

М. А. ЗАДОЯН

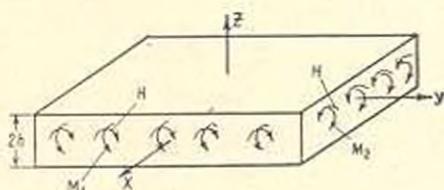
О ПОЛЗУЧЕСТИ ТОЛСТЫХ ПЛИТ ПРИ СОВМЕСТНОМ РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ

В данной статье, не пользуясь приближенными допущениями классической теории плит, даны решения задач об установившейся и неустановившейся ползучести [1, 2] прямоугольной и круглой плиты при совместном растяжении и изгибе. Рассмотрены также совместный изгиб, кручение и растяжение прямоугольной плиты. В этих случаях задача приводится к нелинейным уравнениям, требующим применения приближенных способов решения.

§ 1. Установившаяся ползучесть прямоугольной плиты при совместном изгибе и кручении. Рассмотрим ползучесть прямоугольной плиты, на торцах которой приложены изгибающие моменты M_1 , M_2 и крутящий момент H (фиг. 1).

Приведем общие уравнения установившейся ползучести [1]:
 уравнения равновесия —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

соотношения между компонентами напряжений и деформаций —

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \sigma &= f(\xi_i) \xi_x, & \tau_{xy} &= f(\xi_i) \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma &= f(\xi_i) \xi_y, & \tau_{yz} &= f(\xi_i) \gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z - \sigma &= f(\xi_i) \xi_z, & \tau_{xz} &= f(\xi_i) \gamma_{xz}, \\ \varepsilon_i &= f(\xi_i) \xi_i, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где интенсивность напряжений и интенсивность скоростей деформаций определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}, \\ \xi_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а компоненты скоростей деформаций связаны с компонентами скоростей зависимостями

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \xi_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \xi_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\chi_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & 2\chi_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & 2\chi_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Приведем сначала решения уравнений (1.1)–(1.5), когда скорости деформаций не зависят от x и y .

Полуобратным способом, примененным в [3], скорости ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= 2 \int \chi_{xz} dz + A_1 xz + C_1 yz + A_0 x + D_0 y + G_0 z + E_0, \\ v &= 2 \int \chi_{yz} dz + C_1 xz + B_1 yz + (2C_{11} - D_0) x + B_0 y + H_0 z + F_0, \\ w &= -\frac{A_1}{2} x^2 - \frac{B_1}{2} y^2 - \frac{A_1 + B_1}{2} z^2 - C_1 xy - G_0 x - H_0 y - (A_0 + B_0) z - Q_0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где χ_{xz} и χ_{yz} — неизвестные функции от z , а A_1, B_1, \dots — произвольные постоянные. Согласно (1.5) имеем

$$\xi_x = A_0 + A_1 z, \quad \xi_y = B_0 + B_1 z, \quad \chi_{xy} = C_0 + C_1 z. \quad (1.7)$$

Представляя некоторые компоненты напряжения в виде

$$\tau_x = \tau_x + (2\xi_x + \xi_v) f(\xi_t), \quad \tau_y = \tau_y + (\xi_x + 2\xi_v) f(\xi_t), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy} f(\xi_t), \quad (1.8)$$

подставляя в уравнения равновесия (1.1) и интегрируя, аналогично [3] получим

$$\tau_x = -a_1 x - b_1 y - c_0, \quad \tau_y = a_1 z + a_0, \quad \tau_{xy} = b_1 z + b_0, \quad (1.9)$$

где a_1, b_1, \dots — новые произвольные постоянные.

Вводя обозначения

$$S = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 + \chi_{xy}^2}, \quad T = \sqrt{\xi_{xz}^2 + \xi_{yz}^2} \quad (1.10)$$

будем иметь

$$\tau_x = \sqrt{S^2 f^2 + T^2}, \quad \tau_y = \sqrt{S^2 + \frac{T^2}{f}}. \quad (1.11)$$

При степенном упрощении

$$\tau_x = k \xi_x^m, \quad f = k \xi_x^{m-1}. \quad (1.12)$$

Тогда при помощи соотношений (1.11)–(1.12) приходим к степенному уравнению относительно f

$$S^2 f^{\frac{2m}{m-1}} + T^2 f^{\frac{2}{m-1}} = k^{\frac{2m}{m-1}}. \quad (1.13)$$

Определяя из этого уравнения f , получим явные выражения компо-

нентов напряжений и скоростей через координаты и произвольные постоянные.

Для рассматриваемой задачи (фиг. 1) компоненты скорости ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= A_1 xz + C_1 yz, & v &= C_1 xz + B_1 yz, \\ w &= -\frac{A_1}{2} x^2 - \frac{B_1}{2} y^2 - \frac{A_1 + B_1}{2} z^2 - C_1 xy. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тогда

$$\varepsilon_x = A_1 z, \quad \varepsilon_y = B_1 z, \quad \gamma_{xy} = C_1 z, \quad (1.15)$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \gamma |z|, \quad \gamma = \sqrt{A_1^2 + A_1 B_1 + B_1^2 + C_1^2}. \quad (1.16)$$

Компоненты напряжений возьмем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2A_1 + B_1) z f(\gamma |z|), & \sigma_y &= (A_1 + 2B_1) z f(\gamma |z|), \\ \tau_{xy} &= C_1 z f(\gamma |z|), & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в статические условия

$$\int_{-h}^h \sigma_x z dz = M_1, \quad \int_{-h}^h \sigma_y z dz = M_2, \quad \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz = H, \quad (1.18)$$

получим

$$A_1 = \frac{2M_1 - M_2}{6J}, \quad B_1 = \frac{2M_2 - M_1}{6J}, \quad C_1 = \frac{H}{2J}, \quad (1.19)$$

где

$$J = \int_{-h}^h f(\gamma |z|) z^2 dz. \quad (1.20)$$

Подставляя (1.19) в (1.16), получим

$$\gamma = \frac{M_1}{2\sqrt{3}J}, \quad M_1 = \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3H^2}. \quad (1.21)$$

При степенном упрочнении (1.13)

$$J = \frac{k^{\frac{1}{m}}}{(m+2)^{\frac{1}{m}}} M_1^{1-\frac{1}{m}} h^{1+\frac{2}{m}}. \quad (1.22)$$

Подставляя значения A_1 , B_1 и C_1 в (1.14), получим

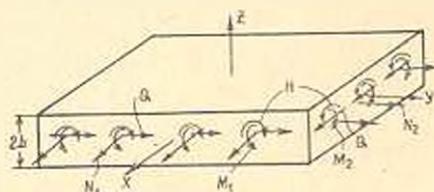
$$\begin{aligned} u &= \frac{2M_1 - M_2}{6J} xz + \frac{H}{2J} yz, & v &= \frac{2M_2 - M_1}{6J} yz + \frac{H}{2J} xz, \\ w &= -\frac{2M_1 - M_2}{12J} x^2 - \frac{2M_2 - M_1}{12J} y^2 - \frac{M_1 + M_2}{12J} z^2 - \frac{H}{2J} xy. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Компоненты напряжения (1.17) в случае (1.12) примут вид ($z > 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_1}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_y &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_2}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, \\ \tau_{xy} &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{H}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

В частном случае, когда плита подвергается чистому изгибу, $H = 0$.

Когда, кроме изгибающих M_1 , M_2 и крутящих H моментов, на торцах плиты приложены также растягивающие силы N_1 , N_2 и сдвигающая сила Q (фиг. 2), компоненты скорости будем искать в виде



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} u &= A_1 xz + C_1 yz + A_0 x, \\ v &= C_2 xz + B_1 yz + B_0 y. \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$w = -\frac{A_1}{2} x^2 - \frac{B_1}{2} y^2 - \frac{A_1 + B_1}{2} z^2 - C_1 xy - (A_0 + B_0) z,$$

а компоненты напряжения — в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= [2A_0 + B_0 + (2A_1 + B_1)z] f(\xi_1), & \sigma_y &= [A_0 + 2B_0 + (A_1 + 2B_1)z] f(\xi_1), \\ \tau_{xy} &= (C_0 + C_1 z) f(\xi_1), & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x + \gamma^2 z^2}, & \alpha^2 &= A_0^2 + A_0 B_0 + B_0^2 + C_0^2, \\ \beta^2 &= A_0 B_1 + 2A_0 A_1 + 2B_0 B_1 + B_0 A_1, & \gamma^2 &= A_1^2 + A_1 B_1 + B_1^2 + C_1^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Кроме (1.18), имеем также статические условия

$$\int_{-b}^b \sigma_x dz = N_1, \quad \int_{-b}^b \sigma_y dz = N_2, \quad \int_{-b}^b \tau_{xy} dz = Q. \quad (1.28)$$

Подставляя (1.26) и (1.18) и (1.28), находим

$$N_1 = (2A_0 + B_0) J_0 + (2A_1 + B_1) J_1, \quad N_2 = (A_0 + 2B_0) J_0 + (A_1 + 2B_1) J_1, \quad (1.29)$$

$$M_1 = (2A_0 + B_0) J_1 + (2A_1 + B_1) J_2, \quad M_2 = (A_0 + 2B_0) J_1 + (A_1 + 2B_1) J_2, \quad (1.30)$$

$$Q = C_0 J_0 + C_1 J_1, \quad H = C_0 J_1 + C_1 J_2, \quad (1.31)$$

где обозначено

$$J_n = \int_{-b}^b f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 z + \gamma^2 z^2}) z^n dz + (-1)^n \int_0^b f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 z + \gamma^2 z^2}) z^n dz \quad (1.32)$$

$$n = 0, 1, 2.$$

Когда заданы деформации, постоянные A_0, B_0, \dots становятся известными и тогда можно легко определить напряжения и внешние силы из (1.26) и (1.29)–(1.32). В случае заданных внешних сил (1.29)–(1.31) представляет систему шести уравнений с шестью неизвестными A_0, A_1, B_0, B_1, C_0 и C_1 , решение которой можно получить только при помощи приближенных приемов.

Аналогичная задача совместного изгиба, кручения и растяжения прямоугольной плиты для идеально-пластического материала рассмотрена в [4].

§ 2. Неустановившаяся ползучесть прямоугольной плиты при совместном изгибе и кручении. Рассмотрим задачу ползучести и релаксации прямоугольной плиты, материал которой подчиняется соотношениям наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова [2], а торцы нагружены изгибающими моментами $M_1(t), M_2(t)$ и крутищими моментами $H(t)$.

Наряду с уравнениями равновесия (1.1) имеем соотношения между компонентами напряжения и деформации

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \varepsilon_z, & \tau_{xz} &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \gamma_{xz}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\varphi(\varepsilon_i) = \sigma_i + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i K(t, \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

где σ_l и ε_l определяются по выражениям (1.4), а зависимость между перемещениями и деформациями—по (1.5), где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$ заменяем через $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$. Выведем решение системы приведенных уравнений ползучести, когда компоненты деформации зависят только от z и t . Аналогично § 1 положим

$$\begin{aligned} u &= 2 \int \gamma_{xz}(z, t) dz + A_1(t) xz + C_1(t) yz + A_0(t) x + \\ &\quad + D_0(t) y + G_0(t) z + E_0(t), \\ v &= 2 \int \gamma_{yz}(z, t) dz + C_1(t) xz + B_1(t) yz + [2C_0(t) - D_0(t)] x + \\ &\quad + B_0(t) y + H_0(t) z + F_0(t), \\ w &= -\frac{A_1(t)}{2} x^2 - \frac{B_1(t)}{2} y^2 - \\ &\quad - \frac{A_1(t) + B_1(t)}{2} x^2 - C_1(t) xy - G_0(t)x - H_0(t)y - [A_0(t) + B_0(t)]z - Q(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где γ_{xz} и γ_{xy} — неизвестные функции от z и t , а $A_1(t), \dots$ — произвольные функции от t .

Для деформации имеем

$$\varepsilon_x = A_0(t) + A_1(t)z, \quad \varepsilon_y = B_0(t) + B_1(t)z, \quad \gamma_{xy} = C_0(t) + C_1(t)z. \quad (2.4)$$

Решая (2.2) относительно ε_i и вводя обозначения

$$f_*(\varepsilon_i) = \frac{1}{\varepsilon_i} \left[\varphi(\varepsilon_i) + \int_0^t \varphi(\varepsilon_i) R(t, \tau) d\tau \right], \quad (2.5)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $-K(t, \tau)$, компоненты напряжений представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x + (2\varepsilon_x + \varepsilon_y) f_*(\varepsilon_i), & \tau_{xy} &= \gamma_{xy} f_*(\varepsilon_i), \\ \sigma_y &= \sigma_y + (\varepsilon_x + 2\varepsilon_y) f_*(\varepsilon_i). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнения равновесия (1.1) и интегрируя, аналогично [3] получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -a_1(t)x - b_1(t)y - C_0(t), \\ \tau_{xz} &= a_1(t)z + \alpha_0(t), \quad \tau_{yz} = b_1(t)z + b_0(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $a_1(t), \dots$ — также произвольные функции от t .

Используя обозначения, аналогичные (1.10)–(1.11), получим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра относительно f_*

$$V \sqrt{S^2 f_*^2 + T^2} = \varphi \left(\sqrt{S^2 - \frac{T^2}{f_*^2}} \right) + \int_0^t \varphi \left(\sqrt{S^2 + \frac{T^2}{f_*^2}} \right) R(t, \tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Для нашей задачи, аналогично § 1, перемещения ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= A_1(t)xz + C_1(t)yz, & v &= C_1(t)xz + B_1(t)yz, \\ w &= -\frac{A_1(t)}{2}x^2 - \frac{B_1(t)}{2}y^2 - \frac{A_1(t) + B_1(t)}{2}z^2 - C_1(t)xy. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= A_1(t)z, & \varepsilon_y &= B_1(t)z, & \gamma_{xy} &= C_1(t)z, \\ \varepsilon_i &= S = \gamma |z|, & \gamma &= \sqrt{A_1^2(t) + A_1(t)B_1(t) + B_1^2(t) + C_1^2(t)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Компоненты напряжения представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2A_1 + B_1)z f_*(\gamma |z|), & \tau_{xy} &= C_1 z f_*(\gamma |z|), \\ \sigma_y &= (A_1 + 2B_1)z f_*(\gamma |z|), & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Причем аргумент t иногда для простоты опускается. Из условий статки (1.18) будем иметь

$$M_1 = 2(2A_1 + B_1)J_z, \quad M_2 = 2(A_1 + 2B_1)J_z, \quad H = 2C_1J_z, \quad (2.12)$$

где

$$J_* = \int_0^h f_*(\gamma z) z^2 dz. \quad (2.13)$$

В случае релаксационной задачи, т. е. когда заданы деформации, A_1 , B_1 и C_1 будут известными, и по формулам (2.11) и (2.12) легко определить характер изменения напряжений и внешних моментов во времени. В частности, когда деформации во времени не меняются, то A_1 , B_1 и C_1 будут постоянными. Тогда

$$f_*(\gamma|z|) = \frac{\varphi(\gamma|z|)}{\gamma|z|} \chi(t), \quad \chi(t) = 1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Следовательно, напряжения (2.11) и моменты (2.12) во времени меняются по закону $\chi(t)$. Для реальных материалов χ — убывающая функция по t .

В случае ползучести, когда заданы внешние моменты, разрешая систему уравнений (2.12) относительно A_1 , B_1 и C_1 , получим

$$A_1(t) = \frac{2M_1(t) - M_2(t)}{6J_*(t)}, \quad B_1(t) = \frac{2M_3(t) - M_1(t)}{6J_*(t)}, \quad C_1(t) = \frac{H(t)}{2J_*(t)}. \quad (2.15)$$

Легко заметить, что

$$\gamma J_* - M_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{M_1^2 - M_1 M_3 + M_3^2 + 3H^2}. \quad (2.16)$$

Принимая для φ степенной закон $\varphi = k\varepsilon^m$, получим

$$\left(\frac{M_1}{J_*}\right)^m + \int_0^t \left(\frac{M_1}{J_*}\right)^m R(t, \tau) d\tau = \frac{m+2}{kh^{m+2}} M_1. \quad (2.17)$$

Отсюда

$$J_* = J_0 \frac{M_1(t)}{M_1(0)} \chi_*^{-\frac{1}{m}}(t), \quad J_0 = \frac{k^{\frac{1}{m}}}{(m+2)^{\frac{1}{m}}} M_1^{1-\frac{1}{m}}(0) h^{1+\frac{2}{m}}, \quad (2.18)$$

$$\chi_*(t) = \frac{M_1(t)}{M_1(0)} + \int_0^t \frac{M_1(\tau)}{M_1(0)} K(t, \tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Полагая в (2.11) $\varphi = k\varepsilon^m$ и учитывая полученные выше соотношения, для напряжения находим ($z > 0$)

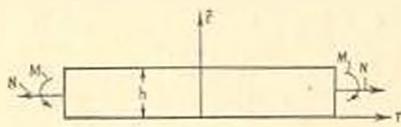
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_1(t)}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_y &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_2(t)}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, \\ \tau_{xy} &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{H(t)}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Имея значения $J_n(t)$, по формулам (2.9) и (2.15) легко определить компоненты перемещения. Общий множитель $\chi_*(t)$ характеризует закон возрастания деформаций во времени с учетом ползучести материала. При постоянных внешних моментах имеем $\frac{M_i(t)}{M_i(0)} = 1$ и

$$\chi_*(t) = 1 + \int_0^t K(t, \tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Когда, кроме моментов, на торцах плиты приложены растягивающие силы $N_1(t)$, $N_2(t)$ и сдвигающая сила $Q(t)$, компоненты перемещения, напряжения и внешние силы будут иметь аналогичный (1.25) — (1.32) вид с тем отличием, что A_0, B_0, \dots будут функциями от t , а вместо $f(z_i)$ будем иметь $f_*(z_i)$. В случае релаксационной задачи A_0, A_1, \dots будут известными, и по вышеуказанным соотношениям легко определить изменение во времени напряжений и внешних сил. При постоянных деформациях напряжения и внешние силы будут убывать во времени как функция $\chi(t)$.

§ 3. Установившаяся ползучесть круглой плиты при совместном изгибе и растяжении. Положим, что на боковой поверхности круглой плиты приложены равномерно распределенные изгибающие моменты и растягивающие силы N (фиг. 3). Уравнения равновесия осесимметричной задачи имеют вид



$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Фиг. 3.

Соотношения установившейся ползучести следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma &= f(\xi_i) \xi_r, & \sigma_z - \sigma &= f(\xi_i) \xi_z, \\ \sigma_\theta - \sigma &= f(\xi_i) \xi_\theta, & \tau_{rz} &= f(\xi_i) \tau_{rz}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\sigma_i = f(\xi_i) \xi_i, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2}, \\ \xi_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\xi_r - \xi_\theta)^2 + (\xi_\theta - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_r)^2 + 6\tau_{rz}^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Компоненты скорости деформаций и скорости связаны зависимостями

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{u}{r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.5)$$

Предполагая, что скорости деформаций не зависят от r , полуобратным способом для нашей задачи получим

$$\begin{aligned}
 u &= (A_0 + A_1 z) r, & w &= C - \frac{A_1}{2} r^2 - A_1 z^2 - 2A_1 z, \\
 \varepsilon_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = A_0 + A_1 z, & \varepsilon_z &= -2A_0 - 2A_1 z, & \gamma_{rz} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

где A_0, A_1, C — произвольные постоянные.

Принимая

$$\tau_r = \tau_0 - 3\varepsilon_r f(|\sqrt{3} \varepsilon_r|), \quad \tau_z = \tau_{rz} = 0,
 \tag{3.7}$$

удовлетворяем уравнениям равновесия (3.1).

Подставляя

$$\tau_r = 3(A_0 + A_1 z) f(|\sqrt{3} A_0 + A_1 z|)
 \tag{3.8}$$

в условия статики

$$\int_0^h \tau_r dz = N, \quad \int_0^h \tau_z dz = M
 \tag{3.9}$$

и полагая $\varepsilon_r > 0$ по всей толщине плиты, получим

$$N = \frac{1}{A_1} \int_{\sqrt{3} A_1}^{\sqrt{3}(A_0 + A_1 h)} f(x) x dx, \quad M = \frac{1}{A_1^2} \int_{\sqrt{3} A_1}^{\sqrt{3}(A_0 + A_1 h)} f(x) x^2 dx - \frac{A_0}{A_1} N.
 \tag{3.10}$$

Для степенного упрочнения (1.12) имеем

$$\tau_r = \tau_0 - 3 \frac{m+1}{2} (A_0 + A_1 z)^m,
 \tag{3.11}$$

$$N = \frac{3 \frac{m-1}{2} k}{(1+m) A_1} [(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}],
 \tag{3.12}$$

$$M = \frac{3 \frac{m-1}{2} k}{(2+m) A_1^2} [(A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}] - \frac{A_0}{A_1} N.
 \tag{3.13}$$

В случае, когда ε_r меняет знак, т. е. когда $\varepsilon_r < 0$ при $0 < z < z_0$ ($z_0 = -\frac{A_0}{A_1}$) и $\varepsilon_r > 0$ при $z_0 < z < h$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{A_1} \int_{-1\sqrt{3} A_1}^{1\sqrt{3}(A_0 - A_1 h)} f(x) x dx, \\
 M &= \frac{1}{\sqrt{3} A_1^2} \int_{1\sqrt{3}(A_0 + A_1 h)}^{\sqrt{3} A_1} f(x) x^2 dx + \frac{1}{1\sqrt{3} A_1^2} \int_{-1\sqrt{3} A_1}^{\sqrt{3} A_1} f(x) x^2 dx - \frac{A_0}{A_1} N.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Для степенного закона f имеем

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 3 \frac{m+1}{2} (A_0 + A_1 z) |A_0 + A_1 z|^{m-1}, \quad (3.15)$$

$$N = \frac{3 \frac{m+1}{2} k}{(1+m) A_1} [(A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}], \quad (3.16)$$

$$M = \frac{3 \frac{m+1}{2} k}{(2+m) A_1} [(A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}] - \frac{A_0}{A_1} N. \quad (3.17)$$

В случае чистого изгиба $N = 0$, $z_0 = \frac{1}{2} h$. Из (3.16)–(3.17) находим

$$A_0 = \left(1 + \frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{M^{\frac{1}{1+m}}}{3^{\frac{1}{2m}} k^{\frac{1}{m}}} \left(\frac{2}{h}\right)^{\frac{2}{m}}, \quad A_1 = \left(1 + \frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{M^{\frac{1}{1+m}}}{3^{\frac{1}{2m}} k^{\frac{1}{m}}} \left(\frac{2}{h}\right)^{1+\frac{2}{m}}. \quad (3.18)$$

Подставляя A_0 и A_1 в (3.15), получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{4M}{V 3 h^2} \left(\frac{2z}{h} - 1\right) \left|\frac{2z}{h} - 1\right|^{m-1}. \quad (3.19)$$

Закрепляя какую-нибудь точку плиты, например, принимая $w(0, 0) = 0$, получим $C = 0$. Тогда

$$u = A_1 \left(z - \frac{h}{2}\right) r, \quad w = A_1 \left(hz - \frac{r^2}{2} - z^2\right). \quad (3.20)$$

§ 4. Неустановившаяся ползучесть круглой плиты при совместном изгибе и растяжении. Рассмотрим совместный изгиб и растяжение круглой плиты (фиг. 3), материал которой подчиняется наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова [2]

$$\sigma_r - \sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_r, \quad \sigma_z - \sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_z, \quad (4.1)$$

$$\sigma_\theta - \sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_\theta, \quad \tau_{rz} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{rz},$$

$$\varphi(\varepsilon_i) = \sigma_i + \int_0^t \sigma_i K(t, \tau) d\tau, \quad (4.2)$$

где σ_i и ε_i определяются по (3.4), а зависимость между напряжениями и деформациями — по (3.5), где $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \dots$ заменяем через $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \dots$.

Компоненты перемещения и деформаций примем в виде

$$u = [A_0(t) + A_1(t)z]r, \quad w = C(t) - 2A_0(t)z - \frac{A_1(t)}{2}r^2 - A_1(t)z^2, \quad (4.3)$$

$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = A_0(t) + A_1(t)z, \quad \varepsilon_z = -2A_0(t) - 2A_1(t)z, \quad \gamma_{rz} = 0,$
где A_0, A_1, C — произвольные функции от t .

Компоненты напряжения будем искать в виде

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 3(A_0 + A_1 z) f_3(1/3 |A_0 + A_1 z|), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{rz} = 0. \quad (4.4)$$

Выражения (4.3)–(4.4) удовлетворяют всем уравнениям принятой теории ползучести.

Подставляя ε_r из (4.4) в интегралы (3.9), принимая для φ степенной закон $\varphi = k\varepsilon^m$, при $\varepsilon_r > 0$, $0 \leq z \leq h$ получим

$$N(t) = \frac{3^{-\frac{m-1}{2}} k}{1+m} \left| \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1} + \int_0^h \frac{(A_0 + A_1 \tau)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1} R(t, \tau) d\tau \right|, \quad (4.5)$$

$$M(t) = \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{2+m} \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}}{A_1^2} - \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{1+m} A_0 \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1^2} + \int_0^h \left| \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{2+m} \frac{(A_0 + A_1 \tau)^{m+2} - A_0^{m+2}}{A_1^2} - \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{1+m} A_0 \frac{(A_0 + A_1 \tau)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1^2} \right| R(t, \tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Когда ε , меняет знак, т. е. $\varepsilon_r < 0$ при $0 \leq z \leq z_0$ и $\varepsilon_r > 0$ при $z_0 < z \leq h$, будем иметь

$$N(t) = \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{1+m} \left| \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{A_1} + \int_0^h \frac{(A_0 + A_1 \tau)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{A_1} R(t, \tau) d\tau \right|, \quad (4.7)$$

$$M(t) = \frac{3^{-\frac{m-1}{2}} k}{2+m} \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}}{A_1^2} - \frac{3^{-\frac{m-1}{2}} k}{1+m} A_0 \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{A_1^2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{z_1} \left\{ \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k A_0 (A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1^2} \right\} R(t, z) dz. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

В случае релаксационной задачи, когда деформации не меняются во времени, A_0 и A_1 будут также постоянными во времени, и тогда

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r = \varepsilon_0 = \varepsilon_r^0(t) = \varepsilon_0^0(t), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{z2} = 0, \\
 N(t) = N_0^0(t), \quad M(t) = M_0^0(t), \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r^0 = \varepsilon_0^0 = 3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 z)^m, \\
 N_0 = \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1}, \quad (4.10) \\
 M_0 = \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \frac{A_0}{A_1} N_0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} z_r \geq 0 \\ 0 \leq z \leq h, \end{matrix} \\
 \varepsilon_r^0 = \varepsilon_0^0 = 3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 z) |A_0 + A_1 z|^{m-1}, \\
 N_0 = \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1}, \quad (4.11) \\
 M_0 = \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \frac{A_0}{A_1} N_0.
 \end{aligned}$$

при $z_r \leq 0$, $0 \leq z \leq z_1$, $z_r > 0$, $z_0 \leq z \leq h$.

Когда заданными являются $M(t)$ и $N(t)$, из (4.5)–(4.8) будем иметь

$$\frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1} = N(t) + \int_0^t N(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \\
 & - \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k A_0 (A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1^2} = M(t) + \int_0^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

при $z_r \geq 0$, $0 \leq z \leq h$;

$$\frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m-1} - (-A_0)^{m+1}}{1+m} = N(t) + \int_0^z N(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (4.14)$$

$$\frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_1)^{m+2}}{2+m} =$$

$$\frac{3^{\frac{m+1}{2}} k A_1 (A_0 + A_1 h)^{m-1} - (-A_0)^{m+1}}{1-m} = M(t) + \int_0^z M(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (4.15)$$

при $z_1 < 0, 0 < z < z_0, z_1 > 0, z_0 < z < h$.

Рассмотрим теперь частный случай чистого изгиба. Принимая $N(t) = 0$, из (4.14)–(4.15) получим

$$A_0(t) = -A_1(t) \frac{h}{2}, \quad A_1(t) = \left(1 + \frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{M^{\frac{1}{m}}(0)}{3^{\frac{1}{2m}} k^{\frac{1}{m}}} \gamma_{\frac{1}{m}}(t), \quad (4.16)$$

$$\gamma_{\frac{1}{m}}(t) = \frac{M(t)}{M(0)} = \int_0^z \frac{M(\tau)}{M(0)} K(t, \tau) d\tau. \quad (4.17)$$

Компоненты напряжения и перемещения в этом случае будут

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{4M(t)}{h^2} \left(\frac{2z}{h} - 1\right) \left|\frac{2z}{h} - 1\right|^{m-1},$$

$$u = A_1(t) \left(z - \frac{h}{2}\right) r, \quad w = A_1(t) \left(hz - z^2 - \frac{r^2}{2}\right).$$

Таким образом, напряжения меняются во времени по закону $M(t)$, а перемещения — по $\gamma_{\frac{1}{m}}(t)$ (4.17).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 V 1966

Մ Ս ՋԱՅՈՑՅԱՆ

ՀԱՄԱՏՈՂ ԶԿՐԱՆ ԵՎ ՄԻՐԱՆ ԳԵՊԵՈՒՄ ՀԱՍՏ ՈՍԱԿԻՐ
ՈՐՂԵՐ ՄԱՍԻՆ

Ս Վ Փ Ո Փ Ն Վ

ներկա հոդվածում, առանց դատման տեսությունների և նվազագույն-ներքին պատկերման արված են ուղղանկյուն և կլոր սալիկի մաքուր ծոման խնդիրների լուծումը կալույնացված սոլդի դեպքում:

Այդ խնդիրները լուծելիս օգտագործվում է կիրառականապարձ եղանակը: Տեղափոխումների արտահայտություն մեջ պարունակվում է z^2 անդամ, որը մտցնում է ուղղամ մոտափոր լուծման մեջ:

M. A. ZADOYAN

ON THE CREEP OF THICK PLATES UNDER COMBINED EXTENSION AND FLEXURE

S u m m a r y

In the present article, without using the assumptions of classical theories the solutions of the combined extension and flexure of rectangle and circular plates in the cases of stable and unstable creeps [1, 2] are given.

In solving these problems, the semireversal method is used.

The non-linear equations of these problems are to be solved by numerical methods approximately.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов А. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Работнов Ю. И. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. Զաօյան Մ. Ա. Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности. Докл. АН СССР, т. 156, № 1.
4. Զաօյան Մ. Ա. О двух задачах теории идеальной пластичности. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964.