ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 3, 1967 Механика

Р. О. АМАСЯН

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДБОР МОДЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО ИХ ДЕФОРМАТИВНЫМ СВОЙСТВАМ

Ввиду недостаточной однородности и стабильности механических свойств модельных материалов их подбор необходимо проводить по средним значениям механических характеристик с одновременным учетом вероятности их отклонений от среднего.

Методика такого рода подбора модельного материала только по одному параметру — по предельной прочности, на основе статистической теории подобия [1], разработанной академиком АН АрмССР А. Г. Назаровым, приведена в работе [2].

Настоящая работа посвящена статистическому подбору модельных материалов по их деформативным свойствам.

Как известно, подбор модельного материала по деформативным свойствам осуществляется путем максимального сближения индикаторной кривой материала модели $\varepsilon'(\sigma')$ к аффинно-преобразованной индикаторной кривой материала оригинала $\varepsilon(\sigma)$.

Однако, так как $\varepsilon'(\sigma')$ и $\varepsilon(\sigma)$ вследствие неоднородности материалов являются случайными функциями, то установить подобие единичными испытаниями контрольных образцов из материалов оригинала и модели возможно лишь весьма неточно. При этом допускаемая ошибка тем больше, чем больше неоднородность материалов модели и оригинала.

Сущность статистического подбора модельного материала по деформативным свойствам заключается в том, что здесь сравнению подлежат не единичные экземпляры контрольных образцов из материалов модели и оригинала, а серии контрольных образцов модели и оригинала. Они считаются подобными, если средние значения функции деформации и корреляционные моменты удовлетворяют соответственно условиям

$$\overline{\varepsilon'(\beta\sigma)} = \gamma\overline{\varepsilon(\sigma)}$$

$$K_{\varepsilon'}(\beta\sigma_i, \beta\sigma_j) = \gamma K_{\varepsilon}(\sigma_i, \sigma_j) \tag{1}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots$$

где β и γ — множители подобия соответственно для напряжения и деформаций.

Условие (1) приемлемо в тех случаях, когда в результате испытания контрольных образцов получают полную индикаторную кривую. Однако, в большинстве случаев случайные функции $\varepsilon'(\sigma')$ и $\varepsilon(\sigma)$ не записываются непрерывно, а регистрируются через определенные интервалы их значения для $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$. Так как случайные функции и фиксированных значениях аргумента превращаются в обычную случайную величину, то результаты испытания образцов в данном случае представляют собой систему m случайных величин

$$\varepsilon(\sigma_1), \quad \varepsilon(\sigma_2), \cdots, \varepsilon(\sigma_m)$$

Это приводит к тому, что вместо случайных функций $\varepsilon'(\sigma')$ и $\varepsilon(\sigma)$ следует варьировать со случайными векторами

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}$$

Тогда условия статистического подобия между материалами модели и оригинала при множителях подобия β и γ представляются в виде

$$\begin{pmatrix} \overline{\varepsilon'_1} \\ \overline{\varepsilon'_2} \\ \vdots \\ \overline{\varepsilon'_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\overline{\varepsilon}_1 \\ \gamma\overline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \gamma\overline{\varepsilon}_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$K'_\varepsilon(\beta\sigma_i, \beta\sigma_j) = \gamma^2 K_\varepsilon(\sigma_i, \sigma_j)$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, m$$

Здесь корреляционные моменты K'_ε и K_ε составляют симметричные корреляционные матрицы m-степени, в главных диагоналях которых расположены дисперсии значений деформации.

В настоящей работе, исходя из условий статистического подобия (2), рассматривается задача статистического моделирования легкого бетона марки М-160 легким бетоном марки М-50 по их деформативным свойствам.

Поставленная задача приводится к установлению статистического подобия между бетонными призмами двух серий указанных марок при множителях подобия $\beta = 0.33$, $\gamma = 1.07$. Предполагая, что легкие бетоны марки 160 и 50 имеют одинаковые плотности, т. е. множитель подобия для плотности $\delta = 1$, для линейного множителя α получим

$$\alpha = \beta/\delta = 0.33$$

Принимая характерный размер контрольных призм оригинала $l = 45$ *см*, соответствующий призме размерами ($45 \times 15 \times 15$ *см*), для характерного размера контрольных призм модели получим

$$l' = \alpha l = 15 \text{ см}$$

Такому значению l' соответствует призма размерами ($15 \times 5 \times 5$ *см*).

Опытные призмы указанных размеров в количестве 36 штук каждой серии изготовлялись из легкого бетона на туфовом песке и щебне. Составы бетонов обеих серий, подобранные в соответствии с их проектируемой маркой, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Размеры призм *см*	Проектируемая марка бетона *кг/см²*	Состав бетона по весу	Расход материала на 1 *м³* бетона в *кг*				В/Ц	γ *т/м³*
			цемент	песок	щеб.	вода		
45×15×15	160	1:0.9:1.5	443	404	672	365	0.54	1.889
15×5×5	50	1:2.7:4.5	176	480	797	365	1.66	1.819

Для снятия деформативных свойств все призмы подвергались центральному одноосному сжатию. Испытание производилось ступенчатым нагружением образцов и измерением продольных деформаций после каждой ступени нагрузки, составляющих примерно 0.1 от предела прочности бетона.

Измерение деформации проводилось с помощью тензодатчиков, закрепленных на двух противоположных гранях призмы.

Результаты испытания призм обеих серий после первичной статистической обработки представлены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

№№ реализации	$\varepsilon_1 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_3 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_4 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_5 \cdot 10^{-5}$
1	5.2	21.5	44.9	71.1	97.8
2	7.0	25.0	47.2	73.2	102.9
3	8.1	27.8	49.8	78.4	111.4
4	8.4	29.0	52.1	80.5	117.0
5	10.5	33.0	59.5	90.1	123.0
6	10.3	31.2	56.5	85.0	119.1
7	11.0	35.5	62.5	92.4	126.3
8	11.8	27.0	65.0	98.0	132.6
9	5.4	23.6	45.4	70.4	99.9
10	7.0	25.4	47.0	72.1	102.4
11	7.8	27.1	49.0	76.4	110.6
12	9.0	29.2	50.9	80.1	118.4
13	10.5	33.0	60.0	90.5	125.8
14	9.5	30.1	54.5	83.2	119.8
15	11.1	35.5	60.5	99.1	128.0
16	12.0	27.0	63.2	94.6	135.5
17	7.0	25.4	48.1	71.6	104.6
18	7.8	27.3	48.8	76.5	111.0
19	8.7	28.8	52.2	81.0	118.0
20	10.3	30.8	54.8	88.8	125.0
21	10.0	31.0	56.3	84.2	119.8
22	10.4	32.2	60.7	89.8	127.5
23	8.3	28.1	49.6	78.6	112.6
24	9.0	29.0	50.8	80.6	117.2
25	10.5	33.9	59.1	90.4	125.5
26	10.3	31.8	56.1	87.7	121.8
27	9.0	28.4	52.5	80.2	117.1
28	9.0	29.0	53.0	81.7	119.8
29	7.3	25.9	48.4	75.6	109.9
30	8.9	26.7	49.0	77.0	112.2
31	9.0	27.2	49.0	76.0	108.8
32	10.0	31.0	54.5	82.6	119.0
33	9.9	32.2	56.5	88.4	124.0
34	8.9	27.9	49.9	79.3	114.0
35	8.9	29.0	51.2	80.0	116.2
36	9.5	30.5	52.6	82.5	116.0

Таблица 3

№№ реализации	$\varepsilon_1'\cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_2'\cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_3'\cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_4'\cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_5'\cdot 10^{-5}$
1	6.5	18.5	42.5	70.6	117.0
2	6.9	18.2	42.8	74.4	124.0
3	6.8	18.1	43.1	74.6	126.0
4	6.8	22.0	46.7	67.0	117.0
5	6.2	23.0	44.5	73.0	125.0
6	7.1	24.6	46.0	76.2	132.0
7	5.5	18.0	36.0	60.5	88.0
8	5.8	20.4	40.5	66.0	102.0
9	6.0	22.1	45.6	74.2	103.0
10	5.5	18.2	39.6	60.9	90.5
11	8.1	26.3	48.1	77.2	114.0
12	9.0	28.0	52.0	88.5	139.0
13	5.5	18.5	37.4	58.5	99.3
14	6.6	23.2	45.2	73.6	126.5
15	7.0	23.0	45.0	73.0	126.0
16	6.2	18.7	42.2	70.2	118.0
17	4.9	18.4	37.3	60.3	95.5
18	6.0	18.1	41.6	69.3	117.0
19	6.0	23.0	45.5	73.0	126.0
20	7.2	25.2	46.3	75.5	134.0
21	7.5	23.0	45.0	73.5	126.0
22	5.2	18.6	38.6	61.2	98.6
23	7.1	22.5	44.8	72.6	128.0
24	7.5	25.0	48.0	79.0	134.0
25	6.5	22.4	44.1	71.4	126.5
26	5.0	18.0	37.2	59.7	90.5
27	5.0	18.5	36.7	60.5	90.5
28	5.2	18.9	38.3	63.0	95.0
29	6.7	23.5	45.0	73.5	126.0
30	6.5	23.6	45.4	73.3	128.0
31	5.0	19.0	36.9	61.1	94.8
32	5.2	18.9	37.6	61.4	98.2
33	7.0	23.0	45.5	73.5	126.5
34	6.5	22.7	44.7	73.7	124.6
35	7.1	23.8	46.1	78.1	133.6
36	7.5	24.0	46.5	77.0	132.0

Как видно из этих таблиц, случайные функции $\varepsilon(\sigma)$ и $\varepsilon'(\sigma')$ сведены к системам по пяти случайным величинам, отвечающим соответственно сечениям

$$\sigma = 12\ \textit{кг/см}^2,\quad 36\ \textit{кг/см}^2,\quad 60\ \textit{кг/см}^2,\quad 84\ \textit{кг/см}^2,\ 108\ \textit{кг/см}^2$$

$$\sigma' = \tfrac{1}{3}\sigma = 4\ \textit{кг/см}^2,\quad 12\ \textit{кг/см}^2,\quad 20\ \textit{кг/см}^2,\quad 20\ \textit{кг/см}^2,\quad 36\ \textit{кг/см}^2$$

Многомерный статистический анализ этих случайных величин сводился к нахождению оценок подходящих значений средних векторов и корреляционных матриц.

Оценка среднего вектора и корреляционной матрицы осуществлялась по формулам:

для среднего вектора

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{r=1}^{N}\varepsilon_{1r} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{r=1}^{N}\varepsilon_{5r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_5 \end{pmatrix}$$

для корреляционной матрицы

$$\bar{K} = \frac{1}{N-1} A = \frac{1}{N-1} \left| \sum_{r=1}^{N} (\varepsilon_{ir} - \bar{\varepsilon}_i)(\varepsilon_{jr} - \bar{\varepsilon}_j) \right|$$

$$i,\ j = 1,\ 2, \cdots,\ 5$$

где N — объем выборки.

Вычисления привели к следующим результатам:

$$\bar{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} 8.1 \cdot 10^{-3} \\ 26.7 \cdot 10^{-3} \\ 48.5 \cdot 10^{-3} \\ 90.4 \cdot 10^{-3} \\ 129.9 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \qquad \gamma\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 9.8 \cdot 10^{-3} \\ 29.2 \cdot 10^{-3} \\ 58.9 \cdot 10^{-3} \\ 81.6 \cdot 10^{-3} \\ 119.0 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_{\varepsilon'} = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.0 & 3.5 & 5.2 & 7.5 \\ 2.0 & 8.1 & 9.9 & 13.9 & 32.8 \\ 3.5 & 9.9 & 15.8 & 23.4 & 48.2 \\ 5.2 & 13.9 & 23.4 & 41.6 & 93.2 \\ 7.5 & 32.8 & 48.2 & 93.2 & 222.1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2\bar{K}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1.9 & 3.3 & 4.2 & 4.8 & 5.2 \\ 3.3 & 9.9 & 10.8 & 11.6 & 39.1 \\ 4.2 & 10.8 & 12.4 & 27.2 & 55.6 \\ 4.8 & 11.6 & 27.2 & 32.9 & 95.3 \\ 5.2 & 39.1 & 55.6 & 95.3 & 186.3 \end{pmatrix}$$

Сопоставляя оценки средних векторов и корреляционных матриц сравниваемых серий можно установить между ними некоторое различие. Означает ли это, что условие статистического подобия (2) нарушено или различие выборочных средних векторов и корреляционных матриц носит чисто случайный характер?

Ответ на этот вопрос мы получим путем проверки гипотезы:

$$H:\quad \bar{\varepsilon}' = \gamma\bar{\varepsilon},\quad K_{\varepsilon'} = \gamma^2 K_{\varepsilon}$$

Отношением правдоподобия для проверки гипотезы H, согласно предложению Бартлетта, является величина [3]

$$V = \frac{\prod_{g=1}^{2} |A_g|^{\frac{1}{2} n_g}}{|B|^{\frac{1}{2} n}}$$

где

$$B = A + \sum_{g=1}^{2} N_g (\bar{\varepsilon}_i^{(g)} - \bar{\varepsilon})(\bar{\varepsilon}_j^{(g)} - \bar{\varepsilon}) \qquad i,\ j = 1,\ 2, \cdots, 5$$

$$n_g = N_g - 1$$

$$n = \sum_{g=1}^{2} n_g,$$

g — номер выборки, $g = 1.2.$

Для получения критической области, в которой гипотеза H подтверждается, необходимо иметь функцию распределения V. Для ее определения воспользуемся теорией асимптотических разложений функции распределения случайной величины Бокса [4].

Вместо случайной величины V введем случайную величину W

$$W = Vn^{\frac{1}{2}mn} \prod_{g=1}^{2} n_g^{-\frac{1}{2}mn_g}$$

Асимптотическое разложение функции распределения величины $-2\rho \ln W$ имеет вид

$$P\{-2\rho \ln W < z\} = P\{\chi_f^2 < z\} + \omega_2[P\{\chi_{f+4}^2 < z\} - P\{\chi_f^2 < z\}] + 0(n^{-3}) \qquad (3)$$

где f — число степеней свободы

$$f = \frac{1}{2} m (m + 3)$$

ρ и ω_2 — постоянные коэффициенты, определяемые соответственно по формулам:

$$\rho = 1 - \left(\sum_{g=1}^{2} \frac{1}{n_g} - \frac{1}{n}\right) \frac{2m^2 + 3m - 1}{6(m + 3)} - \frac{m}{n(m + 3)}$$

$$\omega_2 = \frac{m}{288\rho^2} \Bigg[6\left(\sum_{g=1}^{2} \frac{1}{n_g^2} - \frac{1}{n^2}\right)(m^2 - 1)(m + 2)$$

$$- \left(\sum_{g=1}^{2} \frac{1}{n_g} - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{(2m^2 - 3m - 1)^2}{m + 3} -$$

$$- 12\left(\sum_{g=1}^{2} \frac{1}{n_g} - \frac{1}{n}\right) \frac{(2m^2 + 3m - 1)m}{n(m + 3)} - 36 \frac{m^2}{n^2(m + 3)} - 24 \frac{1}{n}(1 + m)^2 \Bigg]$$

В результате вычислений для f, ρ, ω_2 и $-2\rho \ln W$ получены следующие значения: $f = 20$, $\rho = 1.2$, $\omega_2 = 0.0032$, $-2\rho \ln W = 11.74$.

Так как ω_2 мало, то, исходя из (3), можно считать, что $-2\rho \ln W$ имеет χ^2-распределение с 20 степенями свободы. Для 10%-го уровня значимости критическое значение χ^2 с 20 степенями свободы равно 12.44, что больше, чем полученное значение для $-2\rho \ln W$. Следовательно, гипотеза о равенстве средних векторов и корреляционных матриц не опровергается.

Вывод: статистическое подобие между легкими бетонами марки М-160 и М-50 по их деформативным свойствам установлено.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
АН Армянской ССР

Поступила 20 IX 1966

Ռ. Հ. ՀԱՄԱՍՅԱՆ

ՄՈԴԵԼԱՑՄԱՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՍՏԱՏԻՍՏԻԿԱԿԱՆ ԸՆՏՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԸՍՏ ԻՐԵՆՑ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերված է մոդելացման նյութերի ստատիստիկական ընտրության մեթոդիկան ըստ իրենց դեֆորմացիոն հատկության: Մասնավորապես դիտարկվում է M-160 մարկայի թեթև բետոնի ստատիստիկական մոդելացման խնդիրը M-50 մարկայի թեթև բետոնով:

Բետոնյա նմուշների երկու սերիաները, որոնց չափսերը, բաղադրությունները և քանակները բերված են 1-ին աղյուսակում, ենթարկված են մեկ առանցքային սեղմման:

Փորձարկումներից ստացված արդյունքների (աղյուսակներ 2, 3) ստատիստիկական մշակումը հանգել է դեֆորմացիաների հնգաչափ միջին վեկտորների և կոռելյացիոն մատրիցաների որոշմանը: Այնուհետև, համեմատվող սերիաների միջին վեկտորների և կոռելյացիոն մատրիցաների հավասարության հիպոթեզը հաստատելուց հետո, կատարված է եզրակացություն երկու տարբեր մարկայի թեթև բետոնների միջև ստատիստիկական նմանության հաստատման մասին:

R. H. HAMASSIAN

THE STATISTIC CHOICE OF MODEL MATERIALS ACCORDING TO THEIR PROPERTIES OF DEFORMATION

S u m m a r y

The method of choosing model materials according to their properties of deformation is given. Particularly, the problem of replacing light concrete M—160 by M 50 is studied.

The two series of concrete samples, the measure, composition and quantity of which we see in table 1, are submitted to one axial compression.

The statistic treatment of the results of experiments, (tables 2, 3) ended with quintuple average vectors of deformation and the correlation of matrixes. Then after having proved the hypothesis of the average vectors and the correlation of matrixes; for these two compared series, a conclusion was made on the statistic resemblance of both kinds of light concretes.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Назаров А. Г.* О механическом подобии твердых деформируемых тел. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1965.

2. *Амасян Р. О.* Подбор модельных материалов по подобию в статистическом смысле. Докл. АН АрмССР, т. 42, № 5, 1966.
3. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. Физматгиз, М., 1963.
4. *Box G. E. P.* A general distribution theory for a class of likelihood criteria. Biometrika, 36, 1949.