ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

А. А. ХАЧАТРЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ, СЖИМАЕМОЙ РАДИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ, ПРИЛОЖЕННЫМИ ПО ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ

Рассматривается задача об устойчивости круглой кольцевой пластинки постоянной толщины, сжимаемой радиальными силами, равномерно распределенными по внешнему контуру, когда внутренний контур свободен от нагрузки. Эта задача исследовалась рядом авторов [1, 2], которые ограничивались рассмотрением лишь осесимметричной формы выпучивания пластинки. В настоящей работе эта задача решается при несимметричной форме потери устойчивости, когда выпученная срединная поверхность пластинки имеет один узловой диаметр, т. е. антисимметричную форму потери устойчивости.

Рассмотрим круглую тонкую пластинку радиуса a с концентрическим отверстием радиуса b, сжимаемую радиальными силами интенсивности P, равномерно распределенными по внешнему контуру.

Как известно [3], уравнение устойчивости пластинки в полярных координатах имеет вид

$$D\Delta\Delta w = -(T_r\varkappa_1 + T_\theta\varkappa_2 + S\tau), \tag{1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, w — прогиб, T_r, T_θ, S — внутренние погонные усилия,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \tag{2}$$

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varkappa_2 = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right), \quad \tau = -\frac{2}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \tag{3}$$

Внутренние погонные усилия определяются из решения задачи Ляме [4]. В рассматриваемом здесь случае для внутренних усилий будем иметь

$$T_r = -\frac{Pa^2}{a^2-b^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right), \qquad S = 0. \tag{4}$$
$$T_\theta = -\frac{Pa^2}{a^2-b^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right),$$

Подставляя выражения (4) в уравнение (1) и учитывая соотношения (2) и (3), получим

$$\Delta\Delta w + \alpha^2 \left[\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \Delta w - \frac{2b^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] = 0, \tag{5}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P}{(1-\lambda^2) D}, \qquad \lambda = \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Приведем выражения для изгибающих и крутящего моментов и перерезывающих сил, необходимых для рассмотрения граничных условий задачи

$$M_r = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2), \qquad Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w),$$

$$M_\theta = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), \qquad Q_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta w), \tag{7}$$

$$H_{r\theta} = \frac{1-\mu}{2} D\tau, \qquad V_r = Q_r - \frac{1}{r}\frac{\partial H_{r\theta}}{\partial\theta},$$

где V_r — обобщенная перерезывающая сила на линии $r = \mathrm{const}$, μ — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим два случая закрепления внешнего контура пластинки: шарнирное опирание и заделка.

В случае шарнирного опирания имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad r = a \quad w = 0, \quad M_r = 0, \\ &\text{при} \quad r = b \quad M_r = 0, \quad V_r = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

а в случае заделки имеем

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad r = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \\ &\text{при} \quad r = b \quad M_r = 0, \quad V_r = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Как видно, для решения поставленной задачи необходимо решить уравнение (5) с граничными условиями (8) или (9).

Представим w в виде

$$w(r, \theta) = W(r)\cos n\theta, \tag{10}$$

где n — целое число, представляющее собой число волн выпученной срединной поверхности пластинки в окружном направлении.

Подставляя (10) в (5) и заменяя

$$\alpha r = x, \tag{11}$$

получим относительно $W(x)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^4 W^{IV} + 2x^3 W''' + \{x^2 - [n(n-2) + \nu_0^2]\} x^2 W'' +$$

$$+ \{x^2 + [n(n-2) - \nu_0^2]\} x W' - n^2[x^2 - (2n^2 + 2n - 3 - \nu_0^2)] W = 0, \tag{12}$$

где

$$\nu_n = \sqrt{(n+1)^2 - \alpha^2 b^2}\,. \tag{13}$$

Краевые условия для $W(x)$ получим, если с учетом (11) подставим (10) в (8) и (9). Тогда для шарнирного опирания, после некоторого преобразования, будем иметь

$$\begin{array}{lrl}
1. & W = 0, & \\
2. & xW'' + \mu W' = 0, & \Big\}\ \text{при } x = \alpha a \\
3. & x^2 W'' + \mu x W' - n^2 \mu W = 0, & \\
4. & x^3 W''' - [(2n^2+1) - \mu(n^2-1)]\, x W' + 3n^2 W = 0, & \Big\}\ \text{при } x = \alpha b.
\end{array} \tag{14}$$

В случае же заделки остаются те же условия, кроме второго, которое заменяется условием

$$W' = 0 \quad \text{при} \quad x = \alpha a. \tag{15}$$

Общее решение уравнения (12) при произвольном значении n весьма трудно найти. Однако, при $n = 0$ [1] и $n = 1$, соответствующих осесимметричной и антисимметричной формам выпучивания пластинки, это уравнение решается достаточно просто. Для того, чтобы полученные ниже формулы, определяющие критические значения сжимающей силы, были бы справедливы и при $n = 0$ и при $n = 1$, поступаем следующим образом.

Рассмотрим уравнение

$$x^4 W^{IV} + 2x^3 W''' + \{x^2 - [n(n-2) + \nu_n^2]\}\, x^2 W'' -$$

$$- \{x^2 + [n(n-2) + \nu_n^2]\}\, x W' - [n^2 x^2 - n(n-2)(\nu_n^2 - 1)]\, W = 0. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что при $n = 0$ и $n = 1$ уравнения (12) и (16) совпадают. А общее решение уравнения (16) можно найти при любом n. Действительно, заменой

$$W' - \frac{n}{x} W = z \tag{17}$$

уравнение (16) приводится к виду

$$x\,[x^2 z'' + xz' + (x^2 - \nu_n^2)\, z]' - (n-1)\,[x^2 z'' + xz' + (x^2 - \nu_n^2)\, z] = 0. \tag{18}$$

Далее, заменой

$$x^2 z'' + xz' + (x^2 - \nu_n^2)\, z = y \tag{19}$$

получаем

$$xy' - (n-1)\, y = 0. \tag{20}$$

Интегрируя последовательно уравнения (20), (19) и (17), найдем общее решение уравнения (16). В этом решении нас будут интересовать только случаи $n = 0$ и $n = 1$. Чтобы не усложнять выкладки, некоторые постоянные интегрирования можно определить предварительно.

Из уравнения (20) имеем

$$y = Cx^{1-n}, \tag{21}$$

где C — постоянная интегрирования. Нетрудно показать, что для рассматриваемых здесь задач эта постоянная равна нулю. Для этого достаточно в уравнение (19), с учетом (21), подставить значение z согласно (17) и воспользоваться граничными условиями (14). Причем, при $n = 1$ надо учесть четвертое условие (14), а при $n = 0$ следует рассмотреть третье и четвертое условия одновременно. В результате этого из уравнения (19) будем иметь

$$z = C_1 J_{\nu_n}(x) + C_2 Y_{\nu_n}(x), \tag{22}$$

где $J_{\nu_n}(x)$, $Y_{\nu_n}(x)$ функции Бесселя первого и второго родов индекса ν_n, а из уравнения (17), с учетом (22), получим

$$W(x) = x^n \left\{ C_3 + \int \left[C_1 J_{\nu_n}(x) + C_2 Y_{\nu_n}(x) \right] \frac{dx}{x^n} \right\}. \tag{23}$$

Теперь, удовлетворяя первому условию (14), получим

$$W(x) = x^n \int_{\alpha a}^{x} \left[C_1 J_{\nu_n}(x) + C_2 Y_{\nu_n}(x) \right] \frac{dx}{x^n}. \tag{24}$$

Для определения входящих в выражение (24) постоянных интегрирования C_1 и C_2 следует использовать остальные граничные условия. А именно, в случае шарнирного опирания второе и третье условия (14), а при заделке—третье условие (14) и условие (15). Подставляя выражение (24) в указанные условия, для каждого случая закрепления получаем два линейных однородных уравнения относительно неизвестных постоянных C_1 и C_2.

Приравнивая нулю определители указанных систем, получим следующие трансцендентные уравнения для определения критических значений сжимающих сил:

в случае заделки

$$\frac{J_{\nu_n}(\alpha a)}{Y_{\nu_n}(\alpha a)} = \frac{\dfrac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} J_{\nu_n}(\alpha b) + J_{\nu_n-1}(\alpha b)}{\dfrac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} Y_{\nu_n}(\alpha b) - Y_{\nu_n-1}(\alpha b)}, \tag{25}$$

в случае шарнирного опирания

$$\frac{\dfrac{n+\mu-\nu_n}{\alpha a} J_{\nu_n}(\alpha a) + J_{\nu_n-1}(\alpha a)}{\dfrac{n+\mu-\nu_n}{\alpha a} Y_{\nu_n}(\alpha a) + Y_{\nu_n-1}(\alpha a)} = \frac{\dfrac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} J_{\nu_n}(\alpha b) - J_{\nu_n-1}(\alpha b)}{\dfrac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} Y_{\nu_n}(\alpha b) + Y_{\nu_n-1}(\alpha b)}. \tag{26}$$

Еще раз отметим, что выражения (25) и (26) справедливы лишь при $n = 0$ и $n = 1$.

Для определения критического значения сжимающей силы из (25) и (26), поступаем аналогично [1], т. е. при фиксированных значениях n и ν задаемся значением γ_n [illegible] γ_n и из выражения (13) определяем

$$\gamma b = \sqrt{\gamma_n^2 - (n+1)^2}. \tag{27}$$

Затем находим правую часть уравнения (25) или (26). После этого, учитывая, что $\gamma a = \gamma b/\lambda$, определяем то наибольшее значение $\lambda = \lambda^*$ (соответствующее наименьшему значению критической силы), при котором левая часть уравнения (25) или (26) становится равной ранее найденному значению правой части. Тогда, в силу соотношений (6) и (27), критическая сила будет определяться формулой

$$P_{кр} = \frac{D}{a^2}\,\frac{\gamma_n^2 - (n+1)^2}{\lambda^2}\,(1 - [illegible]). \tag{28}$$

Таким образом, задаваясь каждый раз значением γ_n, можно определить некоторое значение $\lambda = b/a$ и соответствующее им значение критической силы.

Результаты некоторых вычислений приведены в табл. 1—6. Причем, таблицы 1—4 относятся к случаю заделанной пластинки, а таблицы 5 и 6—к случаю шарнирного опирания.

В первых строках таблиц приведены наименьшие значения критических сил для сплошной пластинки ($\lambda = 0$), взятые из работы [5].

Таблица 1

$n = 0$, $\nu = 0.3$

γ_n	λ	Pa^2/D
	0	14.68
7.6	0.1612	13.5414
5.4	0.1996	13.5601
3.2	0.2812	14.5586
2	0.3807	17.6980
3	0.2923	25.0126
4	0.5589	33.0168
5	0.6054	41.4835
6	0.6494	50.3450
7	0.6680	59.5778
8	0.6906	69.1033

Таблица 2

$n = 1$, $\nu = 0.3$

γ_n	λ	Pa^2/D
	0	26.37
9.4	0.2003	25.4229
5.2	0.2982	23.0452
3	0.4228	22.9669
4	0.5397	29.1907
5	0.6014	37.0553
6	0.6425	45.5104
7	0.6728	54.3995
8	0.6966	63.6548
9	0.7160	73.2095
10	0.7323	83.0272

Таблица 3

$n = 0$, $\nu = 0.2$

γ_n	λ	Pa^2/D
	0	14.68
7.6	0.1585	14.0174
5.4	0.1960	14.0868
3.2	0.2759	15.1696
2	0.3755	18.2820
3	0.4877	25.6393
4	0.5552	33.6625
5	0.6023	42.1542
6	0.6378	51.0433
7	0.6658	60.2907
8	0.6886	69.8694

Таблица 4

$n=1, \quad \nu=0.2$

ν_n	λ	Pa^2/D
	0	26.37
9.4	0.1989	26.0434
5.2	0.2909	24.3368
3	0.4130	24.3096
4	0.5327	30.2958
5	0.5962	38.0809
6	0.6384	46.5101
7	0.6694	55.4190
8	0.6937	64.6662
9	0.7136	74.1946
10	0.7302	84.0588

Таблица 5

$n=0, \quad \nu=0.3$

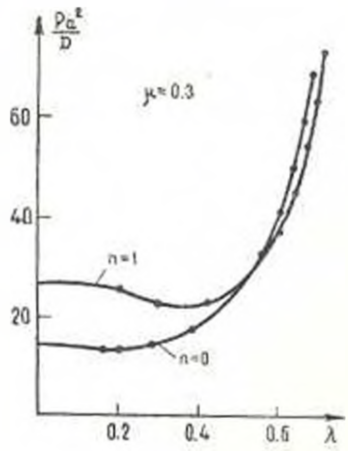
ν_n	λ	Pa^2/D
	0	4.196
7.6	0.3284	2.9878
5.4	0.4143	2.7151
3.2	0.5925	2.3110
2	0.7712	2.0441
3	0.8986	1.9074

Таблица 6

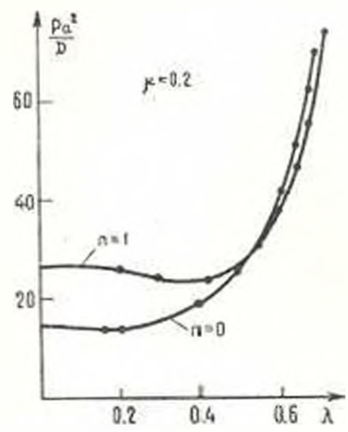
$n=1, \quad \nu=0.3$

ν_n	λ	Pa^2/D
	0	13.36
9.4	0.2876	11.7783
5.2	0.4455	9.0887
3	0.6579	6.5505
4	0.8315	5.3581

На основании приведенных здесь таблиц построены графики, показывающие закон изменения значений критических сил (Pa^2/D) в зависимости от отношения внутреннего и внешнего радиусов пластинки $(\lambda = b/a)$.

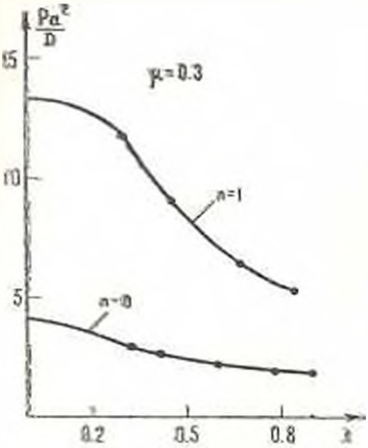


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Рассматривая таблицы и графики, заключаем, что характер изменения критической силы в зависимости от λ один и тот же как при симметричной, так и при антисимметричной формах выпучивания пластинки. Именно, в случае шарнирного опирания с увеличением λ критическая сила монотонно убывает (фиг. 3). В случае же заделки с увеличением λ критическая сила сначала убывает, а затем начинает достаточно быстро возрастать (фиг. 1, 2). С другой стороны, сравнение критических сил в случаях симметричного и несимметричного выпучиваний пластинки показывает, что здесь существенную роль играет вид закрепления края пластинки. Рассматривая устойчивость пластинки при шарнирном опирании и при заделке, получаем качественно различные результаты. Это различие заключается в том, что в случае шарнирного опирания при любом отношении b/a наименьшие



Фиг. 3.

значения критической силы получаются при симметричной форме выпучивания пластинки. А в случае заделки, начиная с некоторого значения отношения b/a, наименьшие значения критической силы уже не соответствуют симметричной форме выпучивания пластинки.

Институт математики и механики АН Армянской ССР

Поступило 5 III 1966

Ս. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՐՏԱՔԻՆ ԵԶՐՈՒՄ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ՃԱՌԱԳԱՅԹԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐՈՎ ՍԵՂՄՎԱԾ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Լուծված է արտաքին եզրագծով համասարաչափ սեղմված օղակաձև կլոր սալի կայունության խնդիրը, երբ սալը կորցնում է իր կայունությունը սիմետրիկ և անսիմետրիկ ձևերով: Դիտարկված են սալի արտաքին եզրագծի ամրացման երկու դեպք՝ հոդակապային ամրացում և ամրակցում: Այդ դեպքերի համար ստացված են հավասարումներ, որոնցից որոշվում են կրիտիկական ուժի արժեքները կախված սալի ներքին և արտաքին շառավիղների հարաբերությունից: Կրիտիկական ուժի համար բերված են աղյուսակներ և կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ:

A. A. KHACHATRIAN

STABILITY OF THE CIRCULAR RING PLATE COMPRESSED BY RADIAL FORCES, APPLIED ON THE EXTERNAL CONTOUR

Summary

The problem on the stability of the circular ring plate uniformly compressed on the external contour is considered. The problem is solved for symmetric and antisymmetric forms of disstability in two cases of plate fastening on the external contour (hinge supported and clamped).

The values of the critical force depending on external and internal plate radius ratio are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицено К. Б. и Граммель Р.* Техническая динамика, т. I. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
4. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
5. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III. Машгиз, М., 1959.