

Б. А. АБРАМЯН, Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. БАВЛОЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Некоторые задачи о кручении тел вращения в эллипсоидальных координатах рассматривались в работах Е. Мелана [1], Т. Пешля [2], А. С. Локшина [3] и других. В этих работах на поверхности скручиваемого тела задаются только напряжения, то есть решается задача в обычной постановке теории кручения круглых стержней переменного сечения.

В настоящей работе рассматривается контактная задача о кручении вытянутого эллипсоида вращения, когда на одной части поверхности этого эллипсоида приложена произвольная скручивающая нагрузка, а на остальной части его поверхности заданы или, в частности, отсутствуют перемещения.

§ 1. Постановка и основные уравнения задачи

В вытянутых эллипсоидальных координатах α, β, γ решение задачи о кручении тел вращения сводится к определению функции перемещения $\Psi(\alpha, \beta)$, которая в области осевого сечения эллипсоида удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta^2} + 3 \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + 3 \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = 0. \quad (1.1)$$

При кручении эллипсоида вращения из шести компонентов напряжения отличны от нуля компоненты $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$. А из перемещений отлично от нуля только перемещение u_γ .

Касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ и перемещение u_γ выражаются через функцию перемещения $\Psi(\alpha, \beta)$ следующими формулами:

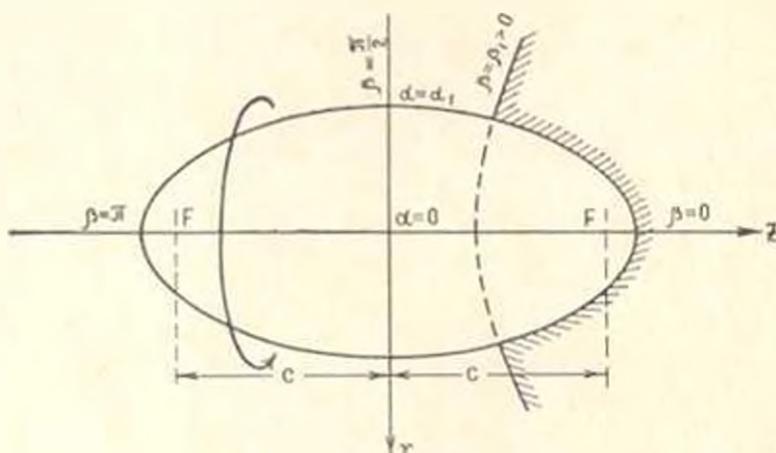
$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma} &= G \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \\ \tau_{\beta\gamma} &= G \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta}} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \\ u_\gamma &= c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \Psi(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $2c$ — фокусное расстояние эллипсоида, а G — модуль сдвига.

Граничные условия для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 u_1(z_1, \beta) &= c \operatorname{sh} z_1 \sin \beta \Psi^*(z_1, \beta) = 0 \quad (0 < \beta < \beta_1), \\
 u_2(z_1, \beta) &= G \frac{\operatorname{sh} z_1 \sin \beta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z_1 - \cos^2 \beta}} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \right)_{z=z_1} = f^*(\beta) \quad (\beta_1 < \beta < \pi),
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $f^*(\beta)$ — кусочно непрерывная функция с ограниченным изменением в указанном интервале.



Фиг. 1.

§ 2. Построение общего решения уравнения задачи и сведение его к „парным“ рядам, содержащим полиномы Лежандра

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Psi^*(z, \beta) = A(\operatorname{ch} z) B(\cos \beta). \quad (2.1)$$

Решая уравнение (1.1) методом разделения переменных, для определения функций $A(\operatorname{ch} z)$ и $B(\cos \beta)$ получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 (1 - \xi^2) B'' - 4\xi B' + \lambda^2 B &= 0, \\
 (t^2 - 1) A'' + 4t A' - \lambda^2 A &= 0.
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь использованы обозначения

$$\cos \beta = \xi, \quad \operatorname{ch} z = t. \quad (2.3)$$

Решение уравнений (2.2) имеют вид

$$\begin{aligned}
 B(\xi) &= \frac{d}{d\xi} [A_n P_n(\xi) + B_n Q_n(\xi)], \\
 A(t) &= \frac{d}{dt} [C_n P_n(t) + D_n Q_n(t)],
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — функции Лежандра [4], а n связано с λ соотношением

$$\lambda^2 = n(n+1) - 2. \quad (2.5)$$

Для решения задачи достаточно выбрать только такие значения λ , для которых λ — целое число. Тогда решение уравнения (1.1) можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра, то есть

$$\Psi(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(\operatorname{ch} \alpha) P_k(\cos \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(t) P_k(\xi), \quad (2.6)$$

где

$$P_k(x) = \frac{d}{dx} P_k(x).$$

Пользуясь решением (2.6), будем иметь

$$u_r(t, \xi) = c \sqrt{(t^2 - 1)(1 - \xi^2)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(t) P_k(\xi), \quad (2.7)$$

$$z_{0r}(t, \xi) = G(t^2 - 1) \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{t^2 - \xi^2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(t) P_k(\xi).$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3), получим

$$c \sqrt{(t_1^2 - 1)(1 - \xi_1^2)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(t_1) P_k(\xi) = 0 \quad (1 > \xi > \xi_1), \quad (2.8)$$

$$G(t_1^2 - 1) \sqrt{\frac{1 - \xi_1^2}{t_1^2 - \xi_1^2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(t_1) P_k(\xi) = f(\xi) - f^*(\arccos \xi) \quad (\xi_1 > \xi > -1),$$

где

$$t_1 = \operatorname{ch} \alpha_1, \quad \xi_1 = \cos \beta_1.$$

Используя обозначения

$$F(\xi) = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{t_1^2 - \xi^2}{1 - \xi^2}} f(\xi), \quad A_k = \frac{B_k}{t_1 P_k(t_1)}, \quad (2.9)$$

„парные“ ряды (2.8) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k P_k(\xi) = 0 \quad (1 > \xi > \xi_1), \quad (2.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k g_k(t_1) P_k(\xi) = F(\xi) \quad (\xi_1 > \xi > -1).$$

Здесь

$$g_k(t_1) = \frac{(t_1^2 - 1) P_k(t_1)}{t_1 P_k(t_1)} = \frac{P_k'(t_1)}{P_k(t_1)} \operatorname{th} \alpha_1, \quad (2.11)$$

где $P_k'(t)$ — присоединенные функции Лежандра [4,9].

Интегрируя ряды (2.10) по ξ , приведем их к следующему виду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(\xi) = c_0 \quad (1 > \xi > \xi_1), \quad (2.12)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k g_k(t_1) P_k(\xi) = \int F(\xi) d\xi + c_1 \quad (\xi_1 > \xi > -1).$$

Здесь c_0 и c_1 — постоянные интегрирования. Сравнивая (2.10) и (2.12), легко видеть, что одну из постоянных c_0 и c_1 можно выбрать произвольно. Вторая из этих постоянных определяется из условия интегрируемости касательных напряжений на закрепленной части поверхности эллипсоида (при $0 < \beta < \beta_1$) или из условия конечности перемещения u_1 на окружности $\beta = \beta_1$, $t = t_1$ поверхности эллипсоида.

Решение рядов-уравнений (2.12) можно методом, изложенным в работах [5, 6], свести к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Однако, в данной работе мы выберем другой путь и сведем решение этих „парных“ рядов-уравнений к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений [7, 8].

§ 3. Приведение решения „парных“ рядов-уравнений (2.12) к бесконечной системе линейных уравнений

Представим коэффициент $g_k(t_1)$ в виде

$$g_k(t_1) = \left(n - \frac{1}{2} - \tau_n \right) \text{th } \tau_n, \quad (3.1)$$

где на основании (2.11) имеем

$$\tau_n = n - \frac{1}{2} - \frac{P_n'(t_1)}{P_n(t_1)}. \quad (3.2)$$

Согласно формуле

$$P_n^{(m)}(t) = (t^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \quad (3.3)$$

и асимптотическому разложению присоединенных функций Лежандра [4] $P_n^{(m)}(t)$ ($t > 1$) при больших значениях n

$$\frac{(n-m)!}{n!} P_n^{(m)}(\text{ch } \alpha) = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\alpha}}{(2\pi n \text{ sh } \alpha)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{8n} \right) \left[1 + \frac{1-4m^2}{4n} \frac{e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}} \right] \quad (3.4)$$

для $\tau_n(t_1)$ получим следующее асимптотическое значение:

$$\tau_n(t_1) \approx \frac{3}{2} + \frac{12(n-1)e^{-2\alpha}}{4n - (4n+3)e^{-2\alpha}} + O(1). \quad (3.5)$$

Пользуясь этими значениями, „парные“ ряды-уравнения (2.12) можем записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(\xi) = c_0 \quad (1 > \xi > \xi_1),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) B_k P_k(\xi) = \left| \int_{\xi}^1 F(\xi) d\xi + c_1 \right| \operatorname{cth} \alpha_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \tau_{1k}(t_1) B_k P_k(\xi) \quad (3.6)$$

($\xi_1 > \xi > -1$).

Умножим первое уравнение из (3.6) на $(\xi - \cos \varphi)^{-1/2}$ и проинтегрируем его по ξ в пределах от $\cos \varphi$ до единицы. Затем продифференцируем полученное равенство по φ . Второе уравнение из (3.6) умножим на $(\cos \varphi - \xi)^{-1/2}$ и проинтегрируем полученное выражение по ξ в пределах от -1 до $\cos \varphi$. Пользуясь далее значениями интегралов

$$\frac{d}{d\varphi} \int_{\cos \varphi}^1 \frac{P_k(\xi) d\xi}{(\xi - \cos \varphi)^{1/2}} = \sqrt{2} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi,$$

$$\int_{-1}^{\cos \varphi} \frac{P_k(\xi) d\xi}{(\cos \varphi - \xi)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi}{k + \frac{1}{2}},$$

(3.7)

из „парных“ рядов-уравнений (3.6) получим

$$\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi = \frac{d}{d\varphi} \int_{\cos \varphi}^1 \frac{c_0 d\xi}{\sqrt{\xi - \cos \varphi}} = \sqrt{2} c_0 \cos \frac{\varphi}{2}$$

($0 < \varphi < \beta_1 = \arccos \xi_1$),

$$\sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi = \operatorname{cth} \alpha_1 \int_{-1}^{\cos \varphi} \left[\int_{\xi}^1 F(\xi) d\xi + c_1 \right] \frac{d\xi}{(\cos \varphi - \xi)^{1/2}} +$$

$$+ \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_{1k}(t_1) B_k}{k + \frac{1}{2}} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi \quad (\beta_2 < \varphi < \pi).$$

(3.8)

Умножив оба эти равенства (3.8) на $\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя по φ первое равенство в пределах от нуля до $\beta_1 = \arccos \xi_1$, а второе от β_2 до π и складывая полученные выражения, для определения неизвестных коэффициентов B_n получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} B_k + b_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

где

$$a_{nk} = -\frac{\gamma_{nk}(t_1)}{\pi(2k+1)} \left| \frac{\sin(n-k)\beta_1}{n-k} + \frac{\sin(n+k+1)\beta_1}{n+k+1} \right|, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{c_0 - 2c_1 \operatorname{cth} \alpha_1}{\pi} \left| \frac{\sin n\beta_1}{n} + \frac{\sin(n+1)\beta_1}{n+1} \right| + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{cth} \alpha_1 \int_{\beta_1}^{\pi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi d\varphi \int_{-1}^{\cos \varphi} (\cos \varphi - \xi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\xi} F(x) dx d\xi + 2\delta_n c_1 \operatorname{cth} \alpha_1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

§ 4. Исследование бесконечной системы (3.9)

В бесконечной системе (3.9) произведем замену неизвестных

$$X_k = \gamma_k(t_1) B_k. \quad (4.1)$$

Тогда для определения новых неизвестных X_k получим систему

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} X_k + \gamma_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.2)$$

$$c_{nk} = -\frac{\gamma_{nk}(t_1)}{\pi(2k+1)} \left| \frac{\sin(n-k)\beta_1}{n-k} + \frac{\sin(n+k+1)\beta_1}{n+k+1} \right|, \quad (4.3)$$

$$\gamma_n = \gamma_n(t_1) \delta_n. \quad (4.4)$$

Оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных X_k в системе (4.2), получим

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| = \gamma_n(t_1) S_n^*(\beta_1) = \frac{\gamma_n(t_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left| \frac{\sin(k-n)\beta_1}{k-n} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sin(n+k+1)\beta_1}{k+n+1} \right| < \frac{\gamma_n(t_1)}{\pi} \left| \frac{\beta_1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{|k-n|} + \frac{1}{k+n+1} \right) \right| < \\ &< \frac{\gamma_n(t_1)}{\pi} \left| \frac{1}{2n+1} [4 \ln n + 4C + 4 \ln 2 + \pi - 1] + O(n^{-2}) \right|, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $C = 0,5772156 \dots$ — постоянная Эйлера.

Так как числа $\gamma_n(t_1)$ — ограниченные, то при возрастании n величина суммы S_n , начиная с некоторого $n = n_0$, монотонно стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0.$$

Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера $n = n_0$, будем иметь оценку

$$S_n < 1 - \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq n_0, \quad (4.6)$$

то есть система (4.2) квазиполне регулярна. Легко видеть, что свободные члены системы (4.2) ограничены сверху и при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Следует здесь отметить, что полученная оценка (4.5), (4.6) является очень грубой. В конкретных случаях, пользуясь определенными значениями для параметров t_1 и β_1 , характеризующих отношение полуосей эллипсоида вращения и величину поверхности контакта, оценка для модулей коэффициентов системы (4.2) может быть улучшена.

Пользуясь формулами (3.2), (3.5) и (4.5) и произведя вычисления для различных значений параметров t_1 , β_1 , для $x_n(t_1)$, $S_n(\beta_1)$ и $S_n(t_1, \beta_1)$ получим значения, которые приводятся в таблицах 1, 2 и 3.

Таблица 1

Значения для $x_n(t_1)$

$t_1 \backslash a_1$		n								
		0	1	2	3	4	5	6	7	∞
1,2	0,6224	0,5115	1,94723	2,21614	2,37323	2,46562	2,52196	2,55819	2,713483	
1,5	0,9624	0,5115	1,75464	1,86386	1,91318	1,93852	1,95347	1,96331	1,989119	
2,0	1,3170	0,5115	1,63397	1,67674	1,69407	1,70305	1,70855	1,71227	1,732031	

Таблица 2

Значения для $S_n(\beta_1)$

$\beta_1 \backslash n$	n								
	0	1	2	3	4	5	6	7	
$\frac{\pi}{12}$	0,33015	0,32274	0,30830	0,28784	0,26248	0,23431	0,20644	0,17899	
$\frac{\pi}{6}$	0,54271	0,49458	0,41240	0,32520	0,24071	0,15783	0,13216	0,16758	
$\frac{\pi}{3}$	0,83152	0,58447	0,35629	0,28263	0,28077	0,20295	0,17882	0,19322	
$\frac{\pi}{2}$	0,99842	0,56431	0,41063	0,32496	0,27122	0,23366	0,20598	0,18455	

Таблица 3

Значения для $X_k(t_1, \alpha_1)$

t_1	1,2				1,5				2,0			
	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0,1651	0,2714	0,4158	0,4992	0,1651	0,2714	0,4158	0,4992	0,1651	0,2714	0,4158	0,4992
1	0,4841	0,7419	0,8767	0,8455	0,4841	0,7419	0,8767	0,8465	0,4841	0,7419	0,8767	0,8465
2	0,6003	0,8030	0,6938	0,7996	0,5410	0,7236	0,6252	0,7295	0,5038	0,6739	0,5822	0,6710
3	0,6379	0,7207	0,6263	0,7202	0,5365	0,6061	0,5268	0,6057	0,4826	0,5453	0,4739	0,5449
4	0,6229	0,5713	0,6663	0,6437	0,5022	0,4605	0,5372	0,5189	0,4447	0,4078	0,4756	0,4595
5	0,5778	0,3892	0,5001	0,5761	0,4543	0,3060	0,3934	0,4530	0,3991	0,2688	0,3456	0,3979
6	0,5206	0,3333	0,4510	0,5195	0,4033	0,2582	0,3493	0,4024	0,3527	0,2258	0,3055	0,3519
7	0,4579	0,4287	0,4943	0,4721	0,3514	0,3290	0,3794	0,3623	0,3065	0,2869	0,3309	0,3160

Данные таблиц 1—3 показывают, что система (4.2) для рассмотренных значений параметров t_1 и β_1 является вполне регулярной.

Пользуясь формулами (2.7), (2.9), (3.9) — (3.11), (4.11) — (4.4) и суммой ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \varphi) \sin(n-k)\beta = \begin{cases} -(2 \cos \beta - 2 \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\beta & \beta < \varphi \\ (2 \cos \varphi - 2 \cos \beta)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\beta & \beta > \varphi, \end{cases} \quad (4.7)$$

для определения постоянных c_0 и c_1 получим соотношение

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k}{2k+1} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\beta_1 - (c_0 - 2c_1 \operatorname{cth} \alpha_1) \cos \frac{\beta_1}{2} + \frac{\operatorname{cth} \alpha_1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{\cos \beta_1} \left| \int F(x) dx \right| (\cos \beta_1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi = 0. \quad (4.8)$$

В этом соотношении неизвестные X_k определяются из бесконечной системы уравнений (4.2) и выражаются через постоянные c_0 и c_1 линейной зависимостью. Подставляя определенные из (4.2) значения неизвестных X_k в (4.8), мы получим линейное уравнение для определения постоянных c_0 и c_1 , одна из которых, как уже было указано, может быть выбрана произвольным образом.

Заметим, что из полученного решения, как частный случай, нетрудно получить решение контактной задачи о кручении силошного шара. Эта задача рассматривалась в работе [5].

Отметим также, что аналогичным образом может быть решена осесимметричная контактная задача для вытянутого эллипсоида вращения.

Բ. Լ. ԱԲՐԱՄՅԱՆ, Ն. Խ. ԱՐՄԻՈՒՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԲԱԲԼՅԱՆ

ԵՐԿԱՐԱՎՈՐՆ ՊՏՏՄԱՆ ԷԼԻՊՍՈՒԻԻ ՈՒՐՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՆՅԻՆ ՄԻ
ԽՆԻՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում գիտարկվում է երկարամասն պտտման էլիպսոիդի կոնտակտային մի խնդիր, երբ էլիպսոիդի մակերևույթի մի մասի վրա կիրառված է կամայական սլորոզ բեռ, իսկ էլիպսոիդի մակերևույթի մյուս մասի վրա տրված են տեղափոխություններ:

Խնդրի լուծումը սկզբում բերվում է Լեժանդրի բազմանդամներ պարունակող «դուալ» շարքեր-հավասարումների: Այդ «դուալ» շարքեր-հավասարումների լուծումը իր հերթին բերվում է անվերջ զծային հավասարումների սխեմայի մոտ չլ ստացված զծային հավասարումների անվերջ սխեմայի կիսկիսովին սեղուկյար է ն ունի վերևից սահմանափակված ն ուղեգրում գերոյի ձգտող ազատ անդամներ:

B. L. ABRAMIAN, N. Kh. ARUTIUNIAN, A. A. BABLOYAN

ON A CONTACT PROBLEM OF TORSION OF A
PROLATED ELLIPSOID OF REVOLUTION

S u m m a r y

In the present paper a contact problem connected with the torsion of a prolated ellipsoid of revolution is examined, when on one part of the surface of the ellipsoid the arbitrary torsional load is applied and on the other part of the surface the displacements are given.

To begin with, the solution of the problem is reduced to the "dual" series-equations involving the Legendre polynomials. The solution of these series-equations in its turn is reduced to the infinite system of linear equations.

The quasi quite regularity of this system is shown.

In concrete cases, as is shown by calculations, the infinite system of linear equations may be quite regular.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Melan E. Ein Beitrag zur Torsion von Rotationskörpern. Technische Blatter. Prag, №№ 48, 49-50, 1920, 417—419, 427—429.
2. Peschl Th. Bisherige Lösungen des Torsionsproblems für Drehkörper. ZAMM, Bd. 2, Heft 2, 1922, 137—147.
3. Локшин А. С. О кручении тела вращения. Известия Екатеринбург. инст., 11, № 1, 1923, 100—104.
4. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
5. Баблюян А. А. Решение некоторых рядных рядов. ДАН АрмССР, т. 39, № 3, 1961, 149—157.

6. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964, 622—629.
7. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964, 1101—1105.
8. Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О двух динамических контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965, 526—531.
9. Tables of Associated Legendre functions. Columbia University Press, New York, 1945.