

М. А. ЗАДОЯН

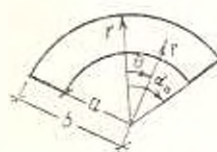
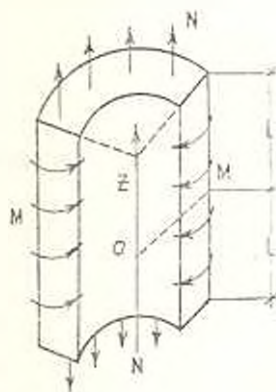
ПОЛЗУЧЕСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ, ПОДВЕРГНУТОГО ПОПЕРЕЧНОМУ ИЗГИБУ И ПРОДОЛЬНОМУ РАСТЯЖЕНИЮ

Рассматривается ползучесть цилиндрического слоя, находящегося под совместным воздействием равномерно распределенных изгибающих моментов M , действующих в осевых сечениях $\varphi = \pm \pi$, и растягивающих продольных сил N , приложенных на торцах $z = \pm l$ (фиг. 1). В первом параграфе полуобратным способом дано решение задачи для случая установившейся ползучести и степенного закона упрочнения [1]. Во втором параграфе получено решение задачи для неуставившейся, а именно, наследственной теории ползучести [2]. Аналогичная задача для идеально-жесткопластического несжимаемого материала решена в нашей работе [3].

§ 1. Установившаяся ползучесть. Общие уравнения теории установившейся ползучести в цилиндрических координатах имеют вид:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_r - \sigma_z}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

соотношения между компонентами напряжений и скоростями деформаций [1]

$$\dot{\epsilon}_r - \epsilon = f(\dot{\epsilon}_i) \dot{\epsilon}_r, \quad \dot{\epsilon}_{r\theta} = f(\dot{\epsilon}_i) \dot{\epsilon}_{r\theta}, \quad (r, \theta, z), \quad (1.2)$$

зависимость между интенсивностями напряжений и скоростями деформаций

$$\dot{\epsilon}_i = f(\dot{\epsilon}_i) \dot{\epsilon}_i, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{6} \{ (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + 6(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{rz}^2) \}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{6} \{ (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + 6(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{rz}^2) \}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

связь между компонентами скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad 2\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

1. Полуобратным способом, примененным в работе [3], скорости деформаций и скорости ищем в форме

$$u = -(A+B)r - \frac{C}{r}, \quad v = (2A+B)r^\theta, \quad w = Bz, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_r = -A - B + \frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = A - \frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_z = B, \quad (1.7)$$

а для напряжений принимаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= D - \int_0^r (2\varepsilon_\theta - \varepsilon_z) f(\varepsilon_i) \frac{dr}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) f(\varepsilon_i), \\ \sigma_z &= \sigma_r + (\varepsilon_z + 2\varepsilon_r) f(\varepsilon_i), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь A, B, C, D — произвольные постоянные. Выражения (1.6)–(1.8) удовлетворяют всем уравнениям ползучести (1.1)–(1.5).

Вводя обозначения

$$\alpha = A^2 - AB - B^2, \quad \beta = (2A+B)C, \quad \gamma = C^2, \quad (1.9)$$

будем иметь

$$\varepsilon_i = \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}}. \quad (1.10)$$

Подставляя (1.7), (1.10) в (1.8) и учитывая, что внутренняя цилиндрическая поверхность слоя свободна от напряжений, получим

$$\sigma_r = \int_{a^2/b^2}^{r^2/b^2} \left(A + \frac{1}{2}B - \frac{C}{b^2x} \right) f \left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{b^2x} + \frac{\gamma}{b^4x^2}} \right) \frac{dx}{x}, \quad (1.11)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left(2A + B - \frac{2C}{r^2} \right) f \left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}} \right), \quad (1.12)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \left(A + 2B - \frac{C}{r^2} \right) f \left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}} \right). \quad (1.13)$$

Поскольку свободна от напряжений также и внешняя поверхность $r = b$, то

$$(2A + B)b^2 I_1 - 2C I_2 = 0, \quad (1.14)$$

где обозначено

$$I_1 = \int_{a^2/b^2}^1 f[\varepsilon_r(b\sqrt{x})] \frac{dx}{x}, \quad I_2 = \int_{a^2/b^2}^1 f[\varepsilon_r(b\sqrt{x})] \frac{dx}{x^2}. \quad (1.15)$$

Имеем также условия

$$M = \int_a^b \varepsilon_r r dr, \quad N = \int_a^b \varepsilon_z r dr, \quad (1.16)$$

где M — изгибающий момент на единицу длины, а N — растягивающая сила, отнесенная к единице угла. Подставляя ε_r и ε_z из (1.12) и (1.13) в (1.16), после некоторых преобразований получим

$$(2A - B)b^2 I_0 - 2C I_1 - 4M, \quad 3b^2 I_0 B - 4N, \quad (1.17)$$

где

$$I_0 = \int_{a^2/b^2}^1 f[\varepsilon_r(b\sqrt{x})] dx. \quad (1.18)$$

Величины A , B и C можно определить различными приближенными методами.

Задавая различные значения A , B и C , из (1.14) и (1.17) определяем соответствующие им значения M и N .

2°. В случае, когда на площадках $r = r_*$ и $z = l$ заданы соответствующие перемещения

$$u|_{r=r_*} = ur_*, \quad w|_{z=l} = w_0, \quad (1.19)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{x} - \frac{w_0}{l} \right), \quad B = \frac{w_0}{l}, \quad (1.20)$$

задача сводится к определению единственного неизвестного постоянного C . Подставляя (1.20) в уравнение (1.14), будем иметь

$$C = \frac{wb^2 I_1(C)}{2x I_2(C)}. \quad (1.21)$$

Из этого уравнения постоянную C можно определить численным методом или методом последовательных приближений. Однако, легко получить простые двухсторонние оценки для C . Учитывая знакопостоянство подынтегральных величин (1.15) и применяя теорему о среднем, находим

$$I_2 = \frac{b^2}{r_*^2} I_1, \quad C = \frac{wr_*^2}{2x}, \quad (1.22)$$

где r_* — некоторое неизвестное значение r , находящееся между a и b . Обозначая через C_* и C_{**} соответственно верхнее и нижнее значения C , положим

$$C \approx \frac{C_n + C_n}{2} = \frac{w}{2a} (a^2 + b^2). \quad (1.23)$$

Абсолютная погрешность будет

$$\left| \frac{C - C_n}{C} \right| = \left| \frac{C - C_n}{C} \right| = \frac{\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \delta}{1 + \delta + \frac{1}{2} \delta^2} \approx \delta, \quad (1.24)$$

где через δ обозначено отношение толщины слоя к внешнему радиусу: $\delta = (b - a)/b$.

3. В случае, когда заданы M и N , неизвестные A , B , C из (1.14) и (1.17) выразим через M и N

$$A = \frac{2MI_1}{b^2(I_0I_2 - I_1^2)} - \frac{2N}{3b^2I_0}, \quad B = \frac{4N}{3b^2I_0}, \quad C = \frac{2MI_1}{I_0I_2 - I_1^2} \quad (1.25)$$

Принимая δ малым и разлагая I_0 , I_1 , I_2 в ряд по параметру δ , получим

$$I_0 \approx 2f_0\delta - (-f_0 + f_0')\delta^2 + (-2f_0 + f_0')\frac{\delta^3}{3} + \dots, \quad (1.26)$$

$$I_1 \approx 2f_0\delta + (f_0 - f_0')\delta^2 + (2f_0 - 2f_0' + f_0'')\frac{\delta^3}{3} + \dots, \quad (1.27)$$

$$I_2 \approx 2f_0\delta - (3f_0 + f_0'')\delta^2 + (12f_0 + bf_0'' + f_0''')\frac{\delta^3}{3} + \dots, \quad (1.28)$$

где

$$f_0 = f[\xi_i(b)], \quad f_0' = \frac{\partial f[\xi_i(b(1-\delta))]}{\partial \xi_i}, \quad f_0'' = \frac{\partial^2 f[\xi_i(b(1-\delta))]}{\partial \xi_i^2} \Big|_{\xi_i=0} \quad (1.29)$$

Тогда

$$I_1 - I_1^2 \approx 2f_0\delta^2, \quad I_0I_2 - I_1^2 \approx \frac{4}{3}f_0^2\delta^2. \quad (1.30)$$

Следовательно,

$$\xi_i(b) = \sqrt{\frac{4M^2(I_0I_2 - I_1^2)}{b^2(I_0I_2 - I_1^2)} + \frac{4N^2}{3b^2I_0}} \approx \frac{1}{f_0} \sqrt{\frac{9M^2}{b^4\delta^4} + \frac{N^2}{3b^4\delta^2}}. \quad (1.31)$$

Примем степенной закон зависимости между ξ_i и ξ_i , т. е. $\xi_i = k\xi_i^m$.

Тогда

$$f(\xi_i) = k \left[\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}} \right]^{m-1}. \quad (1.32)$$

Отсюда, принимая $r = b$ и учитывая (1.31), для f_0 находим

$$f_0 = k^{\frac{1}{m}} \left[\sqrt{\frac{9M^2}{b^4\delta^4} + \frac{N^2}{3b^4\delta^2}} \right]^{\frac{m-1}{m}}. \quad (1.33)$$

Таким образом, для искомых постоянных получаем приближенные значения

$$A \approx \left(\frac{3M}{b^2} - \frac{1}{3} \frac{N}{b^2} \right) \frac{1}{f_0}, \quad B \approx \frac{2}{3} \frac{N}{b^2 f_0}, \quad C = \frac{3M}{2f_0} \quad (1.34)$$

Существо решения задачи не меняется, если в осевых сечениях приложены также растягивающие силы, а на цилиндрических поверхностях — радиальные давления.

§ 2. Неустановившаяся ползучесть. Теперь рассмотрим случай, когда материал слоя подчиняется законам наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова [2]. Соотношение между компонентами напряжений и деформаций в этом случае имеют вид

$$\sigma_r - \sigma = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \varepsilon_r, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\tau_l}{\varepsilon_l} \gamma_{r\theta}, \quad (r, \theta, z), \quad (2.1)$$

$$\dot{\varepsilon}(z_l) = \varepsilon_l + \int_0^t \sigma_l K(t, \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

Выражения интенсивности σ_l и ε_l , а также компоненты деформации $\varepsilon_r, \dots, \gamma_{r\theta}, \dots$ даются соотношениями, аналогичными (1.4)–(1.5), с тем отличием, что в них $\varepsilon_r, \dots, \gamma_{r\theta}, \dots$ заменяются через $\dot{\varepsilon}_r, \dots, \dot{\gamma}_{r\theta}, \dots$.

1°. Компоненты перемещения и деформаций, как и в § 1, ищем в форме

$$u = -[A(t) + B(t)]r - \frac{C(t)}{r}, \quad v = [2A(t) + B(t)]r\theta, \quad w = B(t)z, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_r = -A(t) - B(t) - \frac{C(t)}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = A(t) - \frac{C(t)}{r^2}, \quad \varepsilon_z = B(t),$$

$$\gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0,$$

где A, B, C и D — произвольные функции от t .

Вводя обозначения

$$f_\sigma(z_l) = \frac{1}{\varepsilon_l} \left[\dot{\varepsilon}(z_l) + \int_0^t \dot{\varepsilon}(z_l) R(t, \tau) d\tau \right], \quad (2.4)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$, компоненты напряжения представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= D(t) + \int_a^r (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) f_*(\varepsilon_r) \frac{dr}{r}, & \varepsilon_\theta &= \varepsilon_r + (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) f_*(\varepsilon_r), \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_r + (\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_z) f_*(\varepsilon_r), & \varepsilon_{rz} &= \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выражения (2.3) и (2.5) удовлетворяют всем уравнениям принятой теории ползучести.

В нашей задаче имеем

$$\varepsilon_r(r, t) = \sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}}, \quad (2.6)$$

где α , β и γ определяются аналогичными (1.9) выражениями.

Учитывая, что $\varepsilon_r = 0$ при $r = a$, компоненты напряжения представим в виде

$$\sigma_r = \int_a^r \left[A(t) + \frac{1}{2} B(t) - \frac{C(t)}{b^2 x} \right] f_* \left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{b^2 x} + \frac{\gamma(t)}{b^4 x^2}} \right) \frac{dx}{x}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left[2A(t) + B(t) - \frac{2C(t)}{r^2} \right] f_* \left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}} \right), \quad (2.8)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \left[A(t) + 2B(t) - \frac{C(t)}{r^2} \right] f_* \left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}} \right). \quad (2.9)$$

Поскольку внешняя цилиндрическая поверхность слоя также свободна от напряжений, то

$$[2A(t) + B(t)] b^2 I_1(t) - 2C(t) I_2(t) = 0, \quad (2.10)$$

где

$$I_1(t) = \int_a^b f_*[\varepsilon_r(b\sqrt{x}, t)] \frac{dx}{x}, \quad I_2(t) = \int_a^b f_*[\varepsilon_r(b\sqrt{x}, t)] \frac{dx}{x^2}. \quad (2.11)$$

Используя еще условия

$$M(t) = \int_a^b \sigma_\theta(r, t) r dr, \quad N(t) = \int_a^b \sigma_z(r, t) r dr, \quad (2.12)$$

где $M(t)$ — изгибающий момент на единицу длины, а $N(t)$ — растягивающая сила на единицу угла, получим

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{4} [2A(t) + B(t)] b^2 I_1(t) - \frac{1}{2} C(t) I_1(t), \\ N(t) &= \frac{3}{4} B(t) b^2 I_1(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$I(t) = \int_{a^2 b^2}^1 f_z[\varepsilon_l(b\sqrt{x}, t)] dx, \quad (2.14)$$

2. Рассмотрим релаксационную задачу. Пусть в момент $t = 0$ на площадках $\theta = \pm \pi$ и $z = \pm l$ сообщены нормальные перемещения

$$v|_{\theta=\pm\pi} = w_r, \quad w|_{z=\pm l} = w_0, \quad (2.15)$$

которые остаются постоянными во времени.

Требуется определить, как будут меняться во времени $M(t)$, $N(t)$ и $u(r, t)$. Из (2.3) и (2.15) будем иметь

$$A(t) = A_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{z} - \frac{w_0}{l} \right), \quad B(t) = B_0 = \frac{w_0}{l}. \quad (2.16)$$

Для $C(t)$ из (2.10) и (2.16) имеем

$$C(t) = \frac{wb^2}{2z} \frac{I_1[C(t), t]}{I_2[C(t), t]}. \quad (2.17)$$

Как и в первом параграфе, принимая теорему о среднем, получим

$$I_2(t) = \frac{b^2}{r_*(t)} I_1(t), \quad C(t) = \frac{wr_*(t)}{2z}, \quad (2.18)$$

где $r_*(t)$ — некоторое значение r , находящееся между a и b . Отсюда, оставляя обозначения, принятые в § 1, напишем

$$C(t) \approx \frac{C_0 + C_0}{2} = \frac{w}{4z} (a^2 + b^2). \quad (2.19)$$

Погрешность, как и в (1.24), будет ≈ 5 . Отсюда заключаем, что, по крайней мере, при малой толщине слоя перемещения во времени практически не меняются. Имея значения A , B и C , легко определить $M(t)$, $N(t)$ и компоненты напряжений. Заметим, что

$$f_z(\varepsilon_l) = \frac{\tau(\varepsilon_l)}{\varepsilon_l} \chi(t), \quad \chi(t) = 1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Тогда из (1.11) — (1.13) имеем

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 \chi(t), \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 \chi(t), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^0 \chi(t), \quad (2.21)$$

где нулевыми индексами обозначены соответствующие компоненты напряжений в момент $t = 0$

$$\varepsilon_r^0 = \int_{a^2 b^2}^1 \left(A_0 + \frac{1}{2} B_0 - \frac{C_0}{b^2 x} \right) \frac{\tau[\varepsilon_r^0(b\sqrt{x})]}{\varepsilon_r^0(b\sqrt{x})} \frac{dx}{x}, \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \varepsilon_r^0 - \left(2A_0 + B_0 - \frac{2C_0}{r^2} \right) \frac{\tau(\varepsilon_\theta^0)}{\varepsilon_\theta^0}, \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_r^0 = \varepsilon_r^0 + \left(A_0 + 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} \right) \frac{\varepsilon_i^0(r)}{\varepsilon_i^0}, \quad (2.24)$$

где

$$\varepsilon_i^0(r) = \sqrt{z_0 - \frac{\beta_0}{r^2} + \frac{\gamma_0}{r^4}}. \quad (2.25)$$

Величины z_0 , β_0 и γ_0 определяются согласно (1.9), где вместо A , B и C следует поставить A_0 , B_0 и C_0 по (2.16).

Для изгибающего момента и продольной силы имеем

$$M(t) = M_0 \chi(t), \quad N(t) = N_0 \chi(t), \quad (2.26)$$

причем

$$M_0 = \frac{1}{4} (2A_0 + B_0) b^2 I_0 - \frac{1}{2} C_0 I_0, \quad N_0 = \frac{3}{4} B_0 b^2 I_0, \quad (2.27)$$

$$I_0 = \int_{a^2/b^2}^1 \frac{\varepsilon_i^0(b|\sqrt{x})}{\varepsilon_i^0(b|x)} dx, \quad I_1 = \int_{a^2/b^2}^1 \frac{\varepsilon_i^0(b|\sqrt{x})}{\varepsilon_i^0(b|x)} \frac{dx}{x}. \quad (2.28)$$

Для реальных материалов $\chi(t)$ — убывающая функция по t . Формулы (2.20), (2.21) и (2.26) выражают закон релаксации напряжений и внешних сил во времени вследствие ползучести материала.

3°. В случае, когда заданными являются внешние силы $M(t)$ и $N(t)$, решением системы уравнений (1.14), (1.17) относительно A , B и C является (1.25), в котором M , N , I_0 , I_1 и I_2 будут функциями от t . Разлагая интегралы (2.11) и (2.14) в ряд по малому параметру b , получим сходные с (1.26) — (1.28) выражения, причем вместо (1.29) будем иметь

$$f_0(t) = f_0[z_0(b, t)], \quad f_n'(t) = \frac{\partial f_n[z_0(b(1-\xi), t)]}{\partial \xi^n} \Big|_{\xi=0},$$

$$f_n''(t) = \frac{\partial^2 f_n[z_0(b(1-\xi), t)]}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0}. \quad (2.29)$$

Аналогичным образом находим

$$I_2(t) - I_1(t) \approx 2f_0(t) \xi^2, \quad I_0(t) I_2(t) - I_1^2(t) \approx \frac{4}{3} f_0^3(t) \xi^3. \quad (2.30)$$

Тогда

$$\varepsilon_i(b, t) \approx \frac{S(t)}{f_0(t)}, \quad S(t) = \sqrt{\frac{9M^2(t)}{b^2 I_0^3} + \frac{N^2(t)}{3b^2 I_0^2}}. \quad (2.31)$$

Для функции χ примем степенной закон: $\chi = k \varepsilon_i^{-n}$. Тогда

$$f_n[z_i(r, t)] = \frac{k}{\varepsilon_i(r, t)} \left[\varepsilon_i^n(r, t) + \int_a^r \varepsilon_i^n(r, z) R(t, z) dz \right]. \quad (2.32)$$

Принимая в соотношении (2.32) $r = b$ и подставляя в него (2.31), получим интегральное уравнение

$$k \frac{S''(t)}{f_0''(t)} + \int_0^t k \frac{S''(\tau)}{f_0''(\tau)} R(t, \tau) d\tau = S(t). \quad (2.33)$$

Отсюда

$$f_0(t) = \frac{k^{\frac{1}{n}} S(t)}{\left| S(t) + \int_0^t S(\tau) K(t, \tau) d\tau \right|^{\frac{1}{n}}}. \quad (2.34)$$

Таким образом, приближенными значениями A , B и C будут

$$A(t) \approx \left[\frac{3M(t)}{b^2 \varphi^2} - \frac{1}{3} \frac{N(t)}{b^2 \varphi} \right] \frac{1}{f_0(t)},$$

$$B(t) \approx \frac{2}{3} \frac{N(t)}{b^2 \varphi f_0(t)}, \quad C(t) \approx \frac{3M(t)}{2 \varphi f_0(t)}. \quad (2.35)$$

В частном случае, когда $M(t) = M_0$, $N(t) = N_0$, будем иметь

$$A(t) = A_0 \frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad B(t) = B_0 \frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad C(t) = C_0 \frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad (2.36)$$

где через A_0 , B_0 , C_0 и $f_0(0)$ обозначены значения соответствующих величин при $t = 0$

$$A_0 = \left(\frac{3M_0}{b^2 \varphi^2} - \frac{1}{3} \frac{N_0}{b^2 \varphi} \right) \frac{1}{f_0(0)}, \quad B_0 = \frac{2}{3} \frac{N_0}{b^2 \varphi f_0(0)}, \quad C_0 = \frac{3M_0}{2 \varphi f_0(0)}. \quad (2.37)$$

$$f_0(0) = k^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt[3]{\frac{9M_0^2}{b^2 \varphi^2} + \frac{N_0^2}{9b^2 \varphi^2}} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (2.38)$$

При помощи соотношений (2.34) и (2.38) находим закон возрастания деформаций во времени

$$\frac{f_0(0)}{f_0(t)} = \left| 1 + \int_0^t K(t, \tau) d\tau \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Принимая в (2.7)–(2.9) $\tau = k\tau_0^n$ и замечая, что

$$\frac{f_0'''(0)}{f_0'''(t)} + \int_0^t \frac{f_0'''(\tau)}{f_0'''(\tau)} R(t, \tau) d\tau = 1,$$

для компонентов напряжений получим

$$\tau_r = \tau_r^0 = k \int_{x_0}^x \left(A_0 + \frac{1}{2} B_0 - \frac{C_0}{b^2 x} \right) \left(x_0 - \frac{\beta_0}{b^2 x} + \frac{\gamma_0}{b^4 x^2} \right)^{\frac{m-1}{2}} dx,$$

$$\tau_\theta = \tau_\theta^0 = \tau_r^0 + k \left(2A_0 + B_0 - \frac{2C_0}{r^2} \right) \left(x_0 - \frac{\beta_0}{r^2} + \frac{\gamma_0}{r^4} \right)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$\tau_z = \tau_z^0 = \tau_r^0 + k \left(A_0 + 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} \right) \left(x_0 - \frac{\beta_0}{r^2} + \frac{\gamma_0}{r^4} \right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

т. е. при постоянных внешних силах напряжения в слое во времени остаются неизменными.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 VII 1966

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ԽՈՂՔԻ ԸՆԳՈՒՅՆԱԿԱՆ ՄԵՐԸ ԵՎ ԸՆԳԻՐԿԱՅՆԱԿԱՆ
ԶԳՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ո, մ փ ո փ ու մ

Հիմնվելով սողքի հավասարումների ճշգրիտ լուծման վրա, ուսումնասիրված է պլանային շերտի կալունացված և ոչ-կալունացված սողքը՝ բնդ-լայնական ծոման և ընդերկայնական ձգման համատեղ սղդեցության ժամանակ: Եզրային պայմաններին բավարարված է Սեն-Վենանի խմաստով: Սողքի խնդրի լուծման համար պարզապես զրոյանում են մասնավոր եզանակով, իսկ ուղղահայաց ղեկավարում աղ զործակիցները զառնում են հալանի մեծություններ:

Ուսումնասիրված է նաև բարակապատ շերտի ղեկքը, որի համար ստացվում են պարզ բանաձևեր:

M. A. ZADOYAN

CREEP OF THE CYLINDRICAL SHEET DURING BENDING AND LONGITUDINAL EXTENSION

Summary

Relying on the exact solution of equations of creep, the creep of the cylindrical sheet during combined bending and longitudinal extension is investigated. Boundary conditions in Sen-Venan's sense are satisfied.

In the case of creep the coefficients are determined approximately.

For the case of a thin-walled cylinder simple results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов А. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. Задоян М. А. О некотором частном решении уравнения теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 5, 1964.
4. Задоян М. А. О двух задачах теории идеальной пластичности. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964.