

В. Т. ГЛУШКО, А. Н. ЗОРИН, М. И. РОЗОВСКИЙ

## О ФУНКЦИЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

В настоящее время на глубоких шахтах Донбасса многие капитальные выработки крепятся жесткими монолитными железобетонными и бетонными креплениями, не обладающими конструктивной податливостью, но имеющими плотный контакт с окружающими горными породами. Известно, что работа крепи, а следовательно, и эффективность поддержания выработки в эксплуатационном состоянии, и, основываясь, зависит от величины и характера прикладываемых нагрузок.

Существующие методы предрасчета нагрузок на крепи не учитывают фактора времени и анизотропии, что приводит к определенным погрешностям и не позволяет определять нагрузки в течение всего срока существования выработки.

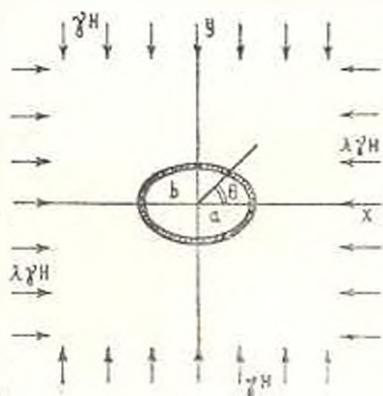
В связи с этим возникает необходимость решения задачи, позволяющей получить зависимости, определяющие нагрузки на жесткие крепи с учетом основных влияющих на них факторов.

Задача ставится следующим образом. В анизотропном горном массиве, деформированное состояние которого описывается уравнением наследственной теории ползучести [1], на глубине  $H$  от дневной поверхности пройденная горизонтальная выработка в форме эллиптического или круглого цилиндра, закрепленная по всей поверхности. Требуется определить давление на крепь (фиг. 1).

Решая задачу, примем следующие допущения и ограничения: горный массив является однородным; горные породы обладают частным видом анизотропии — являются трансверсально-анизотропными; крепь выработки является абсолютно жесткой. Задача решается, как плоская.

Отличительной особенностью задачи в указанной постановке является то, что фактор времени и анизотропия учитываются совместно.

Задача решается путем привлечения методов механики сплошных сред — теории упругости анизотропного тела и наследственной теории



Фиг. 1.

получести, в частности принципа Вольтерра, сущность которого сформулирована Ю. Н. Работновым [1].

Выражение для нормального давления на жесткую крепь, полученное в работе [2], в упругой постановке имеет вид

$$z_n = \frac{\gamma H}{2l_2} \{ f n [g_1 z_{12} C (1 + \cos 2\theta) - g_2 z_{11} k C (1 - \cos 2\theta)] + f [g_2 (z_{12} k + z_{22}) (1 + \cos 2\theta) - g_1 C^2 (z_1 k - z_{22}) (1 - \cos 2\theta)] - \gamma (1 + \cos 2\theta) - C^2 (1 - \cos 2\theta) \} \quad (1)$$

Здесь

$$f = \frac{z_{11}}{k (z_{11} z_{22} - z_{12}^2 - g) z_{11} z_{1''}}, \quad k^2 = \frac{E_1 - \nu_1^2}{E_2 - \nu_2^2}$$

$$n = \frac{1}{2k - m}, \quad m = \frac{E_1 G_2 - 2\nu_2 (1 - \nu_1)}{1 - \nu_1}$$

$$g = \frac{E_2}{G_2}, \quad z_{11} = 1 - \nu_1^2, \quad z_{12} = -\nu_2 (1 - \nu_1)$$

$$z_{22} = \frac{E_1}{E_2} - \nu_2^2, \quad z_1 = \lambda - \frac{\nu_2}{1 - \nu_1}, \quad z_2 = k^2 - \lambda \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \quad (2)$$

$E_1$  — модуль упругости для всех направлений в плоскости изотропии,

$E_2$  — модуль упругости для направлений, перпендикулярных к плоскости изотропии,

$\nu_1$  — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, нормальном к плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости,

$\nu_2$  — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении плоскости изотропии при растяжении по нормали к этой плоскости,

$E$  — модуль упругости для изотропной среды,  $\gamma$  — объемный вес породы,  $G_2$  — модуль сдвига для плоскостей, перпендикулярных к плоскости изотропии.

При этом,

$$G_2 = \frac{1}{\frac{4}{E_1} - \frac{1 - 2\nu_1}{E_1} - \frac{1}{E_2}} \quad (3)$$

$E_1^{45}$  — модуль Юнга при сжатии под углом 45° к плоскости изотропии,

$C = \frac{a}{b}$ ,  $a$  и  $b$  — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса,

$\gamma$  — средневзвешенный объемный вес пород горного массива,

$H$  — глубина расположения выработки,

$\lambda = \frac{\nu_2}{1 - \nu_1}$ ,  $\theta$  — полярная координата.

Как показали многочисленные исследования реологических свойств анизотропных материалов [2], [3], [4], наиболее важным является случай, когда влияние ползучести проявляется лишь при сжатии под углом  $45^\circ$  к плоскости изотропии. Здесь принимается, что все упругие константы, кроме  $E_1$  остаются постоянными. Поэтому, согласно принципу Вольтерра, в формуле (3) следует вместо константы  $E_1$  подставить оператор

$$E_1 = E_1 [1 - \alpha \mathcal{D}^{\beta}(-\beta)] \quad (4)$$

где  $\mathcal{D}^{\beta}(-\beta)$  — интегральный оператор, действующий на некоторую функцию времени  $\varepsilon(t)$ , или постоянную

$$\mathcal{D}^{\beta}(-\beta)\varepsilon(t) = \int_0^t \mathcal{D}_{\beta}(-\beta, t, s)\varepsilon(s) ds \quad (5)$$

здесь  $E_1$  — упруго-мгновенный модуль, отвечающий  $E_1$ ,

$\alpha$  и  $\beta$  — реологические характеристики горной породы,

$\mathcal{D}_{\beta}(-\beta, t, s)$  — ядро наследственности (функция воздействия) типа Ю. Н. Работнова [1]

$$\mathcal{D}_{\beta}(-\beta, t-s) = (t-s)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-s)^{\alpha(n-1)}}{\Gamma[(\alpha-1)(1-\alpha)]} \quad (6)$$

Величины  $E_1$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из экспериментальных кривых релаксации или ползучести при сжатии образца под углом  $45^\circ$  к плоскости изотропии.

Анализ формул (1) и (2) показывает, что вся трудность заключается в расшифровке выражения  $\bar{f}$  и. Здесь черточка сверху обозначает пременной оператор. При этом

$$\bar{G}_z = \frac{4}{E} \left( \frac{1-2\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (7)$$

где оператор  $E$  имеет вид (4). Все остальные величины постоянные.

Пользуясь фундаментальным свойством  $\mathcal{D}$ -операторов, установленным Ю. Н. Работновым:

$$\frac{1}{1 - \alpha \mathcal{D}^{\beta}(-\beta)} = 1 + \alpha \mathcal{D}^{\beta}(-\beta) \quad (8)$$

преобразуем выражение для  $\bar{f}$  в виду

$$\bar{f} = f_0 [1 - \alpha \mathcal{D}^{\beta}(-\beta)] \quad (9)$$

где

$$\nu_1 = \nu_2, \quad \beta = \alpha(1-\alpha), \quad \alpha = \frac{4kE_2 f_0}{E_1} \sqrt{\frac{\nu_2}{E_2}}$$

$$f_0 = \frac{x_{11}}{kz_0} \quad (10)$$

$$\gamma_0 = 2z_0^2 z_1 - z_1^2 - \left( \frac{4E_{10}}{E_{10}} - 1 - 2v_{10} - \frac{E_{14}}{E_{10}} \right) k \overline{x_{11} z_1} \quad (11)$$

Второй множитель операторного выражения / n имеет вид

$$\bar{n} = 1 \overline{2k - m} \quad (12)$$

где

$$\bar{m} = \frac{E_1 - 2v_1(1 - v_1)}{1 - v_1} \quad (13)$$

После преобразования выражения (13) получим

$$\bar{m} = m \left[ 1 - \frac{4E_{10} x'}{E_1 (1 - v_1) m_0} \Theta_1'(x - \beta) \right] \quad (14)$$

где

$$m = \frac{\frac{4E_{10}}{E_1} - E_{10} \left( \frac{1 - 2v_1}{E_1} - \frac{1}{E_1} \right) - 2v_1(1 - v_1)}{1 - v_1} \quad (15)$$

Тогда

$$n = \left| 2k - m_0 - \frac{4vE_{10}}{E_1(1 - v_1)} \Theta_1'(x - \beta) \right| \quad (16)$$

$$\bar{n} = 1 \overline{k - 1 - x \Theta_1(-\beta)} \quad (17)$$

Здесь

$$\beta = \beta - x, \quad h = 2k - m, \quad x' = \frac{4vE_{10}}{E_1(1 - v_1) n}, \\ h - n;$$

Следовательно,

$$\bar{n} = n_0 [1 - x' \Theta_1'(-\beta)] = n_0 \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x'^n \Theta_1^n(-\beta) \right] \quad (18)$$

Здесь  $(-1)!! = 1$ .

Рассмотрим произведение операторов

$$\begin{aligned} \bar{f} \bar{n} &= f_0 n_0 [1 - x' \Theta_1'(-\beta)] \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x'^n \Theta_1^n(-\beta) \right] = \\ &= f_0 n_0 \left[ 1 - x_1 \Theta_1'(-\beta) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x_1^n \Theta_1^n(-\beta) \right] = \\ &= x_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x_1^n \Theta_1^n(-\beta) \Theta_1'(-\beta) \end{aligned} \quad (19)$$

Используя полученное в работе [5] выражение оператора

$$\mathcal{E}_i^n(-\beta') = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \mathcal{E}_i(-\beta')}{\partial \beta'^{n-1}} \quad (20)$$

равенство

$$\mathcal{E}_i(-\beta_1) \mathcal{E}_i^n(-\beta') = \frac{\mathcal{E}_i(-\beta_1)}{(\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i-1}} \frac{\partial^{i-1} \mathcal{E}_i(-\beta')}{\partial \beta'^{i-1}} \quad (21)$$

полученное на основе использования фундаментального свойства  $\mathcal{E}_i^n$ -операторов методом математической индукции, а также выражение  $\mathcal{E}_i^n$ -оператора через функцию Миттаг-Леффлера [6], приходим к следующим равенствам:

$$\mathcal{E}_i^n(-\beta') 1 = \frac{1}{\beta_1^n} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \beta'^{n-1}} \left( \frac{E_{1-n}(-\beta' t^{1-n})}{\beta'} \right) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(-\beta_1) \mathcal{E}_i^n(-\beta') 1 &= \frac{1 - E_{1-n}(-\beta_1 t^{1-n})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1} \beta_1} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i-1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta'^{i-1}} \left( \frac{E_{1-n}(-\beta' t^{1-n})}{\beta'} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

Равенство (21) можно преобразовать, перейдя к пределу при  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_1 \beta'^n} &= \frac{1}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta'^{i-1}} \left( \frac{1}{\beta'} \right) = \\ &= \frac{1}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1} \beta_1} \quad (24) \end{aligned}$$

Следовательно, представление (23) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(-\beta_1) \mathcal{E}_i^n(-\beta') 1 &= \frac{1}{\beta_1 \beta'^n} - \frac{E_{1-n}(-\beta_1 t^{1-n})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i-1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta'^{i-1}} \left( \frac{E_{1-n}(-\beta' t^{1-n})}{\beta'} \right) \quad (25) \end{aligned}$$

Возвращаясь к произведению операторов  $\bar{f}_n$ , с учетом (22)–(25) получим

$$\begin{aligned} \bar{f}_n &= f_{\sigma n_0} \left| 1 - \frac{x_1}{\beta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \left( \frac{x'}{\beta'} \right)^n - \right. \\ &- \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{x_1}{\beta_1} \left( \frac{x'}{\beta'} \right)^n + \frac{x_1}{\beta_1} E_{1-n}(-\beta_1 t^{1-n}) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} z^n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \beta_1^{n-1}} \left( \frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1' t^{1-\alpha})}{\beta_1'} \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x_1 z^n \left| \frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \right. \\
 & \left. - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta_1^{i-1}} \left( \frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1' t^{1-\alpha})}{\beta_1'} \right) \right| \quad (26)
 \end{aligned}$$

Как известно [7], для функции Миттаг-Леффлера существует следующее асимптотическое представление для достаточно больших  $z$ :

$$E_{1-\alpha}(1-z) = \frac{1}{z \Gamma(\alpha)} \quad (27)$$

$$E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha}) = \frac{1}{\beta_1 t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \quad (28)$$

Тогда, выражение в квадратных скобках последнего слагаемого равенства (26) можно упростить

$$\begin{aligned}
 & \frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta_1^{i-1}} \left( \frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1' t^{1-\alpha})}{\beta_1'} \right) = \\
 & = \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \left| \frac{1}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1'} \right) \right| = \\
 & = \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \left| - \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^n} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1'} \right) \right| \quad (29)
 \end{aligned}$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^n} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1'} \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta_1'} \left( \frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) \quad (30)
 \end{aligned}$$

Исходя из (28)–(30), преобразуем выражение (26) к следующему виду

$$\begin{aligned}
 & \bar{f}^n = f_0 a_0 \left| \left( 1 - \frac{t_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{x}{\beta_1'}} + \frac{x_1}{\beta_1' t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{\partial}{\partial \beta_1'} \left( \frac{1}{\beta_1'^n} \right) z^n - \right. \\
 & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x_2 z^n \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \left| \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_1'} \left( \frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) \right| \right| \quad (31)
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_n &= f_0 n_0 \left\| \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 - \frac{z_1}{\beta_1}} - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{z_1}{\beta_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1^n}{\beta_1^n} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1}{\beta_1} \frac{z_1^{n-1}}{\beta_1^{n-1}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1}{\beta_1} \frac{z_1^{n-1}}{\beta_1^{n-1}} \right\| = \\
 &= f_0 n_0 \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} - \\
 &\quad - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{z_1}{\beta_1} \right) \left| 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1^n}{\beta_1^n} \right| + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left| \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1^n}{\beta_1^n} \right| = \\
 &= f_0 n_0 \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} \quad (32)
 \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_n &= f_0 n_0 \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( 1 + \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 (\bar{f}_n)_{\infty} &= f_0 n_0 \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z'}{\beta_1}} \\
 (\bar{f})_{\infty} &= f_0 \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right)
 \end{aligned}$$

$$(\bar{n}) = n_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{z'}{z''}} \right] \quad (34)$$

Для определения нагрузок на крепь в любой момент существования горной выработки следует для этого момента вычислить выражение (33) и, подставив его в формулу (1), получить искомые величины.

Конечные установившиеся величины нагрузок могут быть определены из выражения

$$\begin{aligned} z_{11} = & \frac{\gamma H}{2l^2} \left[ f_0 n_0 \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \right] \left[ \sqrt{1 - \frac{z'}{z''}} [z_1 z_{12} C (1 + \cos 2\theta) + \right. \\ & \left. + g_2 z_{11} k C (1 - \cos 2\theta)] + f_0 \left( 1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) [z_2 (z_{12} k + z_{22}) (1 + \cos 2\theta) + \right. \\ & \left. + g_1 C^2 (z_{12} k + z_{22}) (1 - \cos 2\theta)] + (1 + \cos 2\theta) + C^2 (1 - \cos 2\theta) \right] \quad (35) \end{aligned}$$

Анализ зависимостей (33) и (1) показал, что нагрузки на жесткую крепь, в основном, зависят от глубины расположения выработки, времени ее существования, а также от упругих ( $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, C_1$ ) и реологических ( $\nu'$  и  $\nu''$ ) характеристик вмещающих пород и от их анизотропии, которая характеризуется параметрами ( $k$  и  $m$ ). (Упругие и реологические характеристики и анизотропные свойства горных пород определяются в лабораторных условиях).

При прочих равных условиях с увеличением глубины расположения выработки нагрузки на крепь увеличиваются.

В породах с затухающей ползучестью нагрузки на жесткие крепи с течением времени увеличиваются, однако небеспрельдно и при  $t \rightarrow \infty$  имеют конечную величину, определяющуюся выражением (35).

Днепропетровский горный институт

Поступила 15 VII 1960

Չ. Տ. ՂՈՐԵՊՈՒ, Ա. Ն. ՉՈՐԵՆ, Ա. Ի. ԹՈՉՈՂՈՎՈՒ

ՀԱՍՏՈՒԿ ՕՊԻԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՖՈՆԵՆՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆԵՂՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄԵՐԱՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՄՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱՆՅ ԿԵՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո ւ լ ի ս լ լ

Ընտեղրալա-օպերատորային մեթոդի փման վրա ժառանգականութեան ախի ֆիզիկական կառավարութեան առկայութեան դեպքում, գիտարկվում են հատուկ սեռչղրական օպերատորների ֆունկցիաների կիրառութեանը կոշա էլիպտական ներղրվածքով տրանսվերսոլ-իպոտրոպ ասիլ բարձրածային և դեֆորմացիոն փնակների սրոշման խնղրում: Նշված խնղրը մոզուրացնում է լոննային ապատանանուծամբացում սիստեմը, լեռնային ապատի սողքի դեպքում:

V. T. GLUSHKO, A. N. ZORIN, M. I. ROZOVSKY

ON FUNCTIONS OF SPECIAL OPERATORS AND  
THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF CREEP  
OF ANISOTROPIC SOLIDS

## S u m m a r y

A method of integral operators and initial physical dependences are used to examine functions of special rheological operators applied in the problem of a stressed plate with an elliptical inclusion, modeling thus an excavation-timbering system during rock creep.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Работина Ю. И. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
2. Алексеев С. Г. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения. Тр. по попр. горн. давления, продвижения горных пород и методики маркшейдерских работ ВНИИ, сб. 45, 1962.
3. Брылякин Г. И. К расчету на ползучесть пластин из стеклопластиков. Ж. прикл. механ. и техн. физ., № 1, 1963.
4. Колтунов М. А., Бесухов В. Н. Анализ ползучести анизотропного стеклопластика. Вестник МГУ, серия матем. и мех., № 5, 1963.
5. Розовский М. И. Об одной степени сложности функционального оператора и его приложение к решению упруго-последовательных динамических задач. Сб. "Ползучесть и длительная прочность", СО АН СССР, 1963.
6. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-последовательных сред. Изв. АН СССР, мех. и маш., № 2, 1961.
7. Розовский М. И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1959.