ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 2. 1967 Механика

Г. Я. ПОПОВ

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЬЦЕВОМ ШТАМПЕ

В настоящей работе рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа кольцевого очертания в плане в упругое полупространство с переменным по степенному закону модулем упругости.

Метод исследования не имеет аналога в работах [1, 2, 3], посвященных той же задаче применительно к однородному упругому полупространству, и заключается в следующем. Проблема отыскания контактных напряжений формулируется в виде интегрального уравнения, которое является общим как для пространственной (в том числе и неосесимметричной) задачи о кольцевом штампе, так и для плоской контактной задачи с двумя участками контакта. Предлагается приближенный способ решения указанного интегрального уравнения, основанный на одном обобщении (полученном в настоящей работе) результата Г. А. Гринберга [4] и на одном свойстве многочленов Якоби, обнаруженном нами [5].

Излагаемый метод может оказаться полезным и при решении соответствующих контактных задач (пространственной с кольцевой областью контакта и плоской с двумя участками контакта) нелинейной теории ползучести в постановке Н. Х. Арутюняна [6, 7].

§ 1. Формулировка задачи

Пусть в упругое полупространство ($-\infty < x, y < \infty, 0 \leqslant z < \infty$), модуль упругости которого изменяется по степенному закону

$$E = E_0 z^{\nu} \quad (0 \leqslant \nu < 1) \quad (\text{коэффициент Пуассона } \mu_* = \text{const}), \tag{1.1}$$

вдавливается жесткий штамп, имеющий в плане форму кругового кольца с внешним радиусом a и внутренним b. Полагаем, что поверхность штампа задана в виде

$$z = g(r, \varphi), \qquad b \leqslant r \leqslant a, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{1.2}$$

Требуется определить нормальное контактное напряжение $p(r, \varphi)$ между штампом и полупространством (касательными контактными напряжениями пренебрегаем), предполагая, что геометрия и нагрузка на штамп обеспечивают кольцевую область контакта.

С целью дать наиболее простую математическую формулировку поставленной задаче будем считать $g(r, \varphi)$ представимой в виде ряда

$$g(r, \varphi) = g_0(r) + \sum_{\mu=1}^{\infty} g_{\mu}(r) \cos \mu\varphi \tag{1.3}$$

и, стало быть, контактное напряжение тоже должно иметь вид

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + \sum_{\mu=1}^{\infty} p_\mu(r) \cos \mu\varphi. \tag{1.4}$$

Н. А. Ростовцев [8] построил формулу для определения вертикальных перемещений $w(r)$ поверхностных точек упругого неоднородного полупространства типа (1.1) от воздействия единичной вертикальной силы, приложенной в начале координат ($r = 0$, $z = 0$). Его результат можно представить в таком виде:

$$w(r) = \frac{\Gamma(1/2 + \nu/2)}{\Gamma(1/2 - \nu/2)} \frac{\theta_0}{2^{1-\nu}\pi r^{1+\nu}} = \frac{\theta_0}{2\pi}\int_0^\infty t^\nu J_0(rt)\,dt, \tag{1.5}$$

где

$$\theta_0 = \frac{(1-\mu_0^2)\Gamma(1/2 - \nu/2) q C}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\, E\,\Gamma(1+\nu/2)(1+\nu)} \sin\frac{\pi q}{2}, \qquad \frac{q^2}{1+\nu} = 1 - \frac{\nu\mu_*}{1-\mu_*},$$

$$\frac{C}{\Gamma[1 + 1/2(1+\nu+q)]} = \frac{2^{\nu}\Gamma[1 + 1/2(1+\nu-q)]}{\Gamma(2+\nu)}.$$

В работе [9] для линейно-деформируемого основания общего типа дана формула, позволяющая вычислять вертикальные перемещения $w_\mu(r, \varphi)$ поверхностных точек основания от нагрузки $q(r, \varphi)$ вида

$$q(r, \varphi) = \delta(r-\rho)\cos\mu\varphi, \qquad \mu = 0, 1, 2 \cdots, \tag{1.6}$$

т. е. от нагрузки, сосредоточенной на линии окружности радиуса ρ (с центром в точке $r = 0$) и распределенной вдоль нее по закону косинуса. Принимая во внимание (1.5) и формулу (5.5) работы [9], найдем

$$w_\mu(r, \varphi) = \theta_0 \rho W^{\nu}_{\mu}(r, \rho)\cos\mu\varphi, \qquad \mu = 0, 1, 2 \cdots. \tag{1.7}$$

Здесь и всюду в дальнейшем

$$W^{\nu}_{\mu,\gamma}(x, y) = \int_0^\infty t^\nu J_\mu(tx) J_\gamma(ty)\,dt, \quad W^{\nu}_{\mu,\mu} = W^{\nu}_{\mu}. \tag{1.8}$$

Воспользовавшись формулой (1.7), нетрудно составить следующее интегральное уравнение:

$$\int_b^a \rho W^{\nu}_{\mu}(r, \rho) p_\mu(\rho)\,d\rho = \frac{g_\mu(r)}{\theta_0} \qquad (b < r < a,\ \mu = 0, 1, 2 \cdots), \tag{1.9}$$

из которого следует находить коэффициенты $p_\mu(r)$ в разложении контактного напряжения (1.4) по соответствующим коэффициентам $g_\mu(r)$ из (1.3). Очевидно, случай $\mu = 0$ соответствует осесимметричному случаю. Если же штамп с плоским основанием и находится под действием произвольной вертикальной нагрузки, то для отыскания контактного напряжения достаточно решить уравнения (1.8) при $\mu=0$ и $\mu=1$.

Рассмотрим теперь плоскую контактную задачу с двумя участками контакта:
$(-a\leqslant x\leqslant -b,\ -\infty<y<\infty)$ и $(b\leqslant x\leqslant a,\ -\infty<y<\infty)$. Обозначим искомое нормальное контактное напряжение через $p(x)$, а вертикальные смещения поверхностных точек основания в зоне контакта через $v(x)$. Тогда в соответствии с [8] будем иметь интегральное уравнение

$$\frac{2^{1+\nu}\theta_\nu\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)}{\sqrt{\pi}\,\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)}\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\frac{p(s)\,ds}{|x-s|^{\nu}}=v(x)\qquad (b\leqslant|x|\leqslant a).\qquad(1.10)$$

Представив правую часть в виде суммы четной и нечетной функций $v(x)=v_+(x)+v_-(x)$ и обозначив через $p_\pm(x)$ соответствующие им решения, так же как и в работе [5] интегральное уравнение (1.9) приведем к двум уравнениям

$$\int_b^a W^{\nu}_{\mp 1/2}(x,s)\sqrt{s}\,p_\pm(s)\,ds=\frac{v_\pm(x)}{\sqrt{x}\,\theta^*_\nu}$$

$$\left(b\leqslant x\leqslant a;\quad \theta^*_\nu=\frac{2^{1+\nu}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)\theta_\nu}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu\right)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}\right).$$

Здесь мы воспользовались формулой [5]

$$\pi\sqrt{xy}\,W^{\nu}_{\mp 1/2}(x,y)=\Gamma(\nu)\cos\tfrac{1}{2}\nu\pi\left[|x-y|^{-\nu}\pm(x+y)^{-\nu}\right].$$

Таким образом, обе поставленные контактные задачи можно сформулировать в виде одного интегрального уравнения

$$\int_b^a W^{\nu}_{\mu}(x,y)\,\varphi(y)\,dy=g(x)\qquad (b\leqslant x\leqslant a).\qquad(1.11)$$

При этом в случае кольцевого штампа следует положить

$$g(x)=g_\mu(r)\,\theta_\nu^{-1},\qquad p_\mu(r)=r^{-1}\varphi(r)\qquad(\mu=0,1,2\cdots).\qquad(1.12)$$

В случае плоской симметричной задачи

$$\mu=-\tfrac{1}{2},\qquad g(x)=x^{-1/2}(\theta^*_\nu)^{-1}v_+(x),\qquad p_+(x)=x^{-1/2}\varphi(x),\qquad(1.13)$$

а при наличии косой симметрии

$$\mu=\tfrac{1}{2},\qquad g(x)=x^{-1/2}(\theta^*_\nu)^{-1}v_-(x),\qquad p_-(x)=x^{-1/2}\varphi(x).\qquad(1.14)$$

§ 2. Об одном способе сведения интегральных уравнений первого рода к уравнениям второго рода

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^\alpha L_+(\xi-\eta)\,Z(\eta)\,d\eta = f(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \alpha). \tag{2.1}$$

Для случая, когда ядро зависит от абсолютной величины разности аргументов, Г. А. Гринберг [4] указал способ приведения интегральных уравнений типа (2.1) к уравнениям 2-го рода. Здесь мы дадим обобщение его результата.

Введем в рассмотрение интегральные уравнения

$$\int_0^\alpha L_\pm(\xi-\eta)\,\varphi_\pm(\rho,\eta)\,d\eta = L_\pm(\xi+\rho) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \alpha), \tag{2.2}$$

$$\rho > 0, \qquad L_-(x) = L_+(-x). \tag{2.3}$$

Очевидно, что

$$\int_0^\alpha L_+(\xi-\eta)\,\varphi_-(\rho,\,\alpha-\eta)\,d\eta = L_-(\alpha-\xi+\rho) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \alpha). \tag{2.4}$$

Если интеграл, содержащийся в уравнения

$$\int_0^\infty L_+(\xi-\eta)\,u(\eta)\,d\eta = f(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \infty), \tag{2.5}$$

расчленить на два с интервалами $(0, \alpha)$, (α, ∞) и последний перенести в правую часть, то вместо (2.5) будем иметь

$$\int_0^\alpha L_+(\xi-\eta)\,u(\eta)\,d\eta = f(\xi) - \int_0^\infty L_-(\alpha-\xi+t)\,u(\alpha+t)\,dt \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \alpha). \tag{2.6}$$

Отняв от левой и правой частей уравнения (2.1) соответственно левую и правую части уравнения (2.6) и приняв во внимание (2.4), найдем

$$Z(\xi) = u(\xi) + \int_0^\infty u(\alpha+t)\,\varphi_2(t,\xi)\,dt, \quad \varphi_2(t,\xi) = \varphi_-(t,\,\alpha-\xi). \tag{2.7}$$

Таким образом, дело сводится к отысканию $\varphi_-(t,\,\alpha-\xi)$ либо из (2.2), либо из (2.4).

Интегральные уравнения

$$\int_0^\infty L_\pm(\xi-\eta)\,\varphi_\pm(\rho,\eta)\,d\eta = L_\pm(\xi+\rho) \qquad (0 \leqslant \xi < \infty). \tag{2.8}$$

таким же путем, как и (2.5), приводим к виду

$$\int_0^\xi l_-(\xi-\tau)\,v_-(\rho,\tau)\,d\tau = l_-(\xi+\rho) - \int_0^\infty l_-(\alpha-\xi+t)\,v_+(\rho,\alpha+t)\,dt. \quad (2.9)$$

Откуда, принимая во внимание (2.2) и (2.4), получаем

$$v_-(\rho,\xi) = \varphi_-(\rho,\xi) - \int_0^\infty \varphi_+(t,\alpha-\xi)\,v_+(\rho,\alpha+t)\,dt \qquad (2.10)$$

или, полагая $\xi = \alpha - \xi_1$,

$$v_-(\rho,\alpha-\xi) = \varphi_-(\rho,\alpha-\xi) - \int_0^\infty \varphi_+(t,\xi)\,v_+(\rho,\alpha+t)\,dt. \qquad (2.11)$$

Первое уравнение из (2.10) и второе из (2.11) дают систему интегральных уравнений 2-го рода

$$\varphi_1(\rho,\xi) - \int_0^\infty v_+(\rho,\alpha-t)\,\varphi_2(t,\xi)\,dt = v_+(\rho,\xi)$$

$$[\varphi_1(t,\xi)=\varphi_+(t,\xi)] \quad (2.12)$$

$$\varphi_2(\rho,\xi) - \int_0^\infty v_-(\rho,\alpha+t)\,\varphi_1(t,\xi)\,dt = v_-(\rho,\alpha-\xi).$$

Исключив очевидным образом отсюда $\varphi_1(\rho,\xi)$, получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода для $\varphi_2(\rho,\xi)$. Тем самым завершается редукция в общем случае уравнения (2.1) к уравнению 2-го рода. При решении поставленной задачи особую роль будет играть частный случай, когда

$$v_-(\rho,\xi) = e^{\gamma(\alpha+\xi)}\,v_+(\rho,\xi). \qquad (2.13)$$

В этом случае система (2.12) вырождается в два независимо решаемых уравнения. Действительно, подставив (2.13) в (2.12) и введя

$$\psi_\pm(\rho,\xi) = \varphi_1(\rho,\xi)\exp\left(\frac{\alpha\gamma}{2}+\gamma\rho\right) \pm \varphi_2(\rho,\xi),$$

$$v(\rho,\xi) = v_+(\rho,\xi)\exp\left(\frac{\alpha\gamma}{2}+\gamma\xi\right), \qquad (2.14)$$

получаем следующие два независимо решаемых интегральных уравнения 2-го рода для новых неизвестных функций:

$$\psi_\pm(\rho,\xi) = v(\rho,\xi) \pm v(\rho,\alpha-\xi)\exp\left(\frac{\alpha\gamma}{2}-\gamma\xi\right) = \int_0^\infty v(\rho,\alpha-t)\,\psi_\pm(t,\xi)\,dt.$$

$$(2.15)$$

При этом нетрудно видеть из (2.14), что

$$2\varphi_2(\rho,\ \xi)=\psi_+(\rho,\ \xi)-\psi_-(\rho,\ \xi). \tag{2.16}$$

Применим описанные построения к интегральному уравнению (1.11). Чтобы привести его к виду (2.1), достаточно сделать замену $x=ae^{-\xi}$, $y=ae^{-\eta}$ и положить

$$(ae^{-\xi})^{-\nu}\varphi(ae^{-\xi})=\chi(\xi),\qquad g(ae^{-\xi})=f(\xi),\quad \ln(a/b)=\alpha,$$

$$I_\nu(t)=\int_0^\infty s^{\nu}J_\mu(e^{-t}s)\,J_\mu(s)\,ds. \tag{2.17}$$

Произведя в (2.2) замену переменных

$$\xi=-\ln x,\quad \eta=-\ln y,\quad \rho=-\ln r \tag{2.18}$$

с учетом (2.17), будем иметь

$$\int_0^1 W_\mu^\nu(x,\ y)\,y^{-\nu}v_+\left(\ln\frac{1}{r},\ \ln\frac{1}{y}\right)dy=\frac{1}{r^{1+\nu}}W_\mu^\nu\left(x,\ \frac{1}{r}\right),$$

$$(0<x,\ r<1)$$

$$\int_0^1 W_\mu^\nu(x,y)\frac{1}{y}v_-\left(\ln\frac{1}{r},\ \ln\frac{1}{y}\right)dy=W_\mu^\nu\left(x,\ \frac{1}{r}\right).$$

Откуда следует, что в рассматриваемом случае выполняется условие (2.13), причем

$$\gamma=-1-\nu. \tag{2.19}$$

Следовательно, для функции $v(\rho,\ \xi)$, определяемой формулой (2.14) и являющейся ядром уравнений (2.15), будем иметь интегральное уравнение

$$\int_0^1 W_\mu^\nu(x,\ y)\,v^*(r,\ y)\,y^{-\nu}dy=\beta^{1-\omega}\,W_\mu^\nu\left(x,\ \frac{1}{r}\right),$$

$$\beta=\frac{b}{a},\qquad \omega=\frac{1-\nu}{2},\qquad v^*(r,\ y)=v\left(\ln\frac{1}{r},\ \ln\frac{1}{y}\right). \tag{2.20}$$

Выполнив в (2.15) и (2.16) замену (2.18) с учетом (2.19), (2.20) и того, что

$$\alpha=\ln\frac{1}{\beta},\qquad \psi_\pm\left(\ln\frac{1}{r},\quad \ln\frac{1}{x}\right)=\psi_\pm^*(r,\ x),$$

$$\varphi_2\left(\ln\frac{1}{r},\ \ln\frac{1}{x}\right)=\varphi_2^*(r,\ x), \tag{2.21}$$

будем иметь

$$\varphi^*_{\pm}(r, x) = v^*(r, x) \pm v^*\left(r, \frac{\beta}{x}\right)\frac{\beta^{1-\nu}}{x^{1-\nu}} = \int\limits_{\beta}^{1} v^*(r, \beta s)\,\varphi^*_{\pm}(s, x)\frac{ds}{s} \tag{2.22}$$

$$(0 \leqslant r,\ x \leqslant 1),$$

$$2\varphi^*_{2}(r, x) = \varphi^*_{+}(r, x) - \varphi^*_{-}(r, x). \tag{2.23}$$

Уравнения (2.5) и (2.7) в результате замены

$$\xi = \ln(a/x), \quad \eta = \ln(a/y), \quad t = -\ln s, \quad x^{\nu}u[\ln(a/x)] = u^*(x)$$

и использования связи между элементами уравнений (2.1) и (1.11), даваемой формулами (2.17), приобретают вид

$$\int\limits_{0}^{a} W^*_{\nu}(x, y)\,u^*(y)\,dy = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{2.24}$$

$$\varphi(x) = u^*(x) - \int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x}{bs}\right)^{\nu} u^*(bs)\,\varphi^*_{2}\left(s, \frac{x}{a}\right)\frac{ds}{s}. \tag{2.25}$$

Полученное уравнение (2.24) представляет собой интегральное уравнение для кругового штампа [5] с такой же поверхностью основания, что и рассматриваемый кольцевой. Стало быть, формула (2.25) связывает решение задачи о кольцевом штампе с решением задачи о круговом штампе. Таким образом, для получения решения задачи о кольцевом штампе следует получить таковое для соответствующего кругового штампа и решить интегральные уравнения (2.22), после чего воспользоваться формулой (2.25).

§ 3. Сведение проблемы к бесконечной системе алгебраических уравнений

Для этой цели оказывается полезным следующее [5] соотношение[1] для многочленов Якоби $P_m^{\alpha,\beta}(x)$:

[1] В нашей работе (Изв. вузов, Математика, № 4, 1966), дано обобщение соотношения (3.1)

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{W^{\nu}_{\nu}(x, y)}{(1-y^2)^{\sigma_\pm}}\,y^{1+\nu}P_m^{\nu,\,-\sigma_\pm}(1-2y^2)\,dy =$$

$$= \frac{\Gamma(1+m-\sigma_\pm)\,\Gamma(m-\sigma)}{2^{\sigma-1}m!\,\Gamma(1-\sigma+m)}\,x^{\nu}P_m^{\nu,\,-\sigma_\pm}(1-2x^2)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 1, \quad m = 0, 1, 2\cdots; \quad 2\sigma_\pm = 1-\nu \pm (\gamma - \mu),$$

$$2\sigma = 1 - \nu - \gamma - \mu, \quad \operatorname{Re}\sigma < 1).$$

$$a^{1-\nu}\int_0^1 \frac{W_\mu^\nu(at, a\tau)}{(1-\tau^2)^\omega}\,\tau^{1+\nu}P_m^\mu(\tau)\,d\tau = \gamma_m t^\nu P_m^\mu(t), \qquad 0\le t\le 1, \tag{3.1}$$

$$\omega = \frac{1-\nu}{2}, \qquad \gamma_m = \frac{\Gamma(1-\omega+\mu-m)\,\Gamma(1-\omega+m)}{2^{\nu}\,m!\,\Gamma(1+\mu+m)},$$

$$P_m^\mu(x) = P_m^{\mu,-\omega}(1-2x^2).$$

Будут полезны также следующие соотношения:

$$\int_0^1 \frac{x^{1+\tau}}{(1-x^2)^\beta}\,P_m^{\tau,-\beta}(1-2x^2)\,J_\tau(xy)\,dx =$$

$$=\frac{\Gamma(1-\beta+m)}{2^\beta\,m!\,y^{1-\beta}}\,J_\sigma(y) \qquad \begin{pmatrix}\tau>-1, & \beta<1\\ \sigma=1-\beta+\tau+2m\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$${}_3F_2\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1\\ \beta+k+1,\ \gamma+1;\end{pmatrix} = \frac{\Gamma(1+\gamma)\,\Gamma(1-\alpha)\,(\beta)_{k+1}}{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma+1)_k\,\Gamma(1-\alpha+\gamma)}+$$

$$+\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n\gamma\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta+n)\,(\beta)_{k+1}}{(k-n)!\,n!\,\Gamma(1-\alpha+\beta+n)\,(\gamma-\beta-n)}. \tag{3.3}$$

Последняя формула позволяет, очевидно, вычислять обобщенный [10] гипергеометрический ряд ${}_3F_2(\alpha, \beta, \gamma; \delta, \rho; z)$ при $z=1$ для некоторых частных значений параметров.

Соотношение (3.2) легко доказать, если под знак интеграла подставить выражение функции Бесселя в виде определяющего ее степенного ряда и провести почленное интегрирование. Получающиеся при этом интегралы выражаются согласно формуле 7.391 (4) из [10] через гамма-функции Эйлера. Использование этого обстоятельства и подтверждает справедливость (3.2).

Формулу (3.3) можно доказать следующим образом. На основании 7.512 (5) из [10] имеем

$$I={}_3F_2\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta,\ \gamma\\ \beta+k+1,\ \gamma+1\end{pmatrix}=\gamma\int_0^1 t^{\gamma-1}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\beta+k+1;t)\,dt$$

$$\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\gamma>0\\ \operatorname{Re}(1+k+\gamma-\alpha)>0\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Подставив под знак последнего интеграла интегральное представление для гипергеометрической функции Гаусса (формула 9.111 из [10]), будем иметь

$$I=\frac{\gamma\,(\beta)_{k+1}}{k!}\int_0^1 t^{\gamma-1}\,dt\int_0^1\frac{s^{\beta-1}(1-s)^k}{(1-st)^\alpha}\,ds=$$

$$= \gamma \frac{(\beta)_{k+1}}{k!} \int_0^1 t^{\gamma-\beta-1} dt \int_0^t \frac{u^{\alpha-1}(1-u/t)^k}{(1-u)^{\gamma}} du.$$

Если считать, что $\mathrm{Re}\,(\gamma-\beta-k)>0$, $\mathrm{Re}\,\alpha<1$ (дополнительно к предыдущему ограничению), то можно будет изменить порядок интегрирования. В результате будем иметь

$$I = \frac{\gamma(\beta)_{k+1}}{k!} \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u)^{\gamma}} du \int_u^1 t^{\gamma-\beta-1} \left(1-\frac{u}{t}\right)^k dt.$$

Разложив степень бинома по формуле Ньютона, легко вычислим внутренний интеграл. Внешний же интеграл будет представлять собой кобминацию бета-функций Эйлера. Воспользовавшись затем известным соотношением между бета и гамма-функциями Эйлера, а также формулой [10]

$$(\gamma-\beta)\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\frac{(-1)^m}{\gamma-\beta-m} = {}_2F_1(-k,\ \beta-\gamma;\ 1+\beta-\gamma;\ 1) =$$

$$= \frac{k!}{(1+\beta-\gamma)_k},$$

получим соотношение (3.3). При этом ограничения на параметры, сделанные при получении (3.3), могут быть отброшены в соответствии с принципом аналитического продолжения.

Вернемся теперь к интегральному уравнению (2.20). Правую часть его, приняв во внимание ортогональность многочленов Якоби [10]

$$\int_0^1 \frac{x^{2\nu-1}}{(1-x^2)^{\mu}} P_m^*(x) P_n^*(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ c_m, & m = n \end{cases} \tag{3.5}$$

$$c_m = \Gamma(1-\nu+m)\,\Gamma(1-\mu+m)\,[m!\,2\,(1-\nu-\mu+2m) \times$$

$$\times\, \Gamma(1-\nu-\mu+m)]^{-1},$$

разложим в ряд

$$W\left(x, \frac{1}{r}\right) = x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(r)\, P_n^*(x). \tag{3.6}$$

При этом

$$A_n^*(r) = \frac{1}{c_n}\int_0^1 \frac{W(x, r^{-1})\, x^{\nu-1}\, P_n^*(x)\, dx}{(1-x^2)^{\mu}}. \tag{3.7}$$

Для правой части вида (3.6) решение рассматриваемого уравнения (2.20) в соответствии с (3.1) будет иметь вид

$$v^{\circ}(r, x) = \beta^{1-\omega}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{1+\mu-\nu}P_m^{\mu}(x)\,A_m^{*}(r)}{\mu_m(1-x^2)^{\omega}} = \beta^{1-\omega}\sum_{m=0}^{\infty}f_m(r)\,g_m^{*}(x), \quad (3.8)$$

где

$$f_m(r) = \frac{2\sin\pi\omega m!\,{}_2F_1(1-\omega+m,\ 1-\omega-\mu+m;\ 2-\omega-\mu+2m;\ r^2)}{r^{-1-\mu-\nu-2m}\pi(-1)^m(1-\omega+\mu+m)_m},$$

$$g_m^{*}(x) = \frac{x^{1-\nu+\mu}P_m^{\mu}(x)}{(1-x^2)^{\omega}}. \quad (3.9)$$

При этом для вычисления интеграла, содержащегося в (3.7), использовалась формула (1.8), затем, после изменения порядка интегрирования, формула (3.2) и, наконец, формула 6.574 из [10]. Подставим теперь полученное разложение (3.8) в (2.22). В результате будем иметь

$$\frac{\psi(r, x)}{\beta^{1-\omega}} = \sum_{k=0}^{\infty}f_k(r)\,X_k(x),$$

$$X_k(x) = \frac{\beta^{1-\omega}}{x^{1+\nu}}g_k^{*}\left(\frac{\beta}{x}\right) + g_k^{*}(x) - \int_0^1 g_k^{*}(\beta s)\,\psi^{*}(s, x)\frac{ds}{s}. \quad (3.10)$$

Помножив обе части полученной формулы на $r^{-1}g_j^{*}(\beta r)$ и проинтегрировав затем с учетом (3.5) по r в интервале (0, 1), придем к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$X_j(x) + \sum_{k=0}^{\infty}a_{kj}X_k(x) - \frac{\beta^{1-\omega}}{x^{2+\nu}}g_j^{*}\left(\frac{\beta}{x}\right) = g_j^{*}(x), \quad j = 0, 1, 2\cdots. \quad (3.11)$$

При этом

$$a_{kj} = \int_0^1\frac{f_k(r)\,g_j^{*}(\beta r)}{\beta^{\omega-1}r}dr = d_k\beta^{1-\omega+\nu}\int_0^1\frac{r^{2k+\mu-\nu}P_j^{\mu}(\beta r)}{(1-\beta^2r^2)^{\omega}}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\binom{1-\omega+k,\ 1-\omega+\mu+k}{2-\omega-\mu+2k;\ r^2}dr \quad (3.12)$$

$$(k, j = 0, 1, 2, \cdots;\ d_k = (-1)^k 2\sin\pi\omega k![\pi(1-\omega+\mu+k)_k]^{-1}).$$

Полученную формулу (3.12) можно привести к более удобному виду. Для этого воспользуемся формулой

$$j!(1-x^2)^{\omega}P_j^{(\mu,\,-\omega)}(1-2x^2) = (1+\mu)_j\,{}_2F_1(\omega-j,\ 1+\mu-j;\ 1+\mu;\ x^2). \quad (3.13)$$

Чтобы убедиться в ее справедливости следует принять во внимание представление многочленов Якоби через функцию Гаусса (формула 8.962 из [10]), а также формулу преобразования 9.131 из [10] для функций Гаусса.

Использование (3.13) дает

$$a_{kj} = \frac{d_k \beta^{1-\omega+j} (1+\mu)_j}{j!\,2} \int\limits_0^1 {}_2F_1\left(\begin{matrix}\omega - j,\ 1+\mu+j; \\ 1+\mu;\ \beta^2 t\end{matrix}\right) \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\omega+k,\ 1-\omega+\mu+k \\ 2-\omega+2k+\mu,\ t\end{matrix}\right) t^{\mu+k} dt,$$

или, если заменить одну из функций Гаусса рядом,

$$a_{kj} = \frac{(1+\mu)_j}{j!} \beta^{1+j-\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\omega - j)_m (1+\mu+j)_m}{m!\,(1+\mu)_m} I_{mk} \beta^{2m}, \qquad (3.14)$$

где

$$I_{mk} = \frac{d_k}{2} \int\limits_0^1 t^{\mu+k+m} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1-\omega+k,\ 1-\omega+\mu+k \\ 2-\omega+\mu+2k,\ t\end{matrix}\right) dt. \qquad (3.15)$$

Полезно отметить, что полученный ряд сходится не только в случае $\beta < 1$, представляющем практический интерес, но даже и при $\beta = 1$ (в силу 3.12).

Наконец, вычислим интеграл (3.15). В силу 7.512 (5) из [10] имеем

$$2I_{mk} = \frac{d_k}{1+\mu+k+m}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix}1-\omega+k,\ 1-\omega+\mu+k,\ 1+\mu+k+m; \\ 2-\omega+\mu+2k,\ 2+\mu+k+m;\end{matrix}\ 1\right).$$

Воспользовавшись далее формулой (3.3) и приняв во внимание (3.12), после элементарных преобразований с гамма-функциями найдем

$$I_{mk} = \frac{1-\omega+\mu+2k}{\Gamma(1-\omega+k)} \left\{ \frac{k!\,\Gamma(1+\mu+k+m)\,\Gamma(\omega-k+m)}{(-1)^{k+1}\Gamma(1+\omega+m)\,\Gamma(1+\omega+\mu+m)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{k} \frac{(-k)_n\, \Gamma(1-\omega+\mu+k+n)}{n!\,\Gamma(1+\mu+n)\,(\omega+m-n)} \right\}. \qquad (3.16)$$

§ 4. Приближенный способ решения задачи

Для получения приближенного решения рассматриваемой контактной задачи удержим конечное число членов в разложении (3.8), определяющем ядро уравнений (2.22), т. е. положим

$$s^{-1} v^*(r, \beta s) = \sum_{m=0}^{n} f_m(r)\, g_m(s), \quad g_m(s) = s^{-1} \beta^{1-\omega} g_m^*(\beta s). \qquad (4.1)$$

Для решения полученных таким образом интегральных уравнений с вырожденным ядром воспользуемся приемом, описанным в [11]. Согласно этому приему для отыскания коэффициентов A_{kj}^{n}, формирующих резольвенты

$$\Gamma_n^{\pm}(r, t) = \pm \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} A_{kj}^{n} f_k(r) g_j(t) \tag{4.2}$$

уравнений (2.22) с ядром (4.1), следует пользоваться рекуррентными формулами[1]

$$A_{kj}^{(n)} = A_{kj}^{(n-1)} + \frac{B_{nk}^{(n-1)} C_{nj}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}, \qquad A_{kn}^{(n)} = \frac{B_{nk}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}, \qquad A_{nj}^{(n)} = \frac{C_{nj}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}$$
$$(k, j = 1, 2 \cdots n-1), \tag{4.3}$$

$$A_{nn}^{(n)} = \Delta_{n-1}^{-1}, \qquad \Delta_{n-1} = 1 - a_{nn} - D_{nn}^{(n-1)}, \qquad D_{mk}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} a_{jm} B_{kj}^{(i)},$$

$$B_{mk}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} A_{kj}^{(i)} a_{mj}, \qquad C_{mk}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} a_{jm} A_{jk}^{(i)}.$$

При этом в первом приближении ($n = 0$) следует положить

$$A_{00}^{(0)} = (1 - a_{00})^{-1}. \tag{4.4}$$

Применительно к рассматриваемому случаю для вычисления A_{kj}^{+} по формулам (4.4) и (4.3) в качестве a_{kj} следует брать величины, определяемые формулами (3.14) и (3.16), а для вычисления A_{kj}^{-} роль a_{kj} должны выполнять те же величины, но взятые с обратными знаками.

Если построены резольвенты (4.2), то решения интегральных уравнений (2.22) с ядром (4.1) получим по формулам

$$\varphi_{\pm}^{*}(r, x) = G_{\pm}(r, x) \pm \int_0^1 \Gamma_n^{\pm}(r, t) G_{\pm}(t, x)\, dt. \tag{4.5}$$

Здесь $G_{\pm}(r, x)$ в соответствии с (3.9) и (2.22) будут иметь вид

$$G_{\pm}(r, x) = \beta^{1-\nu} \sum_{m=0}^{n} f_m(r) g_m^{\pm}(x), \quad g_m^{\pm}(x) = g_m^{*}(x) \pm \frac{\beta^{1-\nu}}{x^{1-\nu}} g_m^{*}\left(\frac{\beta}{x}\right). \tag{4.6}$$

Приняв во внимание (4.2), подставим (4.5) в формулу (2.23), в результате будем иметь

---

[1] Следует отметить, что рассматриваемый прием решения интегральных уравнений эквивалентен методу последовательных окаймлений [12] обращения матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений, к которым приводится данное интегральное уравнение (с вырожденным ядром). Поэтому, если по каким-либо причинам использование рекуррентных формул (4.3) окажется неудобным, коэффициенты $A_{kj}^{(n)}$ можно находить непосредственно из алгебраических уравнений.

$$\varphi_2^*(r, x) = \beta^{1-\omega} \sum_{m=0}^{n} f_m(r) \left\{ \frac{\beta^{1-\omega}}{x^{1+\nu}} g_m^*\left(\frac{\beta}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{B_{km}^{n+} + B_{km}^{n-}}{2} g_k^*(x) + \frac{B_{km}^{n+} - B_{km}^{n-}}{2\beta^{\omega-1} x^{1+\nu}} g_k^*\left(\frac{\beta}{x}\right) \right] \right\}. \tag{4.7}$$

Коэффициенты $B_{km}^{n\pm}$ здесь следует находить из рекуррентных соотношений (4.3), причем роль a_{kj}, как и выше для $A_{km}^{n\pm}$, должны выполнять $\pm a_{kj}$, вычисленные по формулам (3.14) и (3.16). Наконец, подставив (4.7) и (2.25), получим приближенное решение (будем снабжать его индексом n, показывающим порядок приближения) интегрального уравнения (1.11)

$$\varphi_n(x) = u^*(x) + \beta^{1-\omega} \sum_{m=0}^{n} \int_0^1 \frac{u^*(bs)}{(bs)^{\nu} s} f_m(s)\, ds \left\{ \frac{(ba)^{1-\omega}}{x} g_m^*\left(\frac{b}{x}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{B_{km}^{n+} + B_{km}^{n-}}{2} x^{\nu} g_k^*\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{B_{km}^{n+} - B_{km}^{n-}}{2x} (ba)^{1-\omega} g_k^*\left(\frac{b}{x}\right) \right] \right\}, \tag{4.8}$$

а вместе с ним и решение рассматриваемых контактных задач.

Напомним, что $u^*(x)$ есть решение интегрального уравнения (2.24), к которому приводится контактная задача для кругового штампа с такой же поверхностью основания (по крайней мере в зоне $b < r < a$), что и рассматриваемый кольцевой.

Полученную формулу (4.8) можно упростить, если разложить правую часть интегрального уравнения (2.24) или (1.11) в ряд по многочленам Якоби, т. е.

$$g(at) = \sum_{l=0}^{\infty} t^{\nu} P_l(t) B_l. \tag{4.9}$$

В силу линейности уравнений достаточно получить их решение только для одного произвольного члена ряда

$$g_l(at) = \mu_l t^{\nu} P_l(t), \quad l = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4.10}$$

Решение интегрального уравнения (2.24) с правой частью (4.10) в силу (3.1) будет иметь вид

$$u^*(a\tau) = a^{\nu} (1 - \tau^2)^{-\omega} \tau^{1+\nu} P_l^*(\tau)$$

или, если учесть обозначение, принятое в (3.9),

$$u^*(x) = x^{\nu} g_l^*(x/a). \tag{4.11}$$

Если теперь подставить (4.11) в (4.8), изменить порядок суммирования и воспользоваться обозначениями, принятыми в формулах (3.12), (4.3) и (3.9), то вместо (4.8) получим

$$\varphi_a^{(l)}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\nu} \frac{P_l^{\omega}(x/a)\,x}{(a^2-x^2)^{\omega}} + \sum_{k=0}^{n}\left\{E_{lk}^{n-}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}\frac{P_k^{\omega}(x/a)\,x}{(a^2-x^2)^{\omega}} + \right.$$

$$\left. + (a_{kl} \mp E_{lk}^{n-})\,a^{1-\omega}\left(\frac{b}{x}\right)^{1+\nu}\frac{P_k^{\omega}(b/x)}{(x^2-b^2)^{\omega}}\right\} \tag{4.12}$$

$$(2E_{lk}^{n\pm} = D_{lk}^{n+} \pm D_{lk}^{n-}).$$

Коэффициенты D_{lk}^{n} определяются из формул (4.3), причем роль a_{kl} должны выполнять $\pm a_{kl}$, найденные по формулам (3.14) и (3.16).

Итак, формула (4.12) дает приближенное решение интегрального уравнения (1.11) с правой частью вида (4.10), а вместе с ним и решение тех контактных задач, которые к нему приводятся. При решении же последних, помимо контактного напряжения, которое в разбираемом случае можно вычислить, пользуясь формулой (4.12) и учитывая (1.12—1.14), часто интересуются интегралами от контактного напряжения.

В связи с этим вычислим интеграл

$$I_l(\nu, \omega) = \int_b^a \varphi_a^{(l)}(x)\,x^{\nu}\,dx = a^{1+\nu}\int_{\beta}^{1}\varphi_a^{(l)}(at)\,t^{\nu}\,dt. \tag{4.13}$$

Если ввести обозначения

$$b_k = \int_{\beta}^{1}\frac{t^{1+2\nu}P_k^{\omega}(t)\,dt}{(1-t^2)^{\omega}}, \qquad e_k = \beta^{1+\nu}\int_{\beta}^{1}P_k^{\omega}\left(\frac{\beta}{t}\right)\frac{dt}{t\,(t^2-\beta^2)^{\omega}} \tag{4.14}$$

и подставить (4.12) в (4.13), то после очевидной замены переменной интегрирования будем иметь

$$I_l(\nu, \omega) = a^{1+\nu-\omega}\left\{b_l + \sum_{k=0}^{n}\left[E_{lk}^{n+}b_k + \frac{\beta^{1+\nu}}{a^{\omega}}(a_{kl} \mp E_{lk}^{n-})\,e_k\right]\right\}. \tag{4.15}$$

Займемся вычислением интегралов, фигурирующих в (4.14). Очевидно, можем записать

$$b_k = \left(\int_0^1 - \int_0^{\beta}\right)\frac{t^{1+2\nu}P_k^{\omega}(t)}{(1-t^2)^{\omega}}\,dt.$$

Первый интеграл здесь легко вычисляется благодаря ортогональности многочленов Якоби (3.5). Для вычисления же второго интеграла следует, воспользовавшись формулой (3.13), разложить подынтегральное выражение в степенной ряд. В результате будем иметь

$$b_k = \frac{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1-\omega)}{2\Gamma(2+\nu-\omega)} - b_k^{*}(\beta), \qquad k = 0, 1, 2\cdots, \tag{4.16}$$

где

$$b_k^{*}(\beta) = \frac{\beta^{2(k+\omega)}(1+\mu)_k}{2(1+\mu)\,k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\omega-k)_j(1+\mu+k)_j}{j!\,(2+\mu)_j}\beta^{2j} =$$

$$= \frac{\beta^{2(k+\omega)}(1+\mu)_k}{2(1+\mu)\,k!}\,{}_2F_1(\omega-k,\ 1+\mu+k;\ 2+\mu;\ \beta^2).$$

При $k>1$, воспользовавшись формулой (3.13), можно убедиться, что

$$b_k^{*}(\beta) = \frac{\beta^{2(1+\omega)}}{2k}\,\frac{P_{k-1}^{\mu,1-\omega}(1-2\beta^2)}{(1-\beta^2)^{\omega-1}}, \qquad k=1,\ 2,\ 3\cdots. \tag{4.17}$$

Для вычисления интеграла, определяющего e_k, следует в (4.14) сделать замену $s=\beta t$. В результате будем иметь

$$e_k = \beta^{1+\mu-2\omega}\int_{\beta}^{1}\frac{s^{2\omega-1}}{(1-s^2)^{\omega}}\,P_k^{*}(s)\,ds. \tag{4.18}$$

Преобразовывая последний интеграл точно так же, как и интеграл, определяющий b_k (формула (4.14)), получим

$$e_k = \frac{\beta^{1+\mu}}{2}\left[\frac{\pi(1-\omega)_k(1-\omega+\mu)_k}{k!^2\sin\pi\omega\,\beta^{2\omega}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+\mu)_k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\omega-k)_j(1+\mu+k)_j}{j!\,(1+\mu)_j(\omega+j)}\beta^{2j}\right]. \tag{4.19}$$

Укажем еще на один способ вычисления интеграла (4.13), который может оказаться более удобным. При этом будем исходить из формулы (2.25), которую, учитывая (4.11), можем записать в виде

$$\varphi^{(1)}(x) = x^{\mu}\left[g_1^{*}\left(\frac{x}{a}\right) + \int_{\beta}^{1} g_1^{*}\left(\frac{bs}{a}\right)\varphi_2^{*}\left(s,\ \frac{x}{a}\right)\frac{ds}{s}\right]. \tag{4.20}$$

Принимая во внимание (2.23) и (3.10), найдем

$$\varphi_2^{*}(s,\ t) = \frac{\beta^{1-\mu}}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)\left[X_k^{+}(t) + X_k^{-}(t)\right]. \tag{4.21}$$

Если теперь вместо $X_k^{\pm}(t)$ ввести новые числовые неизвестные

$$x_k^{\pm} = \int_{\beta}^{1} t^{\mu+1}X_k^{\pm}(t)\,dt, \tag{4.22}$$

то в результате подстановки под интеграл (4.13) выражения (4.20) с использованием (4.21) будем иметь

$$I_1(\mu,\ \omega) = a^{1+\mu}\left[b_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x_k^{+} + x_k^{-})\,a_k\right]. \tag{4.23}$$

При этом x_k следует находить из бесконечной системы уравнений

$$x_j = \pm \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} x_k \pm b_j \mp \Theta e_j \quad (j = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4.24}$$

полученной из (3.11) путем ее интегрирования согласно (4.22).

Если довольствоваться приближенным значением для интеграла $I_l(\mu, \omega)$, то следует урезать (законность чего предполагаем) полученные бесконечные системы (4.24).

В заключение конкретизируем полученные формулы применительно к случаю, когда в упругое однородное полупространство ($\nu = 0$, $\omega = 1/2$) вдавливается кольцевой штамп с плоским основанием под действием внецентренно приложенной (эксцентриситет e) прижимающей силы. Обозначим угол наклона штампа через Θ, а осадку его — через δ. Тогда вместо (1.3) будем иметь

$$g(r, \varphi) = \delta + \Theta x = \delta + r\Theta \cos \varphi \tag{4.25}$$

и, соответственно, контактное напряжение будет определяться согласно (1.4) формулой

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + p_1(r) \cos \varphi. \tag{4.26}$$

При этом согласно (1.12), (4.10), (4.12)

$$g_0(r) = \delta\vartheta_0, \quad g_1(r) = (r\Theta)\vartheta_0, \quad E\vartheta_0 = 2(1 - \mu_*^2),$$

$$p_0(r) = \frac{\delta}{\vartheta_0}\frac{2}{\pi}\frac{\varphi_0^{(0)}(r)}{r}\Bigg|_{\mu=0,\ \nu=0}, \qquad p_1(r) = \frac{\Theta}{\vartheta_0}\frac{4}{\pi a}\frac{\varphi_\pi^{(0)}(r)}{r}\Bigg|_{\mu=1,\ \nu=0}. \tag{4.27}$$

Чтобы определить осадку и угол поворота штампа при заданных P и e будем исходить из условий равновесия штампа

$$\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le a} p(x, y)\, x^m dx dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} p(r, \varphi) \cos^m \varphi\, r^{m+1} dr d\varphi = Pe^m, \quad m = 0, 1.$$

Подставив сюда (4.26), получим

$$Pe^m \cdot 2^{1-m} = \int_0^a r p_m(r) r^m dr, \quad m = 0, 1 \tag{4.28}$$

или, учитывая (4.13), будем иметь

$$P = \frac{4\delta}{\vartheta_0} I_0\left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad Pe = \frac{4\Theta}{\vartheta_0 a} I_0\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

откуда найдем

$$\delta = \frac{P\vartheta_0}{4I_0(0, 1/2)}, \qquad \Theta = \frac{Pe\vartheta_0 a}{4I_0(1, 1/2)}.$$

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 20 VI 1966

Գ. ՅԱ. ՊՈՊՈՎ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՇՏԱՄՊԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրված է աստիճանային օրենքով փոփոխվող առաձգականության մոդուլ ունեցող, կիսատարածության կոնտակտային խնդիրների մոտավոր լուծումը: Որպես այդպիսին դիտարկվում են օղակային շտամպի տարածական կոնտակտային խնդիրը և երկու կոնտակտի տեղամասով հարթ խնդիրը: Երկու խնդիրներն էլ բերվում են մեկ առաջին սեռի տարբերական կորիզով ինտեգրալ հավասարման, որն այնուհետև բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման: Վերջինիս մոտավոր լուծման համար օգտագործվում են Յակոբիի բազմանդամների մի քանի հատկությունները, որոնք հայտնաբերվել են հեղինակի կողմից:

G. Ja. POPOV

ON AN APPROXIMATE METHOD OF SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM FOR ANNULAR PUNCH

S u m m a r y

A method to find the approximate solution of the contact problem for an elastic half-space with varying module of elasticity (the power law of change) is proposed. A spatial contact problem with ring domain of contact and a plane contact problem with two domains of contact are considered.

For both problems we have obtained the Fredholm integral equation of the first kind with kernel, depending on the difference of arguments which is reduced to an integral equation of the second kind. For the approximate solution of this integral equation a property of Jacobi polynomials, revealed by the author, is essentially used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губенко В. С., Моссаковский В. И.* Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство. ПММ, т. 24, вып. 2, 1960.
2. *Аркадьева Ю. О.* Задача о кольцевом штампе. Докл. АН УССР, № 3, 1962.
3. *Егоров К. Е.* Вдавливание в полупространство штампа с плоской подошвой кольцевой формы. Изв. АН СССР, ОТН, Механика, № 5, 1963.
4. *Гринберг Г. А.* Об интегральных уравнениях с ядром, зависящим от разности аргументов, и конечным промежутком изменения переменных. Докл. АН СССР, т. 128, № 3, 1959.
5. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, т. 27, в. 5, 1963.

6. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
7. *Кузнецов А. И.* Вдавливание жестких штампов в полупространство со степенным упрочнением и при нелинейной ползучести материала. ПММ, т. 26, вып. 3, 1962.
8. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
9. *Попов Г. Я.* Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта. ПММ, т. 26, вып. 1, 1962.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
11. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. Ж. техн. физики, т. 35, № 3, 1965.
12. *Фаддеев А. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1960.