ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

А. А. АГАЛОВЯН

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В работе [3], используя метод асимптотического интегрирования [1, 2, 5], был предложен приближенный метод построения теории изгиба анизотропных пластин без гипотезы недеформируемых нормалей. Напряженное и деформированное состояние в пластинке представляется в виде суммы двух напряженных и деформированных состояний. Первое из них определяется основным итерационным процессом, а второе вспомогательным итерационным процессом, при этом нулевое приближение основного итерационного процесса эквивалентно классической теории не только в смысле тождества основных уравнений, но и в смысле тождества граничных условий. Остальные приближения основного итерационного процесса уточняют внутреннюю задачу изгиба пластинки, а чтобы уточнить напряженное состояние на краю пластинки, нужно на напряженное состояние, определяемое основным итерационным процессом, наложить напряженное состояние, определяемое вспомогательным процессом (краевое скручивание, краевая плоская деформация).

Систему уравнений основного итерационного процесса для каждого приближения s можно рассматривать [3] как систему дифференциальных уравнений классической теории изгиба анизотропных пластин лишь с той разницей, что они будут отличаться от этих уравнений $(s>0)$ лишь правой частью, которая будет известной величиной, если построены предыдущие приближения. Уравнения вспомогательного процесса приводятся к уравнениям краевого скручивания и краевой обобщенной плоской деформации [3]. Все эти три группы уравнений можно решить отдельно. Весьма важным и интересным является вопрос — можно ли для них получить отдельные граничные условия, т. е. получить самостоятельные системы с самостоятельными граничными условиями. В этой работе выводятся такие граничные условия для приближений (0), (1), обобщить их для других приближений (когда построены предыдущие приближения) не представляет большого труда. Оказывается, что, начиная с первого приближения, анизотропия материала сказывается не только на разрешающих уравнениях, но и на граничных условиях.

§ 1. Основные соотношения уточненной теории изгиба анизотропных пластин. Рассмотрим ортотропную пластинку, срединная плоскость которой отнесена к ортогональной системе криволинейных координат (α, β), а ось γ направлена по нормали к срединной плоскости. Будем предполагать, что главные направления упругости в каждой точке совпадают с направлениями соответствующих координатных линий. Пусть пластинка загружена по верхней и нижней плоскостям $(\gamma = \pm h)$ следующим образом:

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \pm {}^1/_2\, p(\alpha, \beta), \quad \sigma_{\alpha\gamma} = {}^1/_2\, \lambda^{-1} p_\alpha(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \text{ при } \gamma = \pm h, \tag{1.1}$$

где $p(\alpha, \beta)$ — интенсивность внешней нормальной нагрузки, p_α, p_β — интенсивности касательной нагрузки, $2h$ — толщина пластинки, которая принимается малой величиной по отношению к двум другим размерам пластинки, $\varepsilon = \dfrac{h}{a}$ — малый параметр, a — характерный размер пластинки.

Будем исходить из дифференциальных уравнений трехмерной задачи теории упругости анизотропного тела [6, 7]

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} - (\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}) \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} - 2 \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad (\alpha, \beta)$$

$$H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial \gamma} - \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \sigma_{\alpha\gamma} - \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\beta\gamma} = 0,$$

$$H_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta = a_{11} \sigma_{\alpha\alpha} + a_{12} \sigma_{\beta\beta} + a_{13} \sigma_{\gamma\gamma}; \quad (\alpha, \beta, 1, 2), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = a_{13} \sigma_{\alpha\alpha} + a_{23} \sigma_{\beta\beta} + a_{33} \sigma_{\gamma\gamma},$$

$$H_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\alpha - \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} u_\beta = a_{66} \sigma_{\alpha\beta},$$

$$H_\beta \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} = a_{55} \sigma_{\alpha\gamma}, \qquad H_\alpha \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \gamma} = a_{44} \sigma_{\beta\gamma},$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_α, u_β, W — компоненты вектора смещения, H_α, H_β — параметры Ламе, a_{ik} — коэффициенты упругости, (α, β) означает, что имеет место второе соотношение, получаемое из приведенного заменой α на β, и наоборот.

Система уравнений (1.2) с граничными условиями (1.1) составляет полную систему дифференциальных уравнений для определения перемещений и напряжений.

Любое из напряжений или перемещений полного напряженного состояния пластинки определяем формулой [3]

$$Q = \varepsilon^{-\chi} \sum_{s=0}^{s=S} \varepsilon^s Q^{(s)} + \varepsilon^{-\chi} \sum_{s=0}^{s=S} \varepsilon^s \left[Q_{(1)}^{(s)} + Q_{(2)}^{(s)}\right]. \tag{1.3}$$

Здесь первое слагаемое, называемое основным, определяется из уравнений основного итерационного процесса и распространяется на всю пластинку. Вторым слагаемым определяется напряженное состояние, быстрозатухающее при удалении от краев пластинки. Оно определяется из уравнений краевого кручения и краевой обобщенной плоской деформации. q — целое число, различное для различных напряжений и перемещений:

$$q=2 \quad \text{для} \quad \sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\beta\beta}; \quad q=1 \quad \text{для} \quad \sigma_{\alpha\gamma},\ \sigma_{\beta\gamma},$$
$$q=0 \quad \text{для} \quad \sigma_{\gamma\gamma},\ q=2 \quad \text{для} \quad u_\alpha,\ u_\beta,\quad q=3 \quad \text{для} \quad W. \tag{1.4}$$

Учитывая эти значения q, из уравнений (1.2) после преобразования их по формулам

$$\alpha = a\xi, \quad \beta = a\eta, \quad \gamma = h\zeta \tag{1.5}$$

для $Q^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$ получаются следующие выражения:

$$W^{(i)} = W^{(i)}_{(\alpha,\beta)}, \quad u_\alpha^{(i)} = \zeta v_\alpha^{(i)}(\alpha,\ \beta), \quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} = \zeta\tau_{\alpha\alpha}^{(i)} \quad (\alpha,\ \beta)$$
$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} = \tau_{\alpha\gamma}^{(i)}, \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = \zeta\tau_{\gamma\gamma}^{(i)} + T_{\gamma\gamma}^{(i)} \quad (\alpha,\ \beta), \tag{1.6}$$
$$v_\alpha^{(i)} = -aH_\alpha\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\alpha} \quad (\alpha,\ \beta), \quad W^{(2)} = w^{(2)}_{(\alpha,\beta)} + \frac{\zeta^2 a}{2}\left[a_{13}\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\tau_{\beta\beta}^{(0)}\right].$$

Решение этой системы с учетом граничных условий (1.1) в общем случае приводится [3] к некоторому неоднородному уравнению четвертого порядка относительно $w^{(i)}$. При нулевом приближении это уравнение точно совпадает с соответствующим уравнением классической теории изгиба анизотропных пластин, а при первом приближении превращается в однородное уравнение того же порядка.

В вспомогательном процессе число r принимает следующие значения:

$$r=2 \quad \text{для} \quad \sigma_{\alpha\alpha},\ \sigma_{\alpha\beta},\ \sigma_{\alpha\gamma},\ \sigma_{\beta\gamma},\ \sigma_{\gamma\gamma},$$
$$r=1 \quad \text{для} \quad u_\alpha,\ u_\beta,\ W. \tag{1.7}$$

Для нахождения $Q^{(s)}_{(1)}$, $Q^{(s)}_{(2)}$ в уравнениях (1.2) производим замену переменных по формулам

$$\zeta = \frac{\gamma}{h}, \qquad \xi = \frac{1}{h}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{H_\alpha}, \qquad \eta = \frac{\beta}{a} \tag{1.8}$$

и считаем, что по новым переменным ξ и ζ изменяемость напряженного состояния невелика. Учитывая (1.3), (1.7) и (1.8), для $Q^{(s)}_{(1)}$, $Q^{(s)}_{(2)}$ получаем две системы неоднородных уравнений краевого кручения и краевой обобщенной плоской деформации. Если разложить H_α, H_β, k_β в ряд Тейлора в окрестности $\alpha=\alpha_0$ $(\xi=0)$ и ограничиться первыми двумя членами разложения (для некоторых систем это разложение не обязательно), то полученные уравнения для $s=0,\ 1,\ 2$ можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}}{\partial \zeta}=-a\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^{*(s-1)}}{\partial \beta}+2k_{30}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s-1)}\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^{*(s-2)}}{\partial \beta}+2k_{30}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s-2)}\right].$$

$$\frac{\partial u_\beta^{*(s)}}{\partial \xi}-aa_{44}\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}=-a\left[H_{30}\frac{\partial u_\alpha^{*(s-1)}}{\partial \beta}-k_{30}u_\beta^{*(s-1)}\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial u_\alpha^{*(s-2)}}{\partial \beta}-k_{30}u_\beta^{*(s-2)}\right], \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial u_\beta^{*(s)}}{\partial \zeta}-a\cdot a_{44}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}=-aH_{30}\frac{\partial W^{*(s-1)}}{\partial \beta}+a^2H_{30}k_{30}\xi\frac{\partial W^{*(s-2)}}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}}{\partial \zeta}=-a\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s-1)}}{\partial \beta}+k_{30}\left(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s-1)}-\sigma_{\beta\beta}^{*(s-1)}\right)\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s-2)}}{\partial \beta}+k_{30}\left(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s-2)}-\sigma_{\beta\beta}^{*(s-2)}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}}{\partial \zeta}=-a\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-1)}}{\partial \beta}+k_{30}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-1)}\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-2)}}{\partial \beta}+k_{30}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-2)}\right], \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u_\alpha^{*(s)}}{\partial \xi}=a\left[a_{11}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}+a_{12}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)}+a_{13}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}\right]\qquad \frac{\partial W^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial u_\alpha^{*(s)}}{\partial \zeta}=a\cdot a_{55}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)},$$

$$\frac{\partial W^{*(s)}}{\partial \zeta}=a\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}+a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)}+a_{33}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}\right]$$

$$a_{12}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}+a_{22}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)}+a_{23}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}=H_{30}\frac{\partial u_\beta^{*(s-1)}}{\partial \beta}-$$

$$-aH_{30}k_{30}\xi\frac{\partial u_\beta^{*(s-2)}}{\partial \beta}+k_{30}u_\alpha^{*(s-1)}-k_{30}^2a\xi u_\alpha^{*(s-2)}.$$

При нулевом приближении система уравнений (1.9) совпадает с соответствующей системой для кручения анизотропных стержней (ось кручения β), а система уравнений (1.10) — с уравнениями плоской деформации в плоскости $\xi\zeta$. Для последующих приближений получаемые уравнения будут отличаться от этих лишь правой частью, так что вспомогательный итерационный процесс будет заключаться в повторном интегрировании известных уравнений, что будет во многом облегчать вычисления.

Решения систем (1.9) и (1.10) представим в виде

$$Q^{*(s)}=Q_{(1)}^{(s)}+Q_{(2)}^{(s)}. \tag{1.11}$$

где $\sigma_{\alpha\beta(1)}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\gamma(1)}^{(0)}$, $u_{\beta(1)}^{(0)}$ — решения системы (1.9), $\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)}$, $\sigma_{\beta\beta(2)}^{(0)}$, $\sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)}$, $\sigma_{\gamma\gamma(2)}^{(0)}$, $u_{\alpha(2)}^{(0)}$, $W_{(2)}^{(0)}$ определяются из однородной системы (1.10)

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\beta(2)}^{(0)} = \sigma_{\beta\gamma(2)}^{(0)} = u_{\beta(2)}^{(0)} = 0,\\ \sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(0)} = \sigma_{\beta\beta(1)}^{(0)} = \sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(0)} = \sigma_{\gamma\gamma(1)}^{(0)} = u_{\alpha(1)}^{(0)} = W_{(1)}^{(0)} = 0.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Последующие $Q_{(1)}^{(s)}$ и $Q_{(2)}^{(s)}$ опять определяются из уравнений (1.9) и (1.10), где в обеих частях уравнений нужно приписывать всем величинам дополнительные индексы (1) или (2).

Напряжения и перемещения, определяемые уравнениями (1.9) и (1.10), должны обладать свойством затухания при $\xi \to -\infty$ и удовлетворять однородным граничным условиям (1.1). Условия существования затухающих решений систем (1.9) и (1.10) имеют вид [2, 3]:

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{+1} \zeta \left[\sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)}\right]_{\xi=0} d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \Big\{ \zeta \Big[-a \Big(H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s-1)}}{\partial \beta} + \\ + k_{\beta 0} \left(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s-1)} - \sigma_{\beta\beta}^{*(s-1)}\right) \Big) + a^2 k_{\beta 0} \xi \Big(H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s-2)}}{\partial \beta} + k_{\beta 0} \left(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s-2)} - \sigma_{\beta\beta}^{*(s-2)}\right) \Big) \Big] - \\ - \xi \Big[-a \Big(H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-1)}}{\partial \beta} + k_{\beta 0} \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-1)} \Big) + a^2 k_{\beta 0} \xi \Big(H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-2)}}{\partial \beta} + k_{\beta 0} \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-2)} \Big) \Big] \Big\} d\zeta,\end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} \Big|_{\xi=0} d\zeta = \int_{-1}^{+1} \left[\sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)}\right]_{\xi=0} d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \Big[-a \Big(H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-1)}}{\partial \beta} + \\ + k_{\beta 0} \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-1)} \Big) + a^2 k_{\beta 0} \xi \Big(H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-2)}}{\partial \beta} + k_{\beta 0} \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-2)} \Big) \Big] d\zeta.\end{gathered}$$

Граничные условия (1.1) для вспомогательного процесса будут иметь вид

$$\sigma_{\beta\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\beta\gamma(2)}^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \tag{1.14}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)} = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\gamma\gamma(2)}^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1. \tag{1.15}$$

Помимо условий, накладываемых на плоскостях $z = \pm h$ ($\zeta = \pm 1$), напряжения и перемещения, определяемые двумя итерационными процессами, в сумме должны удовлетворять граничным условиям, накладываемым на боковых поверхностях пластинки.

Рассмотрим край $\alpha = \alpha_0$ ($\xi = 0$) в трех случаях: когда край свободный, шарнирно опертый и жестко защемленный. Этим случаям будут соответствовать следующие граничные условия:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = W = 0, \quad u_{\alpha} = u_{\beta} = W = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{1.16}$$

Учитывая (1.3), (1.4), (1.7), условия (1.16) можно привести к виду [2]:

свободный край

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)} = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)} = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)} + \sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)} = 0, \tag{1.17}$$

шарнирно опертый край

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)} = 0, \quad \sigma_{\alpha}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)} = 0,$$

$$W^{(s)} + W_{(1)}^{(s-2)} + W_{(2)}^{(s-2)} = 0, \tag{1.18}$$

жестко защемленный край

$$u_{\alpha}^{(s)} + u_{\alpha(1)}^{(s-1)} + u_{\alpha(2)}^{(s-1)} = 0, \quad u_{\beta}^{(s)} + u_{\beta(1)}^{(s-1)} + u_{\beta(2)}^{(s-1)} = 0,$$

$$W^{(s)} + W_{(1)}^{(s-2)} + W_{(2)}^{(s-2)} = 0. \tag{1.19}$$

Как видно из уравнений (1.6), (1.9) и (1.10), напряжения и перемещения основного и вспомогательного процессов при $s = 0, 1$ можно найти, решая эти системы в отдельности, но из (1.17), (1.18) и (1.19) видно, что эти решения должны удовлетворять граничным условиям в совокупности. Важно выяснить, можно ли получить граничные условия для каждой системы в отдельности, получив таким образом самостоятельные системы с самостоятельными граничными условиями. Решения системы (1.6) при $s=0, 1$ обозначим через $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$. Они определяются [3] из уравнения четвертого порядка (неоднородного при $s = 0$ и однородного при $s = 1$). При $s = 0$ решение системы (1.9) обозначим через $\Psi^{*(0)}$, а решение системы (1.10) — через $\Phi^{*(0)}$. Получим для этих функций самостоятельные граничные условия.

§ 2. Свободный край

Принимая

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(0)} = \sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(0)} = a_{44}\frac{\partial \Psi^{*(0)}}{\partial \xi}, \qquad \sigma_{\beta\gamma}^{(0)} = \sigma_{\beta\gamma(1)}^{(0)} = a_{66}\frac{\partial \Psi^{*(0)}}{\partial \zeta},$$

$$u_{\beta}^{*(0)} = u_{\beta(1)}^{(0)} = a \cdot a_{11} a_{66} \Psi^{*(0)}, \tag{2.1}$$

решение системы $(1.9)_0$ (обозначение типа $(1.9)_k$ впредь будет означать, что имеем соотношение (1.9) при $s = k$) можно привести к нахождению функции $\Psi^{*(0)}$ из уравнения

$$a_{11}\frac{\partial^2 \Psi^{*(0)}}{\partial \xi^2} + a_{66}\frac{\partial^2 \Psi^{*(0)}}{\partial \zeta^2}. \tag{2.2}$$

Учитывая второе условие $(1.17)_0$, соотношения $(1.6)_0$, (1.12) и $(1.14)_0$, $\Psi^{*(0)}$ должны находить из следующей задачи: построить решение уравнения (2.2) в полуполосе $-1 \leq \zeta \leq 1$, $\xi \leq 0$, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_{\beta\gamma(1)}^{(0)}\Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad Q_{(1)}^{(0)}\Big|_{\quad} = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta(1)}^{(0)}\Big|_{\xi=0} = -\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(x_2, \zeta). \tag{2.3}$$

Для решения этой задачи введем вспомогательную задачу: построить решение Ψ^* уравнения (2.2) в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\xi \leqslant 0$ при следующих условиях

$$\tau^*_{\xi\zeta}\Big|_{\zeta=\pm1} = 0, \quad Q^*\Big|_{\xi=-\infty} = 0, \quad \tau^*_{\xi\zeta}\Big|_{\xi=0} = -\zeta. \tag{2.4}$$

Тогда очевидно, что

$$\Psi^{(0)} = \tau^{(0)}_{\xi\zeta}(\alpha_0, \beta)\,\Psi^*. \tag{2.5}$$

Функцию Ψ^* можно легко находить методом Фурье. Проделав все вычисления, связанные с применением этого метода, для Ψ^* получим

$$\Psi^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{44}a_{55}}} \exp (2n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}\,\xi \cdot \sin (2n-1)\frac{\pi\zeta}{2}. \tag{2.6}$$

Для выяснения граничных условий для $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\psi^{(0)}$, преобразуем условия существования затухающих решений (1.13), используя (1.12) и (1.17). После преобразования получим

$$\int_{-1}^{+1} \zeta \sigma^{(0)}_{\alpha\alpha}\Big|_{\xi=0} d\zeta = 0, \tag{2.7}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma}\Big|_{\xi=0} d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} a\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial\beta} + k_{30}\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)}\right] d\zeta, \tag{2.8}$$

$$\int_{-1}^{+1} \zeta\sigma^{(1)}_{\alpha\alpha}\Big|_{\xi=0} d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left\{a\zeta\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\alpha\beta(1)}}{\partial\beta} + k_{30}\left(\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} - \sigma^{(0)}_{\beta\beta(2)}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \xi a\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial\beta} + k_{30}\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)}\right]\right\} d\zeta, \tag{2.9}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma^{(1)}_{\alpha\gamma}\Big|_{\xi=0} d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left\{a\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{*(1)}_{\beta\gamma}}{\partial\beta} + k_{30}\sigma^{*(1)}_{\alpha\gamma}\right] - \right.$$

$$\left. - a^2 k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial\beta} + k_{30}\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)}\right]\right\} d\zeta. \tag{2.10}$$

Из (2.7), учитывая (1.6), получаем, что

$$\varphi^{(0)}_{\alpha} = 0 \quad \text{при } \xi = 0. \tag{2.11}$$

Используя теперь (1.12) и первое условие $(1.17)_0$, получаем, что $\sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} = 0$ при $\xi = 0$, а из (1.12) и третьего условия $(1.17)_0$ вытекает, что $\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)} = 0$ при $\xi = 0$. Учитывая эти условия, а также $(1.15)_0$, получаем, что решение системы $(1.10)_0$

$$Q_{(3)}^{(0)} = 0 \quad \text{или} \quad \Phi^{(0)} = 0. \tag{2.12}$$

Теперь, используя (2.5), (2.6), (2.12), условиям (2.7) и (2.8) придадим вид

$$\int_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{11}^{(0)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{12}^{(0)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta + \frac{2}{3} a \frac{\partial \varphi_{12}^{(0)}}{\partial s_1}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad \text{где} \quad \frac{\partial}{\partial s_1} = H_1 \frac{\partial}{\partial \beta}. \tag{2.13}$$

Таким образом, функцию $\varphi^{(0)}$ находим из уравнений нулевого приближения основного итерационного процесса с независимыми от вспомогательного процесса граничными условиями (2.13). После решения этой задачи и нахождения $\varphi_{(3)}^{(0)}(\alpha_0, \beta)$ определяем $\Psi^{(0)}$ по формуле (2.5).

Рассмотрим последовательность наложения граничных условий при $s = 1$. Тогда уравнения $(1.9)_1$ становятся неоднородными. Решение этой системы представим как сумму двух решений: решения однородной системы $(1.9)_1$ с неоднородными граничными условиями на $\xi = 0$ и частного решения $Q_{(1)}^{*(1)}$ неоднородной системы $(1.9)_1$ с однородными граничными условиями на $\xi = 0$ и $\zeta = \pm 1$. Учитывая (2.4), $(1.6)_1$, $(1.17)_1$, можно написать, что

$$Q_{(3)}^{(1)} = \varphi_{(3)}^{(1)}(\alpha_0, \beta)\, Q^* + Q_{(1)}^{*(1)}, \tag{2.14}$$

где Q^* — решение задачи (2.4). Легко заметить, что при таком определении $Q_{(1)}^{*(1)}$ для системы $(1.9)_1$ $Q_{(3)}^{*(1)} = 0$.

Используя теперь (2.14), (2.5), (2.6), (2.12), $(1.9)_1$, $(1.10)_1$, условия (2.9) и (2.10) для определения $\varphi^{(1)}$ можно привести к виду

$$\int_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{11}^{(1)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta = -\frac{2}{3} a \cdot A \frac{\partial \varphi_{(3)}^{(0)}(\alpha_0, \beta)}{\partial s_1} \cdot \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{44}}},$$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{12}^{(1)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} d\zeta + \frac{2}{3} a \frac{\partial \varphi_{12}^{(1)}}{\partial s_1}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{2}{3} a^2 \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{44}}} A \frac{\partial (k_{\alpha} \varphi_{(3)}^{(0)})}{\partial s_1}\Big|_{\alpha=\alpha_0}, \tag{2.15}$$

где

$$A = \frac{384}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5}.$$

Если сравнить граничные условия (2.13) и (2.15) с соответствующими условиями для изотропных пластин [4], то увидим, что условия (2.13) точно совпадают с соответствующими условиями для изотропных пластин, а условия (2.15) отличаются от условий для изотропных пластин множителем, выражающим анизотропию материала. Таким образом, получается, что, если для нулевого приближения для анизотропных пластин, по сравнению с изотропными, меняется только уравнение внутренней задачи, а граничные условия остаются теми же, то, начиная уже с первого приближения, анизотропия материала будет влиять не только на уравнения внутренней задачи, но и на граничные условия. Эти выводы становятся более наглядными, если представить условия (2.13) и (2.15) в принятой в классической теории форме. Для этого введем обычные понятия моментов M_α, M_β, $H_{\alpha\beta}$ и перерезывающих усилий N_α, N_β. Значения этих величин для приближений $s = 0, 1$ имеют вид:

$$M_\alpha^{(s)} = a^2\lambda^s \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} \zeta d\zeta = \frac{2}{3} a^2\lambda^s \tau_{\alpha\alpha}^{(s)}, \qquad (\alpha, \beta)$$

$$H_{\alpha\beta}^{(s)} = a^2\lambda^s \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \zeta d\zeta = \frac{2}{3} a^2\lambda^s \tau_{\alpha\beta}^{(s)}, \tag{2.16}$$

$$N_\alpha^{(s)} = a\lambda^s \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} d\zeta = a\lambda^s \left[-\frac{4}{3} \tau_{\alpha\gamma}^{(s)} + p_\alpha^{(s)} \right] \qquad (\alpha, \beta),$$

$$\ldots, \quad \text{где } p_\alpha^{(0)} = p_\alpha, \quad p_\alpha^{(1)} = 0.$$

Тогда граничные условия (2.13) примут вид

$$M_\alpha^{(0)} = 0, \quad N_\alpha^{(0)} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{2.17}$$

Условия (2.17) точно совпадают с граничными условиями классической теории [6, 7]. С учетом (2.16) условия (2.15) принимают вид

$$\begin{aligned} M_\alpha^{(1)} &= -Ah \frac{\partial H_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta} \cdot \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}, \\ N_\alpha^{(1)} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial s_\beta} &= -Ah \frac{\partial (k_\beta H_{\alpha\beta}^{(0)})}{\partial s_\beta} \cdot \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

т. е., начиная с первого приближения, анизотропия материала сказывается и на граничных условиях.

§ 3. **Шарнирно опертый край.** Из условий $(1.13)_0$ с учетом первого условия $(1.18)_0$ и соотношений (1.6) и (1.12) получается, что

$$\tau_{\alpha\gamma(2)}^{(0)} = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)} d\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{3.1}$$

Таким образом, определение функции $\Phi^{(0)}$ приводится к решению следующей задачи: построить решение однородной системы $(1.10)_0$ в полуполосе $-1 \le \zeta \le +1$, $\xi \ge 0$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} = \sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \quad Q_{(2)}\big|_{\xi=-\infty} = 0,$$
$$\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} d\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{3.2}$$

Следовательно, для определения $\Phi^{(0)}$ имеем самостоятельную задачу.

Из первого и третьего условий $(1.18)_0$ и условий (1.13) с учетом (1.6) получаются следующие граничные условия для определения функции $\varphi^{(0)}$:

$$W^{(0)} = 0, \quad \sigma^{(0)}_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{3.3}$$

После определения функции $\varphi^{(0)}$, функция $\Psi^{(0)}$ определяется так же, как в случае для свободного края и имеет вид (2.5).

Для определения $\varphi^{(1)}$ нужно исходить из третьего условия $(1.18)_0$ и условия (2.9), которое с учетом (2.5), (2.6) и (3.2) можно представить в виде

$$\int_{-1}^{+1} \zeta \sigma^{(1)}_{\alpha\alpha}\big|_{\xi=0} d\zeta = a \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left[\zeta H_{30} \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\alpha\beta(1)}}{\partial \beta} - \xi H_{30} \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial \beta} \right] d\zeta +$$
$$+ a k_{30} \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left[\zeta \left(\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} - \sigma^{(0)}_{\beta\beta(2)} \right) - \xi \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} \right] d\zeta =$$
$$= -\frac{2}{3} a A \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{66}}} - \frac{2}{3} k_{30} a A_1 \sigma^{(0)}_{\beta\beta} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0,$$

где

$$\frac{2}{3} A_1 \sigma^{(0)}_{\beta\beta} (\alpha_0, \beta) = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left[\zeta \left(\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} - \sigma^{(0)}_{\beta\beta(2)} \right) - \xi \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} \right] d\zeta$$

и является известной величиной, если построено нулевое приближение. Таким образом, $\varphi^{(1)}$ определяется из соответствующих уравнений основного итерационного процесса и следующих граничных условий:

$$w^{(1)} = 0, \tag{3.4}$$
$$\int_{-1}^{+1} \zeta \sigma^{(1)}_{\alpha\alpha} d\zeta = -\frac{2}{3} a A \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{66}}} - \frac{2}{3} a k_{30} A_1 \sigma^{(0)}_{\beta\beta} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0.$$

В обозначениях (2.16) эти условия и условия (3.3) можно представить в виде

$$M_\alpha^{(0)} = 0, \quad w^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{3.5}$$

$$w^{(1)} = 0, \quad M_\alpha^{(1)} = -Ah \frac{\partial H^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{66}}} - k_{30} A_1 h M_\beta^{(0)}, \tag{3.6}$$

откуда следует, что при нулевом приближении граничные условия опять совпадают с соответствующими граничными условиями, которые ставятся в классической теории [6, 7], т. е. основной итерационный процесс в нулевом приближении эквивалентен классической теории не только в смысле тождества основных уравнений, но и в смысле тождества граничных условий. Условия (3.6) показывают, что, начиная с первого приближения, граничные условия отличаются от тех, которые ставятся в классической теории; здесь существенную роль может сыграть анизотропия материала, в особенности, когда определяются напряжения.

§ 4. Жестко-защемленный край. Из условий $(1.19)_0$ получаем

$$u_\alpha^{(0)} = 0, \quad w^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{4.1}$$

Следовательно, функция $\varphi^{(0)}$ должна определяться из нулевого приближения основного итерационного процесса при граничных условиях (4.1).

Из $(1.19)_1$ и $(1.19)_2$ (третье условие) с учетом (1.6) имеем

$$\begin{aligned} & u_\alpha^{(1)} + u_{\alpha(2)}^{(0)} = 0, \quad u_\beta^{(1)} + u_{\beta(1)}^{(0)} = 0, \quad w^{(1)} = 0 \\ & w^{(2)} + \frac{\zeta^2 a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] + W_{(2)}^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.2}$$

а из условий $(1.13)_0$ получается

$$\int_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)} d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\beta(2)}^{(0)} d\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{4.3}$$

Учитывая (4.2), (4.3) и (1.6), функцию $\Phi^{(0)}$ определяем из следующей задачи: построить решение однородной системы $(1.10)_0$ в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant +1$, $\xi \leqslant 0$, удовлетворяющее условиям (4.3) и условиям

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma(2)}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \quad Q^{(0)}\Big|_{\xi=-\infty} = 0, \\ u_{\beta(2)}^{(0)} = -\zeta v_\alpha^{(1)}(\alpha_0, \beta), \\ W_{(2)}^{(0)} = -w^{(2)} - \frac{\zeta^2 a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Для решения этой задачи введем более простые вспомогательные задачи [4]: найти решение однородной системы $(1.10)_0$ в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\xi \leqslant 0$ при следующих условиях:

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\gamma} = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \quad u_\alpha\Big|_{\xi=-\infty} = 0, \quad W\Big|_{\xi=-\infty} = 0, \\ u_\alpha\Big|_{\xi=0} = 0, \quad W\Big|_{\xi=0} = 1 \quad \text{для задачи 1}, \\ u_\alpha\Big|_{\xi=0} = 0, \quad W\Big|_{\xi=0} = \zeta^2 \quad \text{для задачи 2}, \\ u_\alpha\Big|_{\xi=0} = \zeta, \quad W\Big|_{\xi=0} = 0 \quad \text{для задачи 3}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Если известны решения этих задач, то решение вышепоставленной задачи будет иметь вид

$$Q_{(2)}^{(0)} = -w^{(2)}(\alpha_0, \beta)\, Q^{[1]} - \frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}(\alpha_0, \beta) + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}(\alpha_0, \beta)\right] Q^{[2]} -$$

$$- v_s^{(1)}(\alpha_0, \beta)\, Q^{[3]}, \tag{4.6}$$

где $Q^{[1]}$, $Q^{[2]}$, $Q^{[3]}$ — решения соответственно первой, второй и третьей задач.

Найденное решение должно удовлетворять условиям (4.3). Подчиним этим условиям, получим относительно $w^{(2)}(\alpha_0, \beta)$ и $v_s^{(1)}(\alpha_0, \beta)$ два алгебраических уравнения, откуда находим

$$\left.\begin{aligned} w^{(2)} &= K\cdot\frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right],\\ v_s^{(1)} &= C\cdot\frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.7}$$

где K и C — вполне определенные числа, если решены задачи 1, 2, 3. Очевидно, что они будут зависеть от коэффициентов анизотропии.

Имея в виду (4.2) и (4.7), заключаем, что функция $\varphi^{(1)}$ должна удовлетворять уравнениям первого приближения основного итерационного процесса и граничным условиям

$$w^{(1)} = 0, \quad v_s^{(1)} = C\cdot\frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{4.8}$$

Учитывая, что $w^{(1)} = 0$ при $\alpha = \alpha_0$, из (4.2), имея в виду (1.6), получаем, что $u_{(3)}^{(0)}\big|_{\xi=0} = 0$, следовательно $\Psi^{(1)} = 0$. Получается, что для анизотропных пластин, если для свободного края важным является основная задача и задача краевого скручивания, а для шарнирно-опертого края — все три задачи, то для жестко-защемленного края важными являются основная задача и задача краевой обобщенной деформации. Подобная картина наблюдается и для изотропных пластин [4], следовательно, анизотропия материала около краев не меняет качественной картины распределения напряжений и перемещений, она только может менять количественную картину.

Условия (4.1), (4.8), используя (2.16), можно представить в виде

$$w_0^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial s_\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.9}$$

$$w_0^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial s_\alpha} = -\frac{3C}{4h}\left[a_{13}M_\alpha^{(0)} + a_{23}M_\beta^{(0)}\right] \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.10}$$

т. е., как и для других случаев, условия (4.9) для нулевого приближения совпадают с соответствующими условиями, накладываемыми в классической теории. При первом приближении эти условия становятся зависимыми от свойств анизотропии материала.

§. 5. Основной итерационный процесс при $s = 0, 1$ можно свести к решению следующей системы:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{M_\alpha^{(s)}}{H_\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H_{\alpha\beta}^{(s)}}{H_\alpha}\right)-\frac{\partial 1/H_\beta}{\partial\alpha}M_\beta^{(s)}+\frac{\partial 1/H_\alpha}{\partial\beta}H_{\alpha\beta}^{(s)}=$$

$$=\frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left[N_\alpha^{(s)}-\varepsilon^2 p_\alpha^{(s)}\right] \qquad (\alpha, \beta),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{N_\alpha^{(s)}}{H_\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{N_\beta^{(s)}}{H_\beta}\right)=-\frac{\lambda^2 p^{(s)}}{H_\alpha H_\beta}, \tag{5.1}$$

$$M_\alpha^{(s)}=\frac{2}{3}a^4\varepsilon^2 B_{11}\left[\varkappa_1^{(s)}+\nu_2\varkappa_2^{(s)}\right] \qquad (\alpha, \beta),$$

$$H_{\alpha\beta}^{(s)}=\frac{2}{3}a^2\lambda^2 B_{66}\tau^{(s)},$$

где

$$p_\alpha^{(0)}=p_\alpha, \quad p^{(0)}=p, \quad p_\alpha^{(1)}=0, \quad p^{(1)}=0.$$

$$B_{11}=a_{22}/\Omega, \quad B_{66}=1/a_{66}, \quad \Omega=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,$$

$\varkappa_1^{(s)}$, $\varkappa_2^{(s)}$, $\tau^{(s)}$ — обычные коэффициенты, описывающие деформацию изгиба и относительную деформацию кручения для приближения (s) [6]. При $s > 1$ меняются лишь правые части уравнений (5.1). При нулевом приближении уравнения (5.1) совпадают с соответствующими уравнениями классической теории изгиба анизотропных пластин, а при $s = 1$ мы опять получаем те же уравнения, но уже однородные, так как $p_\alpha^{(1)} = 0$, $p^{(1)} = 0$, следовательно, если в выражениях для M_α, M_β, $H_{\alpha\beta}$, W ограничиться лишь первыми двумя членами, то эти величины будут удовлетворять классическим уравнениям изгиба анизотропных пластин, но будут содержать члены порядка λ. Если соответствующим образом соединить граничные условия для двух приближений, то можно предложить способ уточнения классической теории изгиба анизотропных пластин.

Задача сводится к построению решения уравнений классической теории [6, 7] при следующих граничных условиях:

для свободного края

$$\left.\begin{aligned} &M_\alpha+Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}=0\\ &N_\alpha+\frac{\partial}{\partial s_\beta}\left(H_{\alpha\beta}-Ahk_{\alpha 0}H_\alpha\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}\right)=0\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0 \tag{5.2}$$

для шарнирно-опертого края

$$\left.\begin{aligned} &M_\alpha+Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}-k_{\alpha 0}A_1 hM_\alpha=0\\ &w_0=0\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0 \tag{5.3}$$

для жестко-защемленного края

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial s_\alpha} = \frac{3C}{4h^2}\left[a_{13}M_\alpha - a_{23}M_\beta\right] = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{5.4}$$

Погрешность предложенного способа уточнения классической теории будет иметь порядок h^2. Чтобы получить более точные решения, нужно вносить поправки и в основные уравнения, и в граничные условия.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный
университет

Поступило 24 I 1966

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Կիրառելով դիֆերենցիալ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդը [3] աշխատանքում առաջարկվել էր սալերի ծռման տեսության կառուցման մոտավոր մեթոդ, ըստ որի սալի լարվածային վիճակը ներկայացվում էր երկու գումարելիների տեսքով: Առաջինը կոչվում է հիմնական, տարածվում է ամբողջ սալի վրա և որոշվում է կառուցված հիմնական իտերացիոն պրոցեսով: Երկրորդով, որը կոչվում է լրացուցիչ, որոշվում են այնպիսի լարվածային վիճակներ (եզրային շերտում, եզրային հարթ դեֆորմացիա), որոնք արագ կերպով մարում են եզրերից հեռանալու դեպքում: Այդ պրոցեսի օգնությամբ հաշվի են առնվում եզրային էֆեկտները: Հավասարումների այն երեք խմբերը, որոնցով որոշվում են հիմնական և լրացուցիչ պրոցեսի անհայտները, կարելի է լուծել առանձին: Կարևոր է ստանալ այդ երեք սխեմաների համար առանձին եզրային պայմաններ: Ներկա աշխատանքում ստացվել են այդպիսի պայմաններ, երբ սալի եզրերն ազատ են, ամրացված են հոդակապերով և կոշտ ամրացված են: Ցույց է տրված, որ զրոյական մոտավորության եզրային պայմանները համընկնում են սալերի կլասիկ տեսության եզրային պայմանների հետ: Սկսած առաջին մոտավորությունից սալի եզրային պայմանները ստացվում են նյութի անիզոտրոպիայի գործակիցներից կախված: Առաջարկված է մեթոդ, որով կարելի է ճշգրտել սալերի ծռման կլասիկ տեսության արդյունքները սալի եզրերի մոտ:

L. A. AGALOVIAN

ON THE BOUNDARY CONDITIONS FOR BENDING OF ANISOTROPIC PLATES

S u m m a r y

New boundary conditions for bending of anisotropic plates are deduced by the application of asymptotic integration method of differential equations, when the edge of the plate is free, hinged supported and rigidly attached. These conditions coincide in zero approximation with the conditions in the classical theory.

A method of greater accuracy of results of the classical theory of bending of plates near the plate edges is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 26, вып. 4, 1962.
2. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 29, вып. 1, 1965.
3. *Агаловян Л. А.* Об уточнении классической теории изгиба анизотропных пластин. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 5, 1965.
4. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 29, вып. 1, 1965.
5. *Friedrichs K.* and *Dressler R. F.* A boundary-layer theory for elastic plates. Communs. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 14, № 1.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
7. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.