

М. А. АЛЕКСАНДРЯН

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА С КОМПЛЕКСНЫМ ИНДЕКСОМ ПРИ ЧИСТО МНИМЫХ АРГУМЕНТАХ

Многие задачи теории упругости, связанные с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат (сферических, сфероидальных, тороидальных и других), применяющихся при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида, приводятся к уравнению Лежандра [1], [2]

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0. \quad (1)$$

Как известно, решениями уравнения (1) являются функции Лежандра $P_n(z)$ и $Q_n(z)$. Эти функции достаточно хорошо изучены, и для них имеются интегральные представления, когда аргумент z действительный, а индекс n — любое комплексное число $\text{Re}(n) > -1$ [1], [2]. Эти интегральные представления успешно применяются при решении задач теории упругости методом интегральных преобразований [3]. Однако, при решении задач в сжатых сфероидальных координатах [1], [2], [4] встречаются функции Лежандра с чисто мнимым аргументом вида $P_{-\frac{1}{2} + i\eta}(i \text{sh } x)$ и $Q_{-\frac{1}{2} + i\eta}(i \text{sh } z)$, для которых не имеются интегральные представления. Некоторые вопросы, связанные с разложением произвольных функций в интеграл по сферическим функциям такого вида, исследованы в работе [5].

Настоящая заметка посвящена получению одного интегрального представления для этих функций.

Известно [6], что функция Лежандра первого рода $P_n(z)$ при любом комплексном n выражается через интеграл Шлеффли

$$P_n(z) = \frac{1}{2-i} \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - z)^{n+1}} dt, \quad (2)$$

где Γ — произвольный замкнутый контур, выбранный так, чтобы выражение $\frac{(t^2 - 1)^{n-1}}{(t - z)^{n+1}}$ с точками ветвления $(1, -1, z)$ приняло свое исходное значение при обходе контура Γ .

Если $\text{Re}(z) > 0$, то за контур Γ можно принять окружность с центром в точке z и с радиусом $(z^2 - 1)^{1/2}$, так как при этом точка $t = 1$ оказывается внутри, а $t = -1$ — вне контура Γ , и поэтому, как в этом легко убедиться, вышеуказанное условие выполняется [5].

Произведя под интегралом (2) замену переменных: $t = z + (z^2 - 1)^{1/2} e^{i\varphi}$ и $h = z + (z^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi$, где φ — промежуточный аргумент, для $P_n(z)$ получим формулу [5]

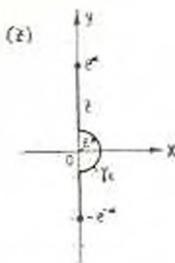
$$P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{z - (z^2 - 1)^{1/2}}^{z + (z^2 - 1)^{1/2}} \frac{h^n}{(1 - 2hz + h^2)^2} dh. \quad (3)$$

Здесь за контур интегрирования можно взять простую дугу, соединяющую отмеченные точки и оставляющую точку $h = 0$ слева [1].

В случае $\operatorname{Re}(z) > 0$, например, при $z = \cos \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) этой дугой может служить отрезок прямой, соединяющий точки $e^{-i\theta}$ и $e^{i\theta}$. При этом из (3) оказывается возможным получить интегральное представление для $P_n(\cos \theta)$, известное как интеграл Мелера-Дирихле

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \theta)}} d\varphi. \quad (4)$$

Однако, в интересующем нас случае чисто мнимых z , аналогичное преобразование будет возможным, если только за путь интегрирования взять вместо отрезка прямой контур, указанный на фиг. 1.



Фиг. 1.

где положено $z = i \operatorname{sh} z$ и, следовательно, концами контура будут $h = -ie^{-\varepsilon}$ и $h = ie^{-\varepsilon}$. Как видно из рисунка, путь интегрирования состоит из трех участков: прямой от точки $-ie^{-\varepsilon}$ до $-i\varepsilon$, полуокружности γ_ε радиуса ε и прямой от точки $i\varepsilon$ до $ie^{-\varepsilon}$. Докажем, что при $\operatorname{Re}(n) > -1$ за путь интегрирования опять можно взять отрезок прямой, соединяющий точки $-ie^{-\varepsilon}$ и $ie^{-\varepsilon}$, так как интеграл по полуокружности γ_ε стремится к нулю, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. В самом деле, полагая $h = \varepsilon e^{i\varphi}$, $n = \nu + i\tau$, получим

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{h^n}{(1 - 2i \operatorname{sh} z h + h^2)^2} dh = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-i\nu} e^{i(\nu + \tau)(\varphi + \frac{1}{2}\pi)} d\varphi}{(1 - 2ie^{-\varepsilon} \operatorname{sh} z + \varepsilon^2 e^{2i\varphi})^2},$$

откуда видно, что при $\operatorname{Re}(n) > -1$ этот интеграл стремится к нулю вместе с ε .

Таким образом, доказано, что

$$P_{-\nu - i\tau}(i \operatorname{sh} z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-ie^{-\varepsilon}}^{ie^{-\varepsilon}} \frac{h^{-\nu - i\tau}}{(1 - 2ih \operatorname{sh} z + h^2)^2} dh, \quad (5)$$

где в подынтегральном выражении аргументы многозначных функций должны быть выбраны так, чтобы $\arg(1 - 2ih \operatorname{sh} z + h^2)$ стремился к нулю, когда h стремится к $-\infty$ вдоль положительной действительной оси.

Полагая в формуле (5) $h = iy$, получим

$$P_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(i \operatorname{sh} z) = \frac{1}{\pi} \int_{-e^{-z}}^{e^{-z}} \frac{(iy)^{-z+it}}{1 - (e^{-z}-y)(e^{-z}+y)} dy + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-e^z}^{e^z} \frac{(iy)^{-z-it}}{1 - (e^z-y)(e^z+y)} dy. \quad (6)$$

Произведя замену переменных: в первом интеграле $y = e^{-z} - e^{-t}$, а во втором $y = e^z - e^t$, после ряда преобразований получим интегральное представление

$$P_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(i \operatorname{sh} z) = \frac{1-i}{2\pi} e^{\frac{\pi z}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-it}}{1 - 2(\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} z)} dt = \\ = \frac{1-i}{2\pi} e^{-\frac{\pi z}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{it}}{1 - 2(\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t)} dt, \quad (7)$$

которое после разделения вещественной и мнимой частей примет вид

$$P_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(i \operatorname{sh} z) = \frac{1}{2\pi} \left[e^{\frac{\pi z}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \tau t + \sin \tau t}{1 - \operatorname{sh} t - \operatorname{sh} z} dt = \right. \\ \left. + e^{-\frac{\pi z}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \tau t + \sin \tau t}{1 - \operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t} dt + \right. \\ \left. + i \left(e^{\frac{\pi z}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \tau t - \sin \tau t}{1 - \operatorname{sh} t - \operatorname{sh} z} dt - e^{-\frac{\pi z}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \tau t - \sin \tau t}{1 - \operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t} dt \right) \right]. \quad (7^*)$$

Однако, в приложениях удобно иметь вместо (7) и (7*) представления, содержащие интегралы лишь по одному из промежутков от z до ∞ ; от 0 до z или от 0 до $-\infty$ [1], [2], [3]. Пользуясь тождеством [1]

$$P_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(z) = P_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(z),$$

из (7*) легко получить следующие соотношения:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \tau t}{1 - \operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t} dt = -\operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \tau t}{1 - \operatorname{sh} t - \operatorname{sh} z} dt, \quad (8)$$

$$\int \frac{\cos \tau t}{|\operatorname{sh} \tau - \operatorname{sh} t|} dt = \operatorname{cth} \frac{\pi \tau}{2} \int \frac{\sin \tau t}{|\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \tau|} dt. \quad (9)$$

Эти соотношения позволяют придать формуле (7') окончательный вид

$$\begin{aligned} P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} z) &= \frac{\operatorname{cth} \pi \nu}{\pi} \left[\int \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} + \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{2}}{|\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \tau|} dt + \right. \\ &\quad \left. - \tau \int \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} - \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{2}}{|\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \tau|} dt \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичным образом из соотношений (8) и (9) можно получить интегральное представление для интеграла $(-\infty, \pi)$ в виде

$$\begin{aligned} P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau) &= \frac{\operatorname{cth} \pi \nu}{\pi} \left[\int \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} - \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{2}}{|\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t|} dt \right. \\ &\quad \left. - \tau \int \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} + \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{2}}{|\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t|} dt \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как дифференциальное уравнение Лежандра, решением которого является функция $P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)$, имеет действительные коэффициенты, то функции $\operatorname{Re}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)]$ и $\operatorname{Im}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)]$ также являются решениями этого дифференциального уравнения. Поэтому общее решение уравнения Лежандра можно представить в виде

$$C_1 \operatorname{Re}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)] + C_2 \operatorname{Im}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)].$$

В частных случаях, когда $C_2 = C_1$ и $C_1 = -C_2$, получаем следующие функции:

$$\begin{aligned} p_{\nu}(\tau) &= \frac{1}{2} \{\operatorname{Re}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)] + \operatorname{Im}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)]\} = \\ &= \frac{\operatorname{cth} \pi \nu \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2}}{\pi} \int \frac{\cos \tau t}{|\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \tau|} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} q_{\nu}(\tau) &= \frac{1}{2} \{\operatorname{Re}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)] - \operatorname{Im}[P_{-\nu, \nu, \nu}(i \operatorname{sh} \tau)]\} = \\ &= \frac{\operatorname{cth} \pi \nu \operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{2}}{\pi} \int \frac{\sin \tau t}{|\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \tau|} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

К функциям $p(z)$ и $q(z)$ можно придти также исходя из интегрального представления для функции Лежандра второго рода $Q_{n-1/2}(i \operatorname{sh} z)$. Учитывая формулы (8) и (9), функции $p(z)$ и $q(z)$ можно представить также в виде

$$p(z) = \frac{\operatorname{cth} \pi z \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2}}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{\sin \tau t}{|\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t|} dt - \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau t}{|\operatorname{sh} z + \operatorname{sh} t|} dt \right], \quad (12^*)$$

$$q(z) = \frac{\operatorname{cth} \pi z \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2}}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{\cos \tau t}{|\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t|} dt - \int_0^{\pi} \frac{\cos \tau t}{|\operatorname{sh} z + \operatorname{sh} t|} dt \right]. \quad (13^*)$$

Так как $p(z)$ и $q(z)$ имеют простой вид, то в приложениях вместо $P_{n-1/2}(i \operatorname{sh} z)$ и $Q_{n-1/2}(i \operatorname{sh} z)$ удобно пользоваться именно этими функциями [6].

Интегральное представление можно получить также и для $Q_{n-1/2}(i \operatorname{sh} z)$. Пользуясь [1] формулой

$$Q_n(z) = \int_0^{z-1} \frac{h^n}{(1-2zh+h^2)^{n+1}} dh, \quad (14)$$

при $z = i \operatorname{sh} z$ и $n = -\frac{1}{2} + i\tau$ получим

$$Q_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} z) = \int_0^{-ie^{-z}} \frac{h^{\tau}}{(1-2i \operatorname{sh} z h + h^2)^{\tau+1}} dh. \quad (15)$$

Сделав замену переменных по формуле $h = -ie^{-z}$, из (15) получим окончательное интегральное представление для $Q_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} z)$

$$Q_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh} z) = \frac{e^{-z}}{2} \left[\int_0^{\pi} \frac{\cos \tau t - \sin \tau t}{|\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} z|} dt - i \int_0^{\pi} \frac{\cos \tau t + \sin \tau t}{|\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} z|} dt \right].$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Получила 23 V 1966

Պ. Ա. ԱՂԵՐՆԱՅԱՆ

ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ԲԱՆԻՔԱՆԵՐԻ ԵՎ ԶՈՅՏ ԱՆՎՅԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ՄԱՏԻՄԱՏԻԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԻՆՏԵՐՆԱԿԱՆԱԿԱՆ ԳԻՐԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

Ա. Վ. Փ. Ա. Փ. Ա. Փ.

Հարգվածով ստացված է զուտ կեղծ արդյունքներով կեմանքի կոնսիստենտների մի ինտեգրալ ներկայացում: Այդպիսի ինտեգրալ ներկայացումները կարող են օգտագործվել մասնագիտական տեսությունների շարք ինդիվիդուալ սեկտորում սֆերիկալ կոորդինատներով բաժանված:

M. A. ALEXANDRIAN

ON AN INTEGRAL REPRESENTATION OF LEGENDRE'S
FUNCTIONS, EXPRESSED IN COMPLEX INDEX AND PURE
IMAGINARY ARGUMENT

S u m m a r y

In this paper we have arrived at an integral representation for Legendre's cone functions, expressed in pure imaginary argument. Such integral representations are made use of in dealing with a number of elasticity theory problems in spheroidal co-ordinates.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гибсон Е. В. Теория сферических и сфероидальных функций. Изд-во иностран. лит., М., 1952.
2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Госиздат, М., 1963.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные представления в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М—Л., 1963.
4. Арутюнян Н. Х., Абрамян Е. А. Кручение торуса тел. Физматгиз, М., 1963.
5. Лебедев Н. Н., Скольский И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, т. 20, вып. 2, 1966, 252—258.
6. Уинтлер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 2. Госиздат, М., 1963.
7. Баблюк А. А. Ряды и интегралы в теории интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.