесия бесконечной плоскости с прямолинейным тонким включением, находящейся под действием сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения.

1. Рассмотрим плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным цилиндрическим гибким включением, когда плоскость деформаций перпендикулярна к образующим цилиндрического включения. Принимаем, что контакт между частями тела и включения осуществляется полным сцеплением.

Величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние упругого тела, слева от включения обозначим индексом „+“, а справа — индексом „-“, величины же, относящиеся к внутренним точкам включения — без индекса. Составляя условия равновесия узкого элемента включения, имеющего единичную длину в направлении оси z (фиг. 1), находим

$$\begin{aligned} \sigma_n^+ - \sigma_n^- + \frac{1}{\rho} T &= 0 \\ \tau_s^+ - \tau_s^- + \frac{\partial T}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

где σ_n^+ и σ_n^- — нормальные и касательные напряжения на контактах, s и l — направления касательной и нормали к средней линии L поперечного сечения включения, ρ — радиус кривизны L , а T — натяжение включения

$$T = \int_{-h}^h \sigma_s dn \quad (1.2)$$

Здесь $2h$ — толщина включения.

Деформации включения в криволинейных координатах s , l , где l — расстояние точки по нормали до средней поверхности включения, определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{\partial u_n}{\partial n} \\ \varepsilon_s &= \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{\rho} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{u_s}{\rho}\end{aligned}\quad (1.3)$$

Материал включения принимаем ортотропным, причем направления s , n и z являются главными направлениями изотропии

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\nu_{12}}{E_s} \sigma_n - \frac{\nu_{12}}{E_s} \sigma_z \\ \varepsilon_n &= \frac{\sigma_n}{E_n} - \frac{\nu_{21}}{E_n} \sigma_s - \frac{\nu_{21}}{E_n} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_z} - \frac{\nu_{21}}{E_z} \sigma_s - \frac{\nu_{21}}{E_z} \sigma_n \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G} \quad \tau_{12} = \tau_{21} = 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Между коэффициентами поперечных деформаций имеются зависимости

$$\frac{\nu_{12}}{E_s} = \frac{\nu_{21}}{E_n}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_s} = \frac{\nu_{21}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{21}}{E_n} = \frac{\nu_{21}}{E_z}\quad (1.5)$$

Используя условие $\varepsilon_z = 0$, из первых двух соотношений (1.4) исключаем σ_z :

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= a_{11}\sigma_s - a_{12}\sigma_n \\ \varepsilon_n &= a_{21}\sigma_s - a_{22}\sigma_n \\ \gamma_{12} &= b_{12}\sigma_s\end{aligned}\quad (1.6)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{E_s} (1 - \nu_{12}\nu_{21}), & a_{12} &= \frac{1}{E_s} (\nu_{12} + \nu_{21}\nu_{21}) \\ a_{21} &= \frac{1}{E_n} (1 - \nu_{21}\nu_{12}), & a_{22} &= \frac{1}{E_n} (\nu_{21} + \nu_{12}\nu_{12}) \\ b_{12} &= \frac{1}{G}\end{aligned}\quad (1.7)$$

На основании (1.5) $a_{21} = a_{12}$.

Используя тонкостенность включения, получаем следующие приближенные зависимости:

$$u_s = \frac{u_s^+ + u_s^-}{2}, \quad u_n = \frac{u_n^+ + u_n^-}{2}, \quad \tau_n = \frac{u_n^+ - u_n^-}{2h} \quad (1.8)$$

$$\tau_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n^+ + u_n^-}{2\rho}, \quad \gamma_{sn} = \frac{u_s^+ - u_s^-}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_n^-}{\partial s} - \frac{u_s^+ + u_s^-}{2\rho}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-}{2}, \quad \tau_s = -\frac{\tau_s^+ + \tau_s^-}{2}, \quad \tau_n = \frac{T}{2h} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в (1.6), получаем

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n^+ - u_n^-}{2\rho} = a_{ss} \frac{T}{2h} - a_{sn} \frac{\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-}{2}$$

$$\frac{u_n^+ - u_n^-}{2h} = a_{nn} \frac{\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-}{2} - a_{ns} \frac{T}{2h} \quad (1.10)$$

$$\frac{u_s^+ - u_s^-}{h} + \frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{\partial u_n^-}{\partial s} - \frac{u_s^+ + u_s^-}{\rho} = b_{sn} (\tau_s^+ + \tau_s^-)$$

Таким образом, получено пять условий (1.1) и (1.10) для предельных значений напряжений и перемещений на тонкостенном гибком включении и для натяжения T .

Считая поперечные деформации включения малыми и пренебрегая отношением h по сравнению с единицей, условия (1.10) можно упростить

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{a_{ss}}{2h} T - \frac{a_{sn}}{2} (\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-)$$

$$u_n^+ - u_n^- = a_{nn} h (\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-) - a_{ns} T \quad (1.11)$$

$$u_s^+ - u_s^- = h b_{sn} (\tau_s^+ + \tau_s^-) - h \left(\frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{\partial u_n^-}{\partial s} \right)$$

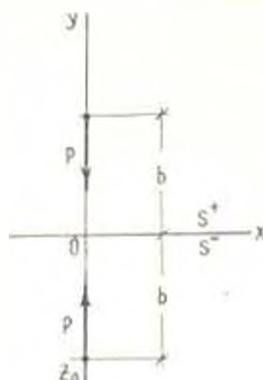
Пренебрегая совсем поперечными деформациями и считая толщину включения достаточно малой, вместо (1.11) получаем предельно упрощенные условия

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{a_{ss}}{2h} T, \quad u_n^+ = u_n^-, \quad u_s^+ = u_s^- \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим упругое равновесие двух полупространств, соединенных между собой при помощи тонкой упругой пластинки, под действием перпендикулярных к пластинке сил, равномерно распределенных по двум равноудаленным от пластинки параллельным прямым, лежащим по разные стороны от пластинки. Исключая перемещения в направлении этих прямых, будем иметь задачу плоского деформированного состояния для упругой плоскости с бесконечным упругим прямолинейным включением при действии двух сосредоточенных сил (фиг. 2).

Вследствие симметрии имеем

$$u_n(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = -\tau_{xy}(x, 0) \quad (2.1)$$



Фиг. 2.

На основании (1.1), (1.12) и (2.1) получаем

$$\tau_{xy} = k \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

где

$$k = \frac{hE_1}{1 - \nu_{11}\nu_{22}}$$

а в случае изотропного включения

$$k = \frac{hE}{1 - \nu^2} \quad (2.3)$$

Рассматриваемую задачу решим путем приведения к задаче сопряжения [1].

В силу симметрии будем рассматривать только нижнюю полуплоскость.

Напряжения σ_y , τ_{xy} и производные перемещений $u_x = u$, $u_n = v$ выражаются через две функции комплексного переменного следующими формулами:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad (2.4)$$

$$2G(v' - iv') = x\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi'(z)} \quad (2.5)$$

где

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \nu = 3 - 4\nu$$

В точке приложения сосредоточенной силы P функции $\Phi(z)$ и $\Psi'(z)$ имеют особенность

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_0} + \Phi_0(z) \quad (2.6)$$

$$\Psi'(z) = -\frac{i\nu P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_0} - \frac{i\bar{z}_0 P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{(z-z_0)^2} + \Psi'_0(z) \quad (2.7)$$

Здесь $z_0 = -ib$ — точка приложения силы P , $\Phi_0(z)$ и $\Psi'_0(z)$ — аналитические в нижней полуплоскости функции.

Следуя [1], в верхней полуплоскости определим функцию $\Phi_0(z)$ при помощи следующего соотношения:

$$\Phi_0^*(z) = -\overline{\Phi_0(z)} - z\overline{\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0'(z)} \quad \text{при } z \text{ в } S^+ \quad (2.8)$$

где

$$\Phi_0^*(z) = \overline{\Phi_0(z)}, \quad \Psi_0^*(z) = \overline{\Psi_0'(z)}$$

Переходя в (2.8) к сопряженным значениям, находим

$$\Psi_0(z) = \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} - z\Phi_0'(z) \quad (2.9)$$

Внося (2.6), (2.7) и (2.9) в (2.4) и (2.5), получаем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = A(z) + \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)} \quad (2.10)$$

$$2G(u' + iv') = B(z) + \kappa\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)} \quad (2.11)$$

где введены обозначения

$$A(z) = c \left[\frac{1+z}{z-ib} - \frac{1}{z+ib} - \frac{z+ib}{(z-ib)^2} \right] \quad (2.12)$$

$$B(z) = c \left[\frac{z+ib}{(z-ib)^2} - \frac{1+z}{z-ib} - \frac{\kappa}{z+ib} \right]$$

$$c = \frac{iP}{2\kappa(1-\kappa)}$$

Первое условие (2.1) и условие (2.2) в новых обозначениях перемещений будут

$$v(x, 0) = 0, \quad \nabla_{yy} = k \frac{d^2u(x, 0)}{dx^2} \quad (2.13)$$

Удовлетворяя этим условиям, на основании (2.10) и (2.11) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_0^-(t) - \overline{\Phi_0^-(t)} - \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + n\kappa\Phi_0^-(t) + n\Phi_0^+(t) = \\ = \overline{A(t)} - A(t) - nB'(t), \quad -\infty < t < \infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$n = \frac{ik}{G}$$

Функция $F^*(z)$, определенная формулой

$$F^*(z) = \begin{cases} \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - n\Phi_0'(z) & \text{при } z \text{ в } S^+ \\ \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} + n\kappa\Phi_0'(z) & \text{при } z \text{ в } S^- \end{cases} \quad (2.15)$$

кусочно-голоморфна с линией скачков, совпадающей с действительной осью.

На основании (2.14) и (2.15) имеем

$$F^+(t) - F^-(t) = A(t) - \overline{A(t)} + nB'(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.16)$$

$$F^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(t) - \overline{A(t)} + nB'(t)}{t-z} dt \quad (2.17)$$

Используя (2.13) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\Phi_0^+(t) - x\overline{\Phi_0^+(t)} &= \Pi^+(t) \\ \overline{\Phi_0^+(t)} - x\Phi_0^+(t) &= \Pi^-(t)\end{aligned}\quad (2.18)$$

где $\Pi^+(t)$ и $\Pi^-(t)$ — граничные значения кусочно-голоморфной функции $\Pi(z)$, определяемой следующей формулой:

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{B(t)} - B(t)}{t - z} dt \quad (2.19)$$

На основании соотношений (2.15), (2.17) и (2.18) имеем

$$\begin{aligned}\Phi_0^{+'}(t) - \frac{1+x}{nx} \Phi_0^{+'}(t) &= -\frac{x\overline{F^-(t)} + \Pi^+(t)}{nx} \\ \Phi_0^{+'}(t) + \frac{1+x}{nx} \Phi_0^{+'}(t) &= \frac{F^-(t) - \Pi^-(t)}{nx}\end{aligned}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений будет

$$\Phi_0^{+'}(t) = e^{-\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} \left[\int_0^t \frac{-x\overline{F^-(t)} - \Pi^+(t)}{nx} e^{\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} dt + c_1 \right] \quad (2.20)$$

$$\Phi_0^{+'}(t) = e^{-\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} \left[\int_0^t \frac{F^-(t) - \Pi^-(t)}{nx} e^{\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} dt + c_2 \right] \quad (2.21)$$

Учитывая, что напряжения должны исчезнуть на бесконечности, имеем

$$\Phi_0^{+'}(t) = \Phi_0^{+'}(t) = 0 \quad \text{при } t = \infty$$

Устремляя t_0 к ∞ , находим

$$c_1 = c_2 = 0$$

Функцию $\Phi_0(z)$ найдем из (2.20) и (2.21)

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_0^{+'}(t) - \Phi_0^{+'}(t)}{t - z} dt \quad (2.22)$$

Для граничных значений функции $\Phi_0(z)$ окончательно получаем

$$\Phi_0^+(t) = c \frac{2ib \frac{1+x}{nx} + x}{t + ib} - 2ibcm^2 e^{-jmt} \int_0^t \frac{e^{iat}}{t - ib} dt \quad (2.23)$$

$$\Phi_0^-(t) = \frac{c \left(1 - \frac{2bm}{x}\right)}{t - ib} - \frac{2ibc}{x(t - ib)^2} - \frac{2ibcm^2}{x} e^{-jmt} \int_0^t \frac{e^{-imt}}{t - ib} dt$$

где

$$m = \frac{1 + \nu}{z} \frac{G}{k}$$

Для касательных напряжений на контакте получаем формулу

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{2c(1+\nu)bm}{iz(t^2+b^2)} t - \frac{4b^2c(1+\nu)}{iz(t^2+b^2)^2} t + \\ & + 2bcm^2 \frac{1+\nu}{iz} \left| \cos mt \left(\int_0^t \frac{t \sin mt}{t^2+b^2} dt - b \int_0^t \frac{\cos mt}{t^2+b^2} dt \right) - \right. \\ & \left. - \sin mt \left(\int_0^t \frac{t \cos mt}{t^2+b^2} dt + b \int_0^t \frac{\sin mt}{t^2+b^2} dt \right) \right| \end{aligned}$$

Значения величины $\frac{0.4 \tau_{xy}}{mP}$ для некоторых точек границы полуплоскости при различных значениях параметра „ b “ приведены в табл. 1.

Таблица 1

t \ b	1.0	0.5	0.2	0.1
0.05	-0.0161	-0.0684	-0.4053	-1.1950
0.20	-0.0594	-0.2048	-0.4431	-1.2778
0.50	-0.0996	-0.1606	-0.0694	-0.0166
0.75	-0.0913	-0.0823	-0.0177	-0.0041
1.00	-0.0685	-0.0401	-0.0044	-0.0012
1.25	-0.0489	-0.0196	-0.0002	0.0016
1.50	-0.0330	-0.0094	0.0012	0.0016
2.00	-0.0143	-0.0015	0.0017	0.0013
3.00	-0.0019	0.0014	0.0012	0.0007
4.00	0.0007	0.0014	0.0008	0.0004
6.00	0.0010	0.0008	0.0004	0.0002
8.00	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001

Из-за отсутствия достаточно подробных таблиц интегралы были вычислены на ЭВМ „Наирн“ при помощи известных значений соответствующих интегралов в пределах от 0 до ∞ .

Вычисления с абсолютной точностью $0.5 \cdot 10^{-6}$ проводились при следующих значениях исходных параметров: коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{3}$, $k = Eh_1$, где E — модуль упругости материала полуплоскости, а $h_1 = 1.5$ ед. длины.

Для определения натяжения в точке $t = 0$, на основании (1.12), (1.7), (2.3), (2.5)–(2.8) и (2.22), имеем формулу

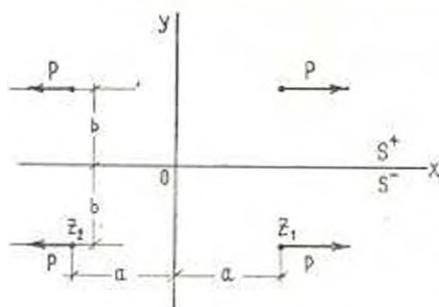
$$T = \frac{2P}{\pi\lambda} |1 + mbe^{mb} \text{Ei}(-mb)|$$

Значения величины T/P при некоторых значениях параметра „ b “ приведены в табл. 2.

Таблица 2

b	1.0	0.5	0.2	0.1
T/P	0.2219	0.2679	0.3149	0.3393

3. Рассмотрим плоское деформированное состояние упругой плоскости с бесконечным упругим прямолинейным включением при действии четырех параллельных оси x сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения (фиг. 3).



Фиг. 3.

Здесь также рассматривается только нижняя полуплоскость.

Напряжения и деформации могут быть выражены формулами (2.4) и (2.5), где неизвестные функции в этом случае имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{P}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{z-z_1} + \frac{P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_2} + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) &= \frac{\nu P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_1} - \frac{\bar{z}_1 P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{(z-z_1)^2} - \\ &\quad - \frac{\nu P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_2} + \frac{\bar{z}_2 P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{(z-z_2)^2} + \Psi_0(z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Продолжая, как и в предыдущем случае, функцию $\Phi_0(z)$ в верхнюю полуплоскость и исключая $\Psi_0(z)$, из формул (2.4), (2.5) и (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= A_1(z) = \Phi_0(z) - \Phi_0(\bar{z}) + (z-\bar{z}) \overline{\Phi_0(z)} \\ 2G(u' + iv') &= B_1(z) = \nu\Phi_0(z) + \Phi_0(\bar{z}) - (z-\bar{z}) \overline{\Phi_0(z)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$A_1(z) = c_3 \left[\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_1} + \frac{1-x}{z-z_2} - \frac{1-x}{z-z_1} + \right. \\ \left. + \frac{z-z_1}{(z-z_1)^2} - \frac{z-z_2}{(z-z_2)^2} \right]$$

$$B_1(z) = c_3 \left[\frac{x}{z-z_2} - \frac{x}{z-z_1} + \frac{1-x}{z-z_1} - \right. \\ \left. - \frac{1-x}{z-z_2} - \frac{z-z_1}{(z-z_1)^2} + \frac{z-z_2}{(z-z_2)^2} \right]$$

$$c_3 = \frac{\rho}{2\pi(1+\nu)}$$

$z_1 = a - ib$, $z_2 = -a - ib$ — точки приложения сосредоточенных сил.

Удовлетворяя условиям (2.13), на основании (3.2) имеем

$$\Phi_0^-(t) - \Phi_0^+(t) = \overline{\Phi_0^-(t)} + \overline{\Phi_0^+(t)} + n\nu\Phi_0^-(t) + n\Phi_0^+(t) = \\ = \overline{A_1(t)} - A_1(t) - nB_1(t) \quad (3.3)$$

$$\text{где } n = \frac{ik}{G}$$

Поступая аналогично предыдущему случаю, находим

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)}{t-z} dt \quad (3.4)$$

где

$$\Phi_0^+(t) = c_3 \frac{2ib(1+\nu) + \nu^2 n}{n\nu} \left(\frac{1}{t-z_1} - \frac{1}{t-z_2} \right) + \\ + 2ic_3 m (x-bm) e^{-imt} \left(\int_{\infty}^t \frac{e^{imt}}{t-z_1} dt - \int_{\infty}^t \frac{e^{imt}}{t-z_2} dt \right) \\ \Phi_0^-(t) = c_3 \left(1 + \frac{2bm}{x} \right) \left(\frac{1}{t-z_1} - \frac{1}{t-z_2} \right) + \\ + \frac{2ibc_3}{x} \left[\frac{1}{(t-z_1)^2} - \frac{1}{(t-z_2)^2} \right] + \\ + 2ic_3 m \left(1 + \frac{bm}{x} \right) e^{imt} \left(\int_{\infty}^t \frac{e^{-imt}}{t-z_1} dt - \int_{\infty}^t \frac{e^{-imt}}{t-z_2} dt \right) \\ m = \frac{1+\nu}{x} \frac{G}{k}$$

Для касательных напряжений на границе полуплоскости получаем формулу

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} = & 2bc_3 \left[\frac{2+x+\frac{bm+1}{x}+bm}{(t+a)^2+b^2} - \frac{2+x+\frac{bm+1}{x}+bm}{(t-a)^2+b^2} \right] + \\
 & + \frac{4b^3c_3 \left(1+\frac{1}{x}\right)}{[(t-a)^2+b^2]^2} - \frac{4b^3c_3 \left(1+\frac{1}{x}\right)}{[(t+a)^2+b^2]^2} - \\
 & - \frac{2c_3m(1+x)}{x} (x+bm) \left[\cos mt \right] \left[\int_0^t \frac{(t-a) \cos mt}{(t-a)^2+b^2} dt + \right. \\
 & + b \int_0^t \frac{\sin mt}{(t-a)^2+b^2} dt - \int_0^t \frac{(t+a) \cos mt}{(t+a)^2+b^2} dt - b \int_0^t \frac{\sin mt}{(t+a)^2+b^2} dt \left. \right] + \\
 & + \sin mt \left[\int_0^t \frac{(t-a) \sin mt}{(t-a)^2+b^2} dt - b \int_0^t \frac{\cos mt}{(t-a)^2+b^2} dt - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \frac{(t+a) \sin mt}{(t+a)^2+b^2} dt + b \int_0^t \frac{\cos mt}{(t+a)^2+b^2} dt \right] \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Значения $\frac{0.4 \tau_{xy}}{mP}$ для некоторых точек границы полуплоскости при $a=1$ ед. длины, вычисленные для тех же значений ν , k , b , что и в п. 2, приведены в табл. 3.

Таблица 3

t \ b	1.0	0.5	0.2	0.1	0.00
0.50	-0.0292	-0.1745	-0.1850	-0.0749	0.0917
0.75	-0.0211	-0.1898	-0.5351	-0.4473	0.1744
1.00	-0.0185	-0.1274	-0.4566	-1.0318	$-\infty$
1.25	-0.0391	-0.2011	-0.5326	-0.4388	0.1886
1.50	-0.0658	-0.2004	-0.1812	-0.0584	0.1210
2.00	-0.0728	-0.0825	0.0128	0.0259	0.0671
3.00	-0.0274	-0.0068	0.0148	0.0227	0.0305
4.00	-0.0071	-0.0033	0.0118	0.0145	0.0171
6.00	0.0011	0.0068	0.0098	0.0111	0.0072
8.00	0.0017	0.0027	0.0033	0.0035	0.0037

Для определения натяжения в точке $t=0$ при $b=0$ получаем формулу

$$T = \frac{4P}{\pi} [\sin ma \operatorname{ci}(ma) - \cos ma \operatorname{si}(ma)]$$

Результаты вычислений величины T/P приведены в табл. 4.

Таблица 4

a	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	6.00	8.00
T/P	1.4474	1.3033	1.1893	1.0957	1.0167	0.8896	0.7125	0.5936	0.4435	0.3526

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 III 1967

Կ. Ս. ՇՈԲԱՆԻԱՆ, Ա. Ս. ԽԱՇՉԻԿԻԱՆ

ԲԱՐՈՎԱԳԱՏ ՃԿՈՒՆ ՆԵՐՊՐԱԿՈՎ ԱՌՈՋԻԱԿԱՆ ՄԱՐՄՆԻ
ՀԱՐԹ ԳԵՅՈՐՄԱՑՎԱԾ ՎԻՃԱԿԸ

Ա Վ Փ Ո Վ Ն Ո Ւ Մ

Հոգվածում գիտարկվում են այն պայմանները, որոնց բախարարում են լարումների և զեֆորմացիաների սահմանային արժեքները՝ հարթ զեֆորմացիայի ենթարկված ստաձգական մարմնի բարակապատ եկան ներդրակի վրա:

Հետազոտվում են ապգազիմ, բարակապատ ներդրակով հարթված ստաձգական համաարակշռության երկու ինչդիր՝ ներդրակի նկատմամբ սիմետրիկ կիրառված կենտրոնացված ուժերի ապգեցություն սակ:

K. S. CHOBANIAN, A. S. KHACHIKIAN

ON THE PLANE DEFORMATION STATE OF THE ELASTIC
BODY WITH A THIN-WALLED FLEXIBLE INCLUSION

S u m m a r y

The conditions for limit values of the stresses and strains on a thin-walled flexible inclusion of the elastic body subjected to plane deformation are considered.

The elastic equilibrium of the infinite plane with a rectilinear thin inclusion under the action of the concentrated forces applied symmetrically to the inclusion are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухелишвили И. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
2. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, М., 1959.