

Մ. Բ. БЕЛУБЕКԿԱՆ

К ЗАДАЧЕ ОБ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ СЛЕДЕ ЗА ПЛАСТИНКОЙ

Рассматривается задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, сошедшем с продольно обтекаемой плоской пластинки и образовавшем непосредственно за ним аэродинамический след. Ранее, Голдштейном и Толмином получено решение указанной задачи в области, не превышающей половины длины пластинки за задней кромкой и в области на большом удалении от пластинки [1]. В настоящей работе делается попытка получения приближенного решения, пригодного во всей области течения жидкости.

1. Пусть пластинка длины L обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, имеющим на бесконечности скорость U_∞ . Направим ось x по пластинке, ось y — перпендикулярно к ней, а начало координат поместим в передней кромке пластинки. Уравнения пограничного слоя для данной задачи имеют вид [1]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Граничными условиями будут

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 & \text{ при } y = 0 \text{ и } 0 \leq x \leq L \\ u \rightarrow U_\infty & \text{ при } y \rightarrow \infty \text{ и } 0 \leq x < \infty \\ \frac{\partial u}{\partial y} - v = 0 & \text{ при } y = 0 \text{ и } x > L \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Будем искать решение задачи в приближении Озеена. В этом случае задача сводится к решению линейного уравнения [2]

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{x}{U_\infty} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

с граничными условиями (1.2).

Рассмотрим отдельно две задачи, связанные с решением уравнения (1.3), но с различными граничными условиями:

а) полубесконечная пластинка продольно обтекается потоком жидкости со скоростью U_∞ ;

б) жидкость покоится при $x > L$. Вдоль оси x при $x > L$ имеется распределение скорости $u_0(x)$.

Очевидно, что решение исследуемой задачи в приближении Озеена в области $x > L$ будет суммой решений указанных задач, если

возможно найти $u_m(x)$ так, чтобы удовлетворить последнему из граничных условий (1.2). Решения задач а) и б) имеют вид [2, 3]

$$u_1(x, y) = U_+ \operatorname{Erf}(\tau_1) \quad (1.4)$$

$$u_{1b}(x, y) = - \int_2^1 u_m(\xi) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} d\xi \quad (1.5)$$

где

$$\operatorname{Erf}(\tau_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_1} e^{-z^2} dz, \quad \tau_1 = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_+}{vx}} \quad (1.6)$$

$$\tau_2 = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_-}{v(x-b)}}, \quad u_1 = 1 - \operatorname{Erf}(\tau_2)$$

Используя (1.6) и условие $u_m(L) = 0$, с помощью интегрирования по частям выражение (1.5) представим в более удобной форме

$$u_{1b}(x, y) = \int_1^2 u_m(\xi) [1 - \operatorname{Erf}(\tau_2)] d\xi \quad (1.7)$$

Тогда искомое решение будет иметь вид

$$u_1(x, y) = U_+ \operatorname{Erf}(\tau_1) - \int_1^2 u_m(\xi) [1 - \operatorname{Erf}(\tau_2)] d\xi \quad (1.8)$$

Согласно последнему граничному условию (1.2) из выражения (1.8) получаем интегральное уравнение для определения неизвестной функции $u_m(x)$

$$\int_1^2 \frac{u_m(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi = \frac{U_-}{1-x} \quad (1.9)$$

решением которого будет

$$\frac{u_m(x)}{U_-} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{2L}{x} - 1\right) \quad (1.10)$$

2. Известно, что решение в первом приближении Озесна дает лишь качественное описание явления. Зададимся целью решить поставленную задачу по методу Озесна во втором приближении. Для этого необходимо решить уравнение [2]

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{v}{U_-} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (2.1)$$

с соответствующими граничными условиями (1.2).

Использование приема, описанного в предыдущем пункте (разбиение на две задачи а) и б)), дает для скорости на оси x ту же формулу (1.10), в то время как $u_2(x, y)$ определяется из следующего выражения:

$$u_2(x, y) = U \left[\operatorname{Erf}(\tau_1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tau_1 \exp(-\tau_1^2) \right] + \int_0^x u'_m(\xi) \left[1 - \operatorname{Erf}(\tau_2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tau_2 \exp(-\tau_2^2) \right] d\xi \quad (2.2)$$

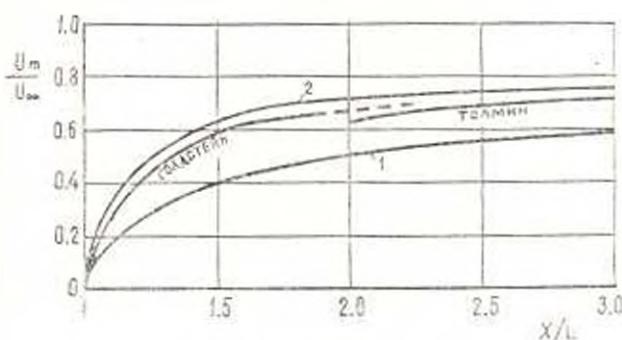
Укажем на другой способ приближенного решения поставленной задачи. Уравнение (1.1) решается точно для каждой из задач а) и б) в отдельности, а затем искомое решение представляется в виде суммы решений этих задач. И в этом случае $u_m(x)$ определяется по формуле (1.10), а для $u(x, y)$ находим

$$u(x, y) = U \varphi'(2\tau_2) + \int_0^x u'_m(\xi) [1 - \varphi'(2\tau_2)] d\xi \quad (2.3)$$

где функция φ является решением задачи Блазиуса [1].

Отметим, что приближение в методе Озесена связано с заменой точных уравнений некоторым линейным уравнением. Приближение же в последнем случае обусловлено тем, что наложением двух видов течения мы желаем получить решение нелинейной задачи.

3. На фиг. 1 приводится графическая зависимость u_m/U от x/L согласно формуле (1.10) (кривая 1). Там же приводятся кривые Голдстейна и Толмина, заимствованные из монографии А. Г. Ловцинского [1].



Фиг. 1.

Сравнение кривой 1 с кривыми Голдстейна и Толмина показывает, что формула (1.10) для распределения скорости по оси x дает качественно первую, но недостаточно точную картину. Можно уточнить формулу (1.10) для $u_m(x)$ следующим выражением:

$$\frac{u_m(x)}{L} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{2L}{x} - 1 \right) \right] \quad (3.1)$$

Кривая 2 на фиг. 1 соответствует распределению скорости по оси x согласно выражению (3.1) для $\alpha = 1$ 2. Из рисунка видно, что кривая 2 с достаточно хорошей точностью совпадает с кривыми Голдстейна и Толмина.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 VI 1965

Մ. Վ. ԲԵԼՍԵԿՅԱՆ

ՈՍԿՐ ԱԵՐՈԴԻՆԱՄԵԿԱԿԱՆ ՇԵՏՔԻ ԿԱՒԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ն Փ Ո Ւ Ա

Դիտարկված է սահմանային շերտում անսեղմելի մածուցիկ հեղուկի շարժման խնդիրը, որը անընթաց է կրկախական շրջնաձևից սալից և ստա-
ջանում է անբողիչամիկական հետք: Սահմանային շերտի համառարունները
լուծվում են հարթական մասախրուժությունների կզանակով: Որպես առաջին
մասախրուժություն բնորոշվում է Օզենի լուծումը:

Ստացված է պարզ բանաձև սալի հարթության մեջ դանդաղ առանցքի
վրա արադոսիական բաշխման համար:

Երաճիկի վրա արվում է ստացված լուծման համեմատությունը Գոլ-
դստեյնի և Տոլմինի հայտնի լուծումների հետ:

M. V. BELUBEKIAN

ON THE PROBLEM OF THE AERODYNAMIC TRAIL BEHIND THE PLATE

S u m m a r y

This paper is dedicated to the study of the boundary layer in steady, incompressible flow past a finite plate.

The formula for velocity² behind the plate, obtained by Oseen's method, is compared with the results of Goldstein and Tollmien.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лойцянский А. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, М., 1962.
2. Лойцянский А. Г. Аэродинамика пограничного слоя. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, том II. Гостехтеориздат, М., 1951.