ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

А. Ш. ПЕТОЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

1. Рассматриваются задачи о статической устойчивости и колебаниях прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, сжатой вдоль одной из сторон равномерно распределенными усилиями T. Полагается, что пластинка шарнирно закреплена по всему контуру, а плоскости изотропии параллельны срединной плоскости пластинки.

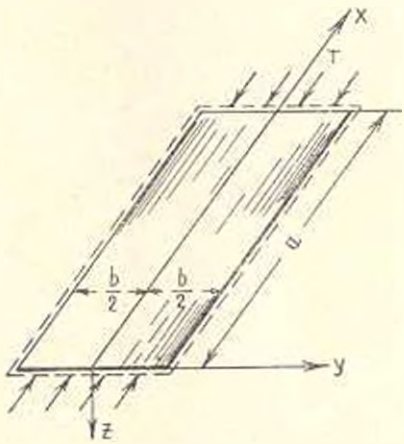
В статье [7] уточненная теория изгиба пластинки во втором приближении приведена к интегрированию уравнений

$$\nabla^4\Phi_0 = \frac{q}{D}, \tag{1.1}$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{2}{\xi_0 h^2}\varphi = 0, \tag{1.2}$$

где D — цилиндрическая жесткость, h — полутолщина,

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \xi_0 = \frac{G}{G_1}, \tag{1.3}$$



Фиг. 1.

q — интенсивность нормальной к поверхности пластинки нагрузки, E и G — упругие постоянные в плоскостях изотропии, G_1 — модуль сдвига в перпендикулярном к плоскости изотропии направлении, Φ_0 и φ — искомые функции, зависящие от координат x и y.

2. При рассмотрении задачи о статической устойчивости пластинки в правой части уравнения (1.1) вместо q нужно подставить

$$q = -T\partial_1^2 w_0. \tag{2.1}$$

Тогда (1.1) примет вид

$$\nabla^4\Phi_0 = -\frac{T}{D}\partial_1^2 w_0. \tag{2.2}$$

Задача приводится к интегрированию уравнений (2.2) и (1.2) при статических и кинематических краевых условиях, налагаемых на изгибающие моменты M_1 и M_2, прогиб w_0, элементарные вращения ω_1 и ω_2 на контуре пластинки.

Перечисленные величины определяются через функции Φ_0 и φ формулами

$$w_0 = \left[1 - \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)} h^2\nabla^2\right]\Phi_0,$$

$$M_1 = -D\left[\frac{4}{5} s_0(1-\mu)\,\partial_1\partial_2\varphi + \left(\partial_1^2\Phi_0 + \mu\partial_2^2\Phi_0 - \frac{2}{5}\mu_2 h^2\partial_2^2\nabla^2\Phi_0\right)\right],$$

$$M_2 = D\left[\frac{4}{5} s_0(1-\mu)\,\partial_1\partial_2\varphi - \left(\partial_2^2\Phi_0 + \mu\partial_1^2\Phi_0 - \frac{2}{5}\mu_2 h^2\partial_1^2\nabla^2\Phi_0\right)\right], \tag{2.3}$$

$$n_1 = \frac{1}{3} s_0\partial_2\varphi + \left[1 - \frac{7}{15}\cdot\frac{s_0^2 - \mu_2}{1-\mu} h^2\nabla^2\right]\partial_1\Phi_0,$$

$$n_2 = -\frac{1}{3} s_0\partial_1\varphi + \left[1 - \frac{7}{15}\cdot\frac{s_0^2 - \mu_2}{1-\mu} h^2\nabla^2\right]\partial_2\Phi_0.$$

Подставляя значения w_0 из (2.3) в (2.2), получим

$$\nabla^4\Phi_0 = -\frac{T}{D}\,(1 - k_1\nabla^2)\,\partial_1^2\Phi_0. \tag{2.4}$$

Представим интеграл уравнения (2.4) в виде

$$\Phi_0 = Y(y)\sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{2.5}$$

где $Y(y)$ — функция, зависящая только от y.

Внеся (2.5) в (2.6), получим для Y уравнение

$$Y^{IV} - b_1 Y^{II} + b_2 Y = 0, \tag{2.6}$$

где $\qquad b_1 = \lambda^2\left(2 - \frac{T}{D}k\right), \qquad b_2 = \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{T}{D}\lambda^2 k - \frac{T}{D}\right),$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \qquad k_1 = \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)} h^2, \tag{2.7}$$

$$\mu_2 = \frac{E}{E_1}\mu_1.$$

Из характеристического уравнения для (2.7)

$$r^4 - b_1 r^2 + b_2 = 0 \tag{2.8}$$

получим

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}}, \qquad \gamma_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}}. \tag{2.9}$$

Здесь

$$b_1^2 - 4b_2 = \left(\frac{T}{D}\lambda^2 k_1\right)^2 + 4\lambda^2\frac{T}{D}.$$

Ниже будет показано, что при потере устойчивости $b_1^2 - 4b_2 > b_1$, следовательно, корни $\gamma_{1,2}$ будут действительными, а $\gamma_{3,4}$ — мнимыми.

Обозначив

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}}, \qquad \beta_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_2} - b_1}{2}}, \tag{2.10}$$

интеграл уравнения (2.6) получим в виде

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha_0 y + C_2 \operatorname{sh} \alpha_0 y + C_3 \cos \beta_0 y + C_4 \sin \beta_0 y. \tag{2.11}$$

Аналогичным образом полагаем в (1.2)

$$\varphi = \theta(y) \cos \frac{m\pi x}{a}, \tag{2.12}$$

где $\theta(y)$ — функция от y.

Подставляя (2.12) в (1.2), получим

$$\theta'' - \tau_0^2 \theta = 0, \quad \tau_0^2 = \left(\lambda^2 - \frac{2}{s_0 h^2}\right). \tag{2.13}$$

Из характеристического уравнения для (2.13)

$$\varkappa^2 - \tau_0^2 = 0 \tag{2.14}$$

имеем

$$\varkappa_{1,2} = \pm \tau_0. \tag{2.15}$$

Поэтому для $\theta(y)$ получаем

$$\theta(y) = C_5 \operatorname{ch} \tau_0 y + C_6 \operatorname{sh} \tau_0 y. \tag{2.16}$$

Выбранные функции Φ_0 и φ в виде (2.5) и (2.12) удовлетворяют граничным условиям $w_0 = M_1 = \omega_2 = 0$ на кромках $x = 0$, $x = a$. Постоянные интегрирования C_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$, входящие в (2.11) и (2.15), определяются из граничных условий, налагаемых на края пластинки $y = \pm \frac{b}{2}$.

Задача упрощается, если учесть симметрию упругой поверхности пластинки относительно оси x.

Выражения (2.3) дают

$$w_0 = [C_1(1 + k_1\lambda^2 - k_1\alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 y + C_3(1 + k_1\lambda^2 + k_1\beta_0^2) \cos \beta_0 y] \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$M_2 = -D \Big\{ \frac{4}{5} \lambda s_0 (1 - \mu) \tau_0 \operatorname{ch} \tau_0 y \cdot C_6 + [\alpha_0^2(1 - k_2\lambda^2) +$$

$$+ \lambda^2(k_2\lambda^2 - \mu)] \operatorname{ch} \alpha_0 y \cdot C_1 + [\beta_0^2(k_2\lambda^2 - 1) + \lambda^2(k_2\lambda^2 - \mu)] \cos \beta_0 y \cdot C_3 \Big\} \sin \frac{m\pi x}{a}. \tag{2.17}$$

$$\omega_1 = \left[\frac{1}{3} s_0 \cdot \gamma_0 \operatorname{ch} \gamma_0 y \cdot C_0 + \lambda (1 + k_3\lambda^2 - k_3\alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 y \cdot C_1 + \right.$$

$$\left. + \lambda (1 + k_3\lambda^2 + k_3\beta_0^2) \cos \beta_0 y \cdot C_3 \right] \cos \frac{m\pi x}{a},$$

где введены обозначения

$$k_2 = -\frac{2}{5} \nu_2 h^2, \qquad k_3 = \frac{7}{15} \cdot \frac{s_1^2 - \nu_1}{1 - \nu} h^2. \tag{2.18}$$

Граничные условия

$$w_0 = M_2 = \omega_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = \frac{b}{2} \text{ записываются так:}$$

$$(1 + k_1\lambda^2 - k_1\alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 \frac{b}{2} \cdot C_1 + (1 + k_1\lambda^2 + k_1\beta_0^2) \cos \beta_0 \frac{b}{2} \cdot C_3 = 0,$$

$$\frac{4}{5} \lambda s_0 (1 - \mu) \gamma_0 \operatorname{ch} \gamma_0 \frac{b}{2} \cdot C_0 + [\alpha_0^2 (1 - k_2\lambda^2) + \lambda^2 (k_2\lambda^2 - \mu)] \operatorname{ch} \alpha_0 \frac{b}{2} \cdot C_1 +$$

$$+ [\beta_0^2 (k_2\lambda^2 - 1) + \lambda^2 (k_2\lambda^2 - \mu)] \cos \beta_0 \frac{b}{2} \cdot C_3 = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{3} s_0 \cdot \gamma_0 \operatorname{ch} \gamma_0 \frac{b}{2} \cdot C_0 + \lambda (1 + k_3\lambda^2 - k_3\alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 \frac{b}{2} \cdot C_1 +$$

$$+ \lambda (1 + k_3\lambda^2 + k_3\beta_0^2) \cos \beta_0 \frac{b}{2} \cdot C_3 = 0.$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.19), находим

$$\cos \beta_0 \frac{b}{2} = 0, \tag{2.20}$$

следовательно,

$$\beta_0 = \frac{2n - 1}{b} \pi \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{2.21}$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0} - b_1}{2}} = \frac{2n - 1}{b} \pi. \tag{2.22}$$

Из уравнения (2.22) находим

$$T = \frac{D \left[\frac{(2n - 1)^2}{b^2} \pi^2 + \lambda^2 \right]^2}{\lambda^2 \left[1 + k_1\lambda^2 + \frac{(2n - 1)^2}{b^2} \pi^2 k_2 \right]}. \tag{2.23}$$

Для того, чтобы получить первую критическую нагрузку, надо положить $n = 1$, поэтому

$$T^* = \frac{D\pi^2}{b^2} \frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m}\right)^2}{1 + k\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right)}, \tag{2.24}$$

где

$$c = \frac{a}{b}, \qquad k = \frac{8s_0^2 - 3\mu_0}{10(1-\mu)} \pi^2 \cdot \frac{h^2}{b^2}. \tag{2.25}$$

При $k = 0$ формула (2.25) даст значение критической нагрузки, определяемой классической теорией.

Обозначим

$$\psi(c) = \frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m}\right)^2}{1 + k\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right)}. \tag{2.26}$$

Приравнивая нулю первую производную функции $\psi(c)$, находим те значения c, для которых критическая нагрузка принимает минимальные значения

$$\psi'(c) = 0, \qquad c = m\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}. \tag{2.27}$$

Подставляя значение c из (2.27) в (2.26), получаем

$$\psi_{\min} = \frac{4}{(1+k)^2}, \tag{2.28}$$

$$T^*_{\min} = \frac{D\pi^2}{b^2} \frac{4}{(1+k)^2}. \tag{2.29}$$

Для графического построения функции $\psi(c)$ определим координаты точек пересечения кривых устойчивости при переходе от m к $m+1$ полуволнам

$$\frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m}\right)^2}{1 + k\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right)} = \frac{\left(\frac{m+1}{c} + \frac{c}{m+1}\right)^2}{1 + k\left[1 + \frac{(m+1)^2}{c^2}\right]}. \tag{2.30}$$

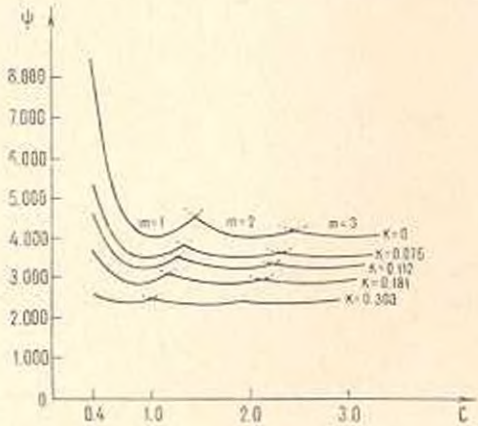
Из равенства (2.30) определяем абсциссу точки пересечения двух соседних кривых устойчивости

$$\bar{c} = \left[\frac{\sqrt{4m^2(m+1)^2 + k^2(2m+1)^2} - k(2m^2 + 2m + 1)}{2(1+k)}\right]^{1/2}. \tag{2.31}$$

Подставляя (2.31) в (2.26), получим выражение для ординаты этой точки

$$\bar{\psi} = \frac{(2m^2+2m+1)\sqrt{4m^2(m+1)^2+k^2(2m+1)^2}+4m^2(m+1)^2-k(2m+1)^2}{2m^2(m+1)^2(1-k)^2}. \tag{2.32}$$

На фиг. 2 представлены графики функции $\psi(c)$. По оси абсцисс отложено отношение сторон $\frac{a}{b}=c$, а по оси ординат $\psi(c)$. Для некоторых фиксированных значений k построены кривые $\psi(c)$, соответствующие $m=1, 2, 3, 4\cdots$. Для каждого $m=1, 2, 3, 4,\cdots$ $\psi(c)$ имеет единственную точку минимума с абсциссой $c=m\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$.



Фиг. 2.

Части кривых $\psi(c)$, показанных сплошными линиями, определяют значения критической нагрузки для данного значения $c=\frac{a}{b}$.

Для коротких пластинок кривая устойчивости, соответствующая $m=1$, дает наименьшие значения критической нагрузки, а для сравнительно длинных пластинок минимальные значения для критической нагрузки получаются при $m>1$.

Все данные, необходимые для построения графиков функции ψ, помещены в приводимых ниже таблицах.

В табл. 1 и 2 приведены значения координат характерных точек функции $\psi(c)$ при $\nu=0{,}3$.

В табл. 3 даны координаты точек кривой $\psi(c)$ для разных значений k.

Таблица 1

$$\frac{h}{b}=\frac{1}{10}$$

			Точки min		$m=1$		$m=2$		$m=3$	
$\frac{G}{G_1}$	$\frac{E}{E_1}$	k	c_m	$\psi_{\min}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$
0	0	0	1,0	4	1,414	4,500	2,443	4,167	3,464	4,083
2	2	0,207	0,810	2,746	1,117	2,999	1,942	2,816	2,800	2,780
3	3	0,308	0,727	2,338	1,004	2,510	1,758	2,383	2,580	2,360
4	4	0,414	0,644	2,000	0,864	2,074	1,549	2,021	2,206	2,013
5	5	0,513	0,570	1,748	0,752	1,791	1,365	1,764	1,944	1,756

Таблица 2

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{20}$$

			Точки min		$m=1$		$m=2$		$m=3$	
$\frac{G}{G_1}$	$\frac{E}{E_1}$	k	c_m	$\psi_{\min}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$
0	0	0	1,0	4,00	1,414	4,500	2,405	4,167	3,464	4,083
2	2	0,052	0,949	3,613	1,195	4,086	2,327	3,749	3,285	3,682
3	3	0,076	0,926	3,448	1,295	3,820	2,363	3,590	3,275	3,485
4	4	0,104	0,901	3,281	1,258	3,602	2,304	3,391	3,114	3,336
5	5	0,128	0,880	3,145	1,223	3,433	2,213	3,152	3,044	3,194

Таблица 3

$c \diagdown k$	0	0,052	0,076	0,104	0,128	0,207	0,308	0,414
0,4	8,410	6,107	5,422	4,785	4,362	3,363	2,523	2,102
0,5	6,250	4,960	4,528	4,112	3,811	3,071	2,461	2,036
0,6	5,139	4,295	3,993	3,689	3,463	2,884	2,375	2,004
0,7	4,537	3,918	3,686	3,447	3,266	2,790	2,343	2,009
0,8	4,202	3,708	3,516	3,318	3,164	2,746	2,349	2,040
0,9	4,044	3,623	3,456	3,282	3,145	2,766	2,396	2,043
1,0	4,000	3,623	3,472	3,311	3,185	2,814	2,475	2,188
1,1	4,036	3,656	3,513	3,391	3,271	2,929	2,584	2,298
1,2	4,127	3,793	3,655	3,507	3,390	3,053	2,708	2,418
1,3	4,285	3,957	3,822	3,676	3,560	3,222	2,876	2,583
1,4	4,469	4,142	4,012	3,863	3,746	3,404	3,051	2,750

3. Рассмотрим теперь задачу о собственных колебаниях пластинки, нагруженной вдоль одной из сторон постоянной, равномерно распределенной нагрузкой T_0. Для получения уравнения о собственных колебаниях пластинки в правой части уравнения (1.1) вместо q нужно подставить

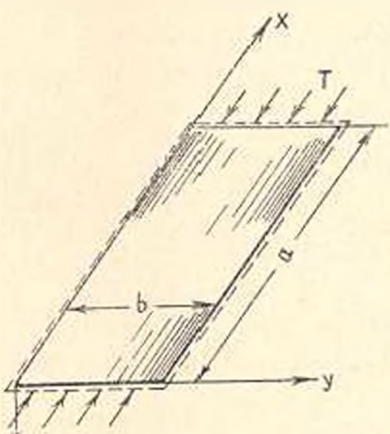
$$q = -T_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где γ_0 — удельный вес материала пластинки,

g — ускорение силы тяжести,

h — полутолщина пластинки,

$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$ — ускорение точки срединной поверхности пластинки.



Фиг. 3.

Разрешающие уравнения (1.1) и (1.2) при этом примут вид

$$\nabla^4 \Phi_0 = -\frac{T_0}{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\gamma_0 h}{Dg} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{2}{s_0^2 h^2} \varphi = 0. \quad (3.3)$$

Задача приводится к интегрированию уравнений (3.2) и (3.3) при кинематических и статических краевых условиях, налагаемых на изгибающие моменты M_1 и M_2, прогиб w_0 и элементарные вращения ω_1 и ω_2. Перечисленные величины определяются через две функции Φ_0 и φ формулами (2.3).

Подставляя значение w_0 из (2.3) в (3.2), получим

$$\nabla^4\Phi_0 = -\frac{T_0}{D}(1 - k_1\nabla^2)\frac{\partial^2\Phi_0}{dx^2} - \frac{2\gamma_0 h}{Dg}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(1 - k_1\nabla^2)\Phi_0. \qquad (3.4)$$

Представим интеграл уравнения (3.4) в виде

$$\Phi_0 = Q(y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t, \qquad (3.5)$$

где $Q(y)$ — функция, зависящая только от y.

Внеся (3.5) в (3.4), для Q получим уравнение

$$Q^{IV} - a_1 Q^{II} + a_2 Q = 0, \qquad (3.6)$$

где

$$a_1 = \lambda^2\left(2 - \frac{T_0}{D}k_1\right) - \frac{2\gamma_0 h}{gD}k\omega^2,$$

$$a_2 = \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{T_0}{D} - \frac{k_1 T_0}{D}\lambda^2\right) - \frac{2\gamma_0 h}{gD}(1 + k_1\lambda^2)\omega^2, \qquad (3.7)$$

$$k_1 = \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)}h^2, \qquad \lambda = \frac{m\pi}{a},$$

ω — частота колебаний.

Из характеристического уравнения для (3.6)

$$l^4 - a_1 l^2 + a_2 = 0 \qquad (3.8)$$

получим

$$l_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}}, \qquad l_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a^2}}{2}} \qquad (3.9)$$

Можно показать, что $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} > a_1$, $a_1^2 - 4a_2 > 0$, поэтому корни $l_{1,2}$ будут действительными, а $l_{3,4}$ — мнимыми.

Обозначив

$$\alpha_0' = \sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}}, \qquad \beta_0' = \sqrt{\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2} - a_1}{2}}, \qquad (3.10)$$

интеграл уравнения (3.6) получим в виде

$$Q(y) = C_1\operatorname{ch}\alpha_0' y + C_2\operatorname{sh}\alpha_0' y + C_3\cos\beta_0' y + C_4\sin\beta_0' y. \qquad (3.11)$$

Аналогичным образом полагаем в (3.3)

$$\varphi = R(y)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t, \qquad (3.12)$$

где $R(y)$ — функция от y.

Подставляя (3.12) в (3.3), получим дифференциальное уравнение относительно $R(y)$

$$R'' - \tau_0^2 R = 0, \qquad (3.13)$$

где

$$\tau_0^2 = \left(\lambda^2 - \frac{2}{s_0 h^2}\right).$$

Из характеристического уравнения для (3.13)

$$\gamma^2 - \tau_0^2 = 0 \qquad (3.14)$$

имеем

$$\gamma = \pm\tau_0, \qquad (3.15)$$

поэтому для $R(y)$ получим

$$R(y) = C_5 \operatorname{ch}\tau_0 y + C_6 \operatorname{sh}\tau_0 y. \qquad (3.16)$$

Выбранные функции Φ_6 и φ в виде (3.5) и (3.12) удовлетворяют граничным условиям

$$w_0 = M_1 = \omega_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a. \qquad (3.17)$$

Постоянные интегрирования, входящие в (3.11) и (3.16), определяются из граничных условий, налагаемых на края пластинки,

$$w_0 = M_2 = \omega_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b. \qquad (3.18)$$

Подставляя (3.11) и (3.16) соответственно в (3.5) и (3.12), из (2.3) для w_0, M_2 и ω_1 получим

$$w_0 = [(1 + k_1\lambda^2 - k_1\alpha_0'^2)\operatorname{ch}\alpha_0' y \cdot C_1 + (1 + k_1\lambda^2 - k_1\alpha_0'^2)\operatorname{sh}\alpha_0' y \cdot C_2 +$$

$$+ (1 + k_1\lambda^2 + k_1\beta_0'^2)\cos\beta_0' y \cdot C_3 + (1 + k_1\lambda^2 + k_1\beta_0'^2)\sin\beta_0' y \cdot C_4]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t, \qquad (3.19)$$

$$M_2 = -D\Big\{\frac{4}{5}s_0\lambda\tau_0(1 - \nu)(\operatorname{sh}\tau_0 y \cdot C_5 + \operatorname{ch}\tau_0 y \cdot C_6) + [\alpha_0'^2(1 - k_2\lambda^2) +$$

$$+ \lambda^2(k_2\lambda^2 - \nu)]\operatorname{ch}\alpha_0' y \cdot C_1 + [\alpha_0'^2(1 - k_2\lambda^2) + \lambda^2(k_2\lambda^2 - \nu)]\operatorname{sh}\alpha_0' y \cdot C_2 +$$

$$+ [\beta_0'^2(k_2\lambda^2 - 1) + \lambda^2(k_2\lambda^2 - \nu)]\cos\beta_0' y \cdot C_3 +$$

$$+ [\beta_0'^2(k_2\lambda^2 - 1) + \lambda^2(k_2\lambda^2 - \nu)]\sin\beta_0' y \cdot C_4\Big\}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\omega t,$$

$$\omega_1 = \Big\{\frac{1}{3}s_0\tau_0(\operatorname{sh}\tau_0 y \cdot C_5 + \operatorname{ch}\tau_0 y \cdot C_6) + \lambda(1 + k_2\lambda^2 - k_2\alpha_0'^2)\operatorname{ch}\alpha_0' y \cdot C_1 +$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\,\mathrm{sh}\,\alpha_0' y\cdot C_2+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\cos\beta_0' y\cdot C_3+$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\sin\beta_0' y\cdot C_4\Bigg|\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t,$$

где введены сокращенные обозначения

$$k_2=-\frac{2}{5}\mu_2 h^2,\qquad k_3=\frac{7}{15}\,\frac{s_0^2-\mu_2}{1-\mu}\,h^2. \tag{3.20}$$

Граничные условия (3.18) записываются так:

$$(1+k_1\lambda^2-k_1\alpha_0'^2)\,C_1+(1+k_1\lambda^2+k_1\beta_0'^2)\,C_3=0,$$

$$[\alpha_0'^2(1-k_2\lambda^2)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\,C_1+$$

$$+[\beta_0'^2(k_2\lambda^2-1)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]C_3+\frac{4}{5}s_0\lambda\tau_0(1-\mu)\cdot C_6=0,$$

$$\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\,C_1+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)C_3+\frac{1}{3}s_0\tau_0\cdot C_6=0,$$

$$(1+k_1\lambda^2-k_1\alpha_0'^2)\,\mathrm{ch}\,\alpha_0' b\cdot C_1+(1+k_1\lambda^2-k_1\alpha_0'^2)\,\mathrm{sh}\,\alpha_0' b\cdot C_2+$$

$$+(1+k_1\lambda^2+k_1\beta_0'^2)\cos\beta_0' b\cdot C_3+(1+k_1\lambda^2+k_1\beta_0'^2)\sin\beta_0' b\cdot C_4=0, \tag{3.21}$$

$$[\alpha_0'^2(1-k_2\lambda^2)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\,\mathrm{ch}\,\alpha_0' b\cdot C_1+$$

$$+[\alpha_0'^2(1-k_2\lambda^2)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\,\mathrm{sh}\,\alpha_0' b\cdot C_2+$$

$$+[\beta_0'^2(k_2\lambda^2-1)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\cos\beta_0' b\cdot C_3+[\beta_0'^2(k_2\lambda^2-1)+$$

$$+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\sin\beta_0' b\cdot C_4+\frac{4}{5}s_0\lambda\tau_0(1-\mu)(C_5\,\mathrm{sh}\,\tau_0 b+C_6\,\mathrm{ch}\,\tau_0 b)=0,$$

$$\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\,\mathrm{ch}\,\alpha_0' b\cdot C_1+\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\,\mathrm{sh}\,\alpha_0' b\cdot C_2+$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\cos\beta_0' b\cdot C_3+$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\sin\beta_0' b\cdot C_4+\frac{1}{3}s_0\tau_0(C_5\,\mathrm{sh}\,\tau_0 b+C_6\,\mathrm{ch}\,\tau_0 b)=0.$$

Приравнивая нулю определитель системы (3.21), находим

$$\sin\beta_0' b=0, \tag{3.22}$$

$$\beta_0'=\frac{n\pi}{b}\qquad(n=0,\ 1,\ 2\cdots). \tag{3.23}$$

Из (3.9) и (3.23) имеем

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a_1^2-4a_2}-a_1}{2}}=\frac{n\pi}{b}. \tag{3.24}$$

Из уравнения (3.24) находим

$$\omega_{mn} = \omega^*_{mn} \sqrt{1 - \frac{T_0}{T^*_{mn}}}, \tag{3.25}$$

где

$$\omega^*_{mn} = \frac{\pi^2 \sqrt{\frac{gD}{2\gamma_0 h}} \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)}{b^2 \left[1 + k_0\left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)\right]^{1/2}} = \frac{\omega^0_{mn}}{\left[1 + k_0\left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)\right]^{1/2}}$$ — частота колебаний ненагруженной пластинки,

$$k_0 = \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)} \cdot \frac{\pi^2 h^2}{b^2},$$

T^*_{mn} — критическая сила, соответствующая статической устойчивости пластинки,

ω^0_{mn} — частота колебаний, найденная по классической теории.

Формула (3.25) отличается от соответствующей формулы, найденной по классической теории наличием в знаменателе дроби выражения

$$\left[1 + k_0\left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)\right]^{1/2}.$$

При $k_0 = 0$ формула (3.25) для частоты совпадает с частотой, определяемой по классической теории.

При низшем виде колебаний имеем $m = n = 1$, тогда (3.25) примет вид

$$\omega_{11} = \omega^*_{11} \sqrt{1 - \frac{T_0}{T^*_{11}}}.$$

В заключение отметим, что в работе [2] были рассмотрены задачи о статической устойчивости и колебаниях трансверсально-изотропных прямоугольных пластинок на основе гипотезы о нерастяжимом нормальном элементе и о параболическом законе распределения касательных напряжений по толщине пластинки [1].

Однако, в работе [2] вносимая поправка зависит только от трех упругих постоянных E, G и μ, а постоянные E_1 и μ_1 потеряны при отбрасывании в обобщенном законе Гука σ_z по сравнению с σ_x и σ_y.

Если в полученных окончательных формулах для критической нагрузки и частоты колебаний положить $\mu_2 = 0$, то приходим к соответствующим результатам, полученным в работе [2].

При переходе к изотропной пластинке поправка, полученная к классической теории, в нашей работе совпадает с соответствующей поправкой, полученной в работе [5].

Ереванский политехнический
институт

Поступило 24 V 1965

Ա. Շ. ՊԵՏՈՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ–ԻԶՈՏՐՈՊ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտվում են ուղղանկյուն սալի կայունության և տատանումների խնդիրները՝ կողմերից մեկի ուղղությամբ հավասարաչափ սեղմող հաստատուն ուժերի դեպքում։ Վերոհիշյալ խնդիրների լուծման հիմքում ընկած է սալերի ծռման ճշգրտված [9] տեսությունը։

A. Sh. PETOYAN

ON THE STABILITY AND OSCILLATIONS OF TRANSVERSAL ISOTROPIC RECTANGULAR PLATES

Summary

In this paper the problems of stability and oscillations of the rectangular plate under uniformly compressed constant loading in the direction of one of the sides are considered.

On the foundation of the solution of these problems lies the specified theory [9] of the transversal isotropic plate bend.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. Изд. АН СССР, ОТН, № 5, 1958.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, 1, 1960.
3. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. ГИТА, М., 1955, III и IV.
4. *Лехницкий С. Г.* Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, т. XXVI, вып. 4, 1962.
5. *Муштари Х. М.* Теория изгиба плит средней толщины. Известия АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., № 2, 1959.
6. *Понятовский В. В.* К теории пластин средней толщины. ПММ, т. XXVI, вып. 2, 1962.
7. *Тимошенко С. П.* Теория колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
8. *Хачатурян Т. Т.* К теории изгиба и сжатия толстых плит. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 1963.
9. *Петоян А. Ш.* К теории изгиба трансверсально-изотропной плиты. Сборник научных трудов ЕрПИ, серия строительная механика, 1964.