ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 2, 1966 Механика

В. С. САРКИСЯН

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА НЕОРТОТРОПНЫХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИН

Исследованию задачи об изгибе анизотропных пластин посвящены многочисленные работы, среди которых особое место занимают работы Геринга [1], Буссинеска [2], Губера [3–5], С. Г. Лехницкого [6–9], С. А. Амбарцумяна [10] и других [11–13].

Решению задачи изгиба длинных неортотропных пластин методом геометрического малого параметра посвящена работа [14].

В работах [15–16] приведен метод решения задачи об изгибе неортотропных пластин.

В настоящей статье дается обоснование этого метода для неортотропных защемленных пластин. Исследован вопрос о сходимости и существовании решения задачи об изгибе анизотропных (неортотропных) защемленных пластин с произвольным очертанием.

§ 1. Метод решения задачи. Рассмотрим упругую однородную анизотропную пластинку постоянной толщины, которая деформируется под действием изгибающей нагрузки $q(x, y)$. Предположим, что в общем случае пластинка является неортотропной, т. е. имеет в каждой точке лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости (число независимых упругих постоянных равно 13). Срединную плоскость недеформированной пластинки примем за плоскость xy, поместив начало координат в произвольной точке и направив ось z в сторону ненагруженной внешней поверхности.

Тогда задача о нахождении прогибов $w(x, y)$ неортотропных защемленных пластинок, изгибающихся под действием перпендикулярных к ее плоскости сил, сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными с неразделяющимися переменными

$$\Pi^*[w] = q(x, y) \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь для оператора $\Pi^*[\ ]$ принято такое обозначение

$$\Pi^*[\ ] = D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ 4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}, \tag{1.3}$$

где жесткости D_{ij} $(i,\ j = 1, \cdots, 6)$ удовлетворяют следующим неравенствам [16]

$$D_{11} > 0, \quad D_{22} > 0, \quad D_{66} > 0, \quad D_{ii}D_{jj} - D_{ij}^2 > 0 \quad (i,\ j = 1, \cdots, 6). \tag{1.4}$$

Отметим, что имея решение краевой задачи [(1.1)—(1.2)], составляющие напряжений, изгибающие и скручивающие моменты и перерезывающие силы можно определить по известным формулам [6].

Произведя преобразования

$$x = x_1\sqrt[4]{D_{11}}, \quad y = y_1\sqrt[4]{D_{22}}, \quad w(x,\ y) = \Psi(x_1,\ x_2), \quad q(x,\ y) = q_0(x_1,\ x_2),$$

из [(1.1)—(1.2)] для определения $\Psi(x_1,\ x_2)$ получим следующую краевую задачу:

$$A_1[\Psi] + \mu A_2[\Psi] = q_0(x_1,\ x_2), \tag{1.5}$$

$$\Psi|_\Gamma = \frac{\partial^* \Psi}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{1.6}$$

где

$$A_1[\ ] = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2k\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \quad A_2[\ ] = 4\left(k_1\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + k_2\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3}\right),$$

$$\mu = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}D_{66}}} < 1, \qquad \mu' = \frac{D_{26}}{\sqrt{D_{22}D_{66}}} < 1, \quad \mu' = \lambda\mu,$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{D_{66}}}{\sqrt[4]{D_{11}D_{22}}}, \qquad k_2 = \lambda k_1, \qquad k = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^*}{\partial \nu} = \frac{l_2}{\sqrt[4]{D_{11}}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{l_1}{\sqrt[4]{D_{22}}}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad l_1 = \cos(n,\ \hat{y}), \quad l_2 = \cos(n,\ \hat{x}).$$

Отметим, что μ и μ' обращаются в нуль в случае ортотропного материала, когда главные направления упругости совпадают с координатными линиями.

Решение уравнения (1.5) представим в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$\Psi(x_1,\ x_2) = w_0(x_1,\ x_2) + \mu w_1(x_1,\ x_2) + \mu^2 w_2(x_1,\ x_2) + \cdots. \tag{1.8}$$

Подставляя значения Ψ из (1.8) в (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, находим

$$A_1[w_0] = q_0, \tag{1.9}$$

$$A_1[w_j] = -A_2[w_{j-1}] \quad (j = 1,\ 2, \cdots). \tag{1.10}$$

На основании (1.8) граничные условия (1.6) примут вид

$$w_j|_\Gamma = \frac{\partial^* w_j}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma = 0. \tag{1.11}$$

Таким образом, решение краевой задачи с неразделяющимися переменными [(1.5)—(1.6)] сводится к решению системы рекуррентных краевых задач с разделяющимися переменными [(1.9)—(1.11)].

Иначе говоря, задача об изгибе неортотропных защемленных пластин сводится к ряду задач, сходных с задачей об изгибе ортотропных защемленных пластин.

§ 2. Исследование решения основной краевой задачи. В настоящем параграфе дается исследование решения основного дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (1.5) для любой области Ω, ограниченной достаточно гладкой кривой s, при условиях (1.6). Для удобства сформулируем это в виде следующей краевой задачи, которую в дальнейшем будем называть *основной*.

Основная краевая задача. *Найти решение дифференциального уравнения*

$$\Pi[\Psi] = q_0(x_1, x_2) \qquad (\Pi[\,] = A_1[\,] + \mu A_2[\,], \quad \mu < 1) \tag{2.1}$$

для области Ω при граничных условиях

$$\Psi|_s = \frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_s = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $q_0(x_1, x_2)$ — квадратично-суммируемая функция в области Ω, μ — малый численный параметр.

Прежде, чем перейти к исследованию решения основной краевой задачи, приведем некоторые известные факты.

Пространством $C^{(m)}(\Omega)$ называется пространство m раз непрерывно дифференцируемых в Ω вплоть до контура функций n переменных $\Phi(x) = \Phi(x_1, \cdots, x_n)$. Норма в $C^{(m)}_{(\Omega)}$ вводится так

$$\|\Phi\|_{C^{(m)}_{(\Omega)}} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{(k)} \max_{x\in\Omega} |D_x^{(k)}\Phi| + \max_{x\in\Omega} |\Phi|. \tag{2.3}$$

Как известно, $C^{(m)}_{(\Omega)}$ является полным нормированным пространством, т. е. банаховым пространством. При $m = 0$ получаем обычное пространство $C(\Omega)$ с нормой

$$\|\Phi\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |\Phi|. \tag{2.4}$$

Обозначим через $L_p(\Omega)$ *пространство* функций, суммируемых по Лебегу на Ω со степенью $p \geq 1$. Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\|\Phi\|_{L_p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |\Phi|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1). \tag{2.5}$$

Пространством $W_p^{(l)}(\Omega)$ называется пространство суммируемых функций, имеющих все обобщенные производные до порядка l включительно, суммируемые по Ω со степенью p. Норма в $W_p^{(l)}(\Omega)$ определяется равенством [17]

$$\|\Phi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} = \left\{\int_\Omega \left[|\Phi|^p + \sum_{k=1}^{l}\sum_{(k)} (D_i^{(k)}\Phi)^p\right] dx\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{2.6}$$

В дальнейшем нам необходимы следующие теоремы вложения С. Л. Соболева [17].

Теорема I (Вложение $W_p^{(l)}$ в C). *Если $\Phi \in W_p^{(l)}$ и $n < lp$, то $\Phi \in C(\Omega)$ и выполняется неравенство*

$$\|\Phi\|_C \leqslant M\|\Phi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}, \tag{2.7}$$

где M — постоянная, не зависящая от выбора функции Φ.

Теорема II (Вложение $W_p^{(l)}$ и $W_{p_1}^{(l_1)}$). *Если $\Phi \in W_p^{(l)}(\Omega)$, то Φ имеет все обобщенные производные порядка ниже l. При этом:*

1) если $lp > n$, $0 \leqslant m < l - \frac{n}{p}$, то $\frac{\partial^m\Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ непрерывны и

$$\left|\frac{\partial^m\Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right| < M\|\Phi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}; \tag{2.8}$$

2) если $m > 0$ и $m > l - \frac{n}{p}$, $s > n - (l - m)p$, то на всяком многообразии s измерений

$$\frac{\partial^m\Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \in L_{q^*},$$

где $q^* < q = \frac{sp}{n - (l - m)p}$, причем

$$\left\|\frac{\partial^m\Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_{q^*}} \leqslant M\|\Phi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Теорема III (Полная непрерывность оператора вложения в C). *Если $n < lp$, то оператор вложения $W_p^{(l)}$ в C вполне непрерывен, т. е. всякое множество $\{\Phi\} \subset W_p^{(l)}$ с ограниченной нормой $\|\Phi\|_{W_p^{(l)}} \leqslant N$ является компактным в C.*

Докажем, что оператор $\Pi[\;]$, фигурирующий в (2.1) при закрепленной границе пластинки положительно определенный. Нетрудно проверить, что линейный оператор $\Pi[\;]$ симметричный, т. е.

$$(\Pi[u], v) = (u, \Pi[v]), \tag{2.10}$$

где символом (u, v) обозначено скалярное произведение функций $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$.

Применяя формулу Грина и учитывая (2.2), можно написать, что

$$(\Pi[\Psi],\ \Psi) = \xi_1^2 + 2k\xi_3^2 + \xi_2^2 + \mu(k_1\xi_1\xi_3 + k_2\xi_2\xi_3), \tag{2.11}$$

где

$$\xi_1 = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2}\right)^2 d\Omega, \quad \xi_2 = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2}\right)^2 d\Omega, \quad \xi_3 = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 d\Omega.$$

Нетрудно доказать, что при $k > -1$ и $(1+k)^2 > \frac{\mu^2}{2}(k_1^2 + k_2^2)$ имеет место следующее неравенство

$$\xi_1^2 + 2k\xi_3^2 + \xi_2^2 + \mu(k_1\xi_1\xi_3 + k_2\xi_2\xi_3) > \lambda_0(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_3^2), \tag{2.12}$$

если только

$$0 < \lambda_0 < \lambda^*, \tag{2.13}$$

где

$$\lambda^* = \min\left[1;\ \frac{1+k \pm \sqrt{(1+k)^2 - \frac{\mu^2}{2}(k_1^2+k_2^2)}}{2}\right]. \tag{2.14}$$

При помощи неравенства Фридрихса [21, 22] доказывается следующее неравенство

$$\|\Psi\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\gamma}(\xi_1^2 + 2\xi_3^2 + \xi_2^2), \tag{2.15}$$

где γ — положительно-постоянная величина.

Из (2.11), (2.12) и (2.15) немедленно следует, что

$$(\Pi[\Psi],\ \Psi) \geqslant \alpha^2\|\Psi\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (\alpha^2 = \lambda_0\gamma), \tag{2.16}$$

т. е. при граничных условиях (2.2) оператор $\Pi[\ ]$ положительно определенный.

Далее, принимая во внимание теоремы вложения С. Л. Соболева [17] и некоторые результаты работ О. А. Ладыженской [18], А. И. Кошелева [19] и О. В. Гусевой [20] устанавливаем:

1. *Основная краевая задача [(2.1)—(2.2)] имеет единственное решение из* $W_2^{(4)}(\Omega)$, *если* $q_0(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$;

2. *Если функция* $q_0(x_1, x_2)$ *достаточно гладкая, то существует четырежды непрерывно дифференцируемое в* $\bar\Omega$ $(\bar\Omega = \Omega + s)$ *решение основной краевой задачи [(2.1)—(2.2)];*

3. *Если оператор* $\Pi[\ ]$ *положительно-определенный, то для любой функции из* $W_2^{(4)}(\Omega)$ *и любой области* Ω *с границей, непрерывно дифференцируемой необходимое число раз, верно следующее неравенство*

$$\|\Psi\|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \leqslant C_1\|\Pi[\Psi]\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Теперь сформулируем и докажем следующую теорему, которая дает представление о поведении решения основной краевой задачи.

Основная теорема. *Существует решение основной краевой задачи [(2.1)—(2.2)], имеющее вид*

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_0(x_1, x_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \Psi_j(x_1, x_2), \tag{2.18}$$

причем при $|\mu| < \dfrac{1}{4C_1(k_1 + |k_2|)}$ *ряды* (2.18) *и ряды*

$$D^{(k)}_{(x_1, x_2)}\Psi = D^{(k)}_{(x_1, x_2)}\Psi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j D^{(k)}_{(x_1, x_2)}\Psi_j \quad (k = 1, 2) \tag{2.19}$$

сходятся равномерно по x_1 *и* x_2 *в замкнутой области* $\bar{\Omega}$, *ряды третьих производных (2.18) по* x_1 *и* x_2 *сходятся в любом пространстве* $L_p(\Omega)$ $(p > 1)$, *и ряды четвертых производных сходятся в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть существует решение основной краевой задачи [(2.1)—(2.2)] в виде (2.18). В этом случае при помощи (2.18) из (2.1) и (2.2) получается система рекуррентных краевых задач:

$$\left.\begin{aligned} &A_1[\Psi_0] = q_0(x_1, x_2) \\ &\Psi_0|_s = \frac{\partial \Psi_0}{\partial n}\Big|_s = 0; \end{aligned}\right| \tag{2.20}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1[\Psi_j] = -A_2[\Psi_{j-1}], \\ &\Psi_j|_s = \frac{\partial \Psi_j}{\partial n}\Big|_s = 0. \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \cdots)\right| \tag{2.21}$$

Перейдем к доказательству существования такого решения. Для этого необходимо оценить $|\Psi_j|$ в зависимости от j. С этой целью сначала оцениваем $\|\Psi_j\|_{W_2^{(4)}(\Omega)}$ $(j \geq 0)$. Из (2.20), принимая во внимание (2.17), находим

$$\|\Psi_0\|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \leq C_1 Q(\Omega) \qquad (Q(\Omega) = \|q_0\|_{L_2(\Omega)}). \tag{2.22}$$

Оценим $\|\Psi_1\|_{W_2^{(4)}(\Omega)}$

$$\|\Psi_1\|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \leq 4C_1 \left\| k_1 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1^3 \partial x_2} + k_2 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right\|_{L_2(\Omega)} \tag{2.23}$$

или, принимая во внимание известное неравенство треугольника,

$$\|\Psi_1\|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \leq 4C_1 \left\{ k_1 \left\| \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right\|_{L_2(\Omega)} + |k_2| \left\| \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right\|_{L_2(\Omega)} \right\}. \tag{2.24}$$

На основании неравенства (2.22) оценим следующие выражения

$$\left\| \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right\|_{L_2(\Omega)} \le \| \Psi_0 \|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \le C_1 Q(\Omega), \tag{2.25}$$

$$\left\| \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right\|_{L_2(\Omega)} \le \| \Psi_0 \|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \le C_1 Q(\Omega). \tag{2.26}$$

Затем, учитывая (2.24)–(2.26), для $\| \Psi_1 \|_{W_2^{(4)}(\Omega)}$ будем иметь

$$\| \Psi_1 \|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \le 4 C_1^2 Q(\Omega) (k_1 + |k_2|). \tag{2.27}$$

Методом математической индукции для любого $j \geq 0$ доказывается, что

$$\| \Psi_j \|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \le 4^j C_1^{j+1} (k_1 + |k_2|)^j Q(\Omega). \tag{2.28}$$

Напишем следующие неравенства

$$\| \Psi_j \|_{L_2(\Omega)} \le \| \Psi_j \|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \quad (j \geq 0) \tag{2.29}$$

$$\| D^{(k)}_{x_1 x_2} \Psi_j \|_{L_2(\Omega)} \le \| \Psi_j \|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \quad (k = 1, \cdots, 4). \tag{2.30}$$

Из оценок (2.28)–(2.30) следует, что ряд (2.18) и его производные по x_1 и x_2 до четвертого порядка включительно в области Ω как в метрике $W_2^{(4)}(\Omega)$, так и в $L_2(\Omega)$ сходятся, если только параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{4C_1(k_1 + |k_2|)}. \tag{2.31}$$

Теперь докажем, что ряд (2.18) сходится равномерно*) в замкнутой области $\overline{\Omega}$. С этой целью поместим Ω внутри некоторого прямоугольника Ω^* и доопределим функции $\Psi_j(x_1, x_2)$ в Ω^*, положив их равными нулю вне Ω. Тогда эти функции, также, как и их первые производные, непрерывны в Ω^*. В этом случае для функции $\Psi_j(x_1, x_2)$, удовлетворяющей на s условию $\Psi_j = 0$ и $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} = 0$, имеет место следующее неравенство

$$|\Psi_j(x_1, x_2)| \le \sqrt{\Omega} \left\| \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.32}$$

В силу неравенства (2.31), оценку (2.32) для $|\Psi_j|$ можно усилить**)

$$|\Psi_j| \le 4^j C_1^{j+1} (k_1 + |k_2|)^j Q^*(\Omega) \qquad (Q^*(\Omega) = Q(\Omega) \cdot \sqrt{\Omega}). \tag{2.33}$$

Из (2.33) при соблюдении условия (2.31) немедленно вытекает равномерная сходимость ряда (2.18) по x_1 и x_2 в $\overline{\Omega}$.

Итак, первая часть основной теоремы доказана.

---

*) Это является частным случаем теоремы вложения С. Л. Соболева [17].

**) Оценку (2.33) для $|\Psi_j|$ можно получить также при помощи теорем I и III (Соболева С. Л.).

Перейдем к доказательству второй части этой теоремы. Условия теоремы II удовлетворены. Следовательно, можно написать, что

$$|D^{(k)}_{\alpha,\beta}\Psi_j| < M\|\Psi_j\|_{W_2^{(4)}(\Omega)}, \quad k=1,\ 2, \quad j>0, \tag{2.34}$$

$$\|D^{(2)}_{\alpha,\beta}\Psi_j\|_{L_p(\Omega)} < M\|\Psi_j\|_{W_2^{(4)}(\Omega)} \quad (p>1). \tag{2.35}$$

Из неравенств (2.34)—(2.35) с учетом (2.28) и (2.30) вытекает доказательство второй части основной теоремы. Теорема доказана.

Замечание. При решении конкретных практических задач обычно ограничиваются вторым или третьим приближениями решения основной краевой задачи [(2.1)—(2.2)]. С этой же точки зрения отметим следующее соображение. Если в ряде (2.18) ограничиться членами, содержащими μ^j, то, как легко видеть, ошибка не будет превосходить величины

$$\delta_j = \frac{C_1 Q^*(\Omega)\,|\mu q|^{j+1}}{1-|\mu q|}, \text{ где } q = 4C_1(k_1+|k_2|),$$

а относительная погрешность

$$\varepsilon_j = \frac{|q\mu|^{j+1}}{1-|\mu q|^{j+1}}. \tag{2.36}$$

§ 3. Изгиб эллиптической пластинки, заделанной по краю. Рассмотрим эллиптическую однородную пластинку, заделанную по всему краю, изгибающуюся нормальной нагрузкой, заданной в виде линейной функции переменных x, y

$$q = q_{00} + q_{10}\frac{x}{a} + q_{01}\frac{y}{b}$$

или

$$q = q_{00} + q_{10}\frac{\alpha}{a_1} + q_{01}\frac{\beta}{b_1}, \tag{3.1}$$

где

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt[4]{D_{11}}}, \qquad b_1 = \frac{b}{\sqrt[4]{D_{22}}}, \qquad \alpha = x_1, \quad \beta = x_2,$$

а постоянные a и b являются полуосями эллипса.

Решения краевых задач [(2.20)—(2.21)] для рассматриваемой эллиптической области будут

$$W_{2n}(\alpha,\beta) = A_1(\alpha,\beta)\,q^{2n}, \tag{3.2}$$

$$W_{2n+1}(\alpha,\beta) = A_2(\alpha,\beta)\,q^{2n}, \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{3.3}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$A_1(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} - 1\right)^2\left(q_1 + \alpha\frac{q_{10}}{a_1c_1} + \beta\frac{q_{01}}{b_1c_2}\right), \tag{3.4}$$

$$A_2(\alpha, \beta) = -\frac{4e_2}{e_1 e_3}\left(\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha}{a_1} q_{01} + \frac{\beta}{b_1} q_{10}\right), \tag{3.5}$$

$$q_1 = \frac{q_{00}}{4!\left(\dfrac{1}{a_1^4} + \dfrac{2k}{3a_1^2 b_1^2} + \dfrac{1}{b_1^4}\right)}, \qquad e_1 = 4!\left(\frac{5}{a_1^4} + \frac{2k}{a_1^2 b_1^2} + \frac{1}{b_1^4}\right),$$

$$e_2 = 4!\left(\frac{k_1}{a_1^3 b_1} + \frac{k_2}{a_1 b_1^3}\right), \quad e_3 = 4!\left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{2k}{a_1^2 b_1^2} + \frac{5}{b_1^4}\right), \quad \tilde{q} = \frac{4|e_2|}{\sqrt{e_1 e_3}}. \tag{3.6}$$

Из выражения (2.18), принимая во внимание соотношения (3.2) и (3.3), для $\Psi(\alpha, \beta)$ находим

$$\Psi(\alpha, \beta) = [A_1(\alpha, \beta) + \mu A_2(\alpha, \beta)]\,(1 + \mu^2 \tilde{q}^2 + \mu^4 \tilde{q}^4 + \cdots). \tag{3.7}$$

Откуда видно, что

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{A_1(\alpha, \beta) + \mu A_2(\alpha, \beta)}{1 - \mu^2 \tilde{q}^2}, \tag{3.8}$$

если только малый параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{\tilde{q}}, \tag{3.9}$$

где

$$\tilde{q} = \frac{4\sqrt{D_{11} D_{66}}\left|\lambda^2 + \dfrac{D_{26}}{D_{16}}\right|\lambda}{\sqrt{[5D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 + D_{22}]\,[D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 + 5D_{22}]}},$$

$$\lambda = \frac{b}{a}.$$

Замечание. Пусть материал пластинки является стеклотекстолитом КАСТ—В (ортотропный материал) со следующими упругими постоянными

$$E_1 = 2{,}15 \cdot 10 \frac{кг}{см^2}, \qquad E_2 = 1{,}23 \cdot 10 \frac{кг}{см^2},$$

$$G = 0{,}207 \cdot 10 \frac{кг}{см^2}, \qquad \nu_1 = 0{,}19, \quad \nu_2 = 0{,}11.$$

Предположим, что главные оси упругости составляют с координатными осями угол, равный 45°. Тогда $\mu = -\frac{1}{4}$ и по формуле (2.36) можно установить, что ошибка не превосходит 1% при $\lambda = 1$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, если в ряде (2.18) ограничиться первыми двумя членами.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 IV 1965

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՈՉ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՓՈՔՐ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Անիզոտրոպ սալերի ծռման խնդրի լուծմանն են նվիրված մի շարք աշխատություններ (1—14)։

[15—16] աշխատություններում առաջարկված է ոչ օրթոտրոպ սալերի ծռման խնդրի լուծման եղանակ։

Ներկա աշխատության մեջ տրվում է այդ եղանակի հիմնավորումը ամրակցված սալերի համար։

Հետազոտված են խնդրի լուծման զուգամիտության և գոյության հարցերը ամրակցված կամայական տեսքի սալերի համար։

V. S. SARKISSIAN

THE CONVERGENCE OF THE SMALL PARAMETER METHOD IN THE SOLUTION OF NON-ORTHOTROP BENDING PROBLEM OF CLAMPED PLATES

Summary

The bending problem of anisotrop plates has been considered in the papers [1—14].

The method of the solution of the bending problem of non-orthotrop plates is given in papers [15—16].

The validity of this method in the case of clamped plates is given in this paper.

The convergence and existence of the problem solution is studied for plates of arbitrary forms.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gehring F.* De aequationibus differentialibus quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definitur. Berlin, 1860.
2. *Boussinesque M. J.* Compléments à une etude sur la theorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastique. Journal de Math. pures et appl., ser. 3, 5, 1879.
3. *Huber M. T.* Teorja plyt. Lwow, 1921.
4. *Huber M. T.* Einige Anwendungen der Biegungstheorie orthotroper Platten. Zeitschr. f. angew. Math. und Mech., B. 6, H. 3, 1926.
5. *Huber M. T.* Probleme der statik technisch wichtiger orthotroper Platten. Warszawa, 1929.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехтеоретиздат, М., 1957.
7. *Лехницкий С. Г.* О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ, новая серия 2, вып. 2, 1938.

8. *Лехницкий С. Г.* О напряжениях вблизи кругового отверстия в анизотропной пластинке при изгибе. Вестник инженеров и техников, № 4, 1937.

9. *Лехницкий С. Г.* Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения. ПММ, 5, № 1, 1941.

10. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.

11. *Nowacki W.* Pasma płytowe ortotropowe. Archiwum Mechaniki stosowanej, 3, z. 3—4, Gdansk, 1951.

12. *Nowacki W.* Beitrag zur Theorie der orthotropen Platten. Acta technica Academiae scientiarum hungaricae, 8, fars 1—2, Budapest, 1954.

13. *Cywinska Z.*, *Massakowski J.* Powierzchnie wpływowe ortotropowego półpasma płytowego. Archiwum mechanici stosomanej, 6, z. 1, 1954.

14. *Саркисян В. С.* Об изгибе длинных анизотропных пластинок, движущихся в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1961.

15. *Саркисян В. С.* К решению задачи изгиба анизотропных (неортотропных) пластин. ДАН АрмССР, 37, № 3, 1963.

16. *Саркисян В. С.* К решению задачи изгиба анизотропных (неортотропных) пластин на упругом основании. Известия АН АрмССР, 17, № 2, 1964.

17. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Изд. МГУ, 1950.

18. *Ладыженская О. А.* Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений. Вестник ЛГУ, № 11, 1955.

19. *Кошелев А. И.* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи математических наук, 13, вып. 4 (82), 1958.

20. *Гусева О. В.* О краевых задачах для сильно эллиптических систем. ДАН СССР, 102, № 6, 1955.

21. *Friedrichs K.* Randwert-und Eigenwertprobleme aus der elastischen Platten. Math. Ann., Bd. 98, 1928.

22. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Гостехтеориздат, М., 1957.