ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 2, 1966 Механика

С. А. АМБАРЦУМЯН

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕЙ ИЛИ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Как известно [1, 2], в разносопротивляющей или разномодульной теории упругости чисто статические и чисто геометрические уравнения и соотношения ничем не отличаются от соответствующих уравнений и соотношений классической теории упругости.

Существенные изменения претерпевают лишь уравнения обобщенного закона упругости, которые в общем случае принципиально отличаются от уравнений обобщенного закона Гука.

2. Пусть рассматриваемый материал таков, что при чистом растяжении в любом направлении имеет модуль упругости E^+, а при чистом сжатии в любом направлении — E^-. Пусть коэффициентами Пуассона являются: ν^+ — характеризующий поперечное сжатие при растяжении, ν^- — характеризующий поперечное расширение при сжатии.

Предполагается, что при одновременном растяжении и сжатии в различных взаимно ортогональных главных направлениях модули упругости и коэффициенты Пуассона остаются соответственно E^+, ν^+ и E^-, ν^-.

Считается, что рассматриваемый материал при любом напряженном состоянии претерпевает лишь малые упругие деформации и подчиняется общим закономерностям сплошной упругой среды [3, 4].

В силу сказанного, обобщенный закон Гука в главных направлениях (α, β, γ) запишется следующим образом [1]:

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha} &= a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_\gamma, \quad e_{\alpha\beta} = 0,\\
e_{\beta\beta} &= a_{21}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{23}\sigma_\gamma, \quad e_{\beta\gamma} = 0, \qquad (2.1)\\
e_{\gamma\gamma} &= a_{31}\sigma_\alpha + a_{32}\sigma_\beta + a_{33}\sigma_\gamma, \quad e_{\alpha\gamma} = 0,
\end{aligned}
$$

где a_{ik} — коэффициенты упругости, которые в зависимости от знаков главных напряжений σ_α, σ_β и σ_γ могут принимать лишь следующие значения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E^+} \quad \text{или} \quad \frac{1}{E^-} \quad \text{при } i = k;\\
&\frac{\nu^+}{E^+} \quad \text{или} \quad \frac{\nu^-}{E^-} \quad \text{при } i \neq k. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Решая (2.1) относительно напряжений, получим

$$
\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= C_{11}e_{\alpha\alpha} + C_{12}e_{\beta\beta} + C_{13}e_{\gamma\gamma},\\
\sigma_\beta &= C_{21}e_{\alpha\alpha} + C_{22}e_{\beta\beta} + C_{23}e_{\gamma\gamma},\\
\sigma_\gamma &= C_{31}e_{\alpha\alpha} + C_{32}e_{\beta\beta} + C_{33}e_{\gamma\gamma},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где C_{ik} — упругие постоянные, которые определяются с помощью формул

$$
C_{11} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}{\Omega}, \qquad C_{22} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{\Omega},
$$

$$
C_{33} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\Omega},
$$

$$
\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}}{\Omega}, \qquad C_{21} = \frac{a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}}{\Omega},\\
C_{13} &= \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{\Omega}, \qquad C_{31} = \frac{a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}}{\Omega},\\
C_{23} &= \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{\Omega}, \qquad C_{32} = \frac{a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}}{\Omega},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
\Omega = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.
$$

Так как внутренние упругие силы имеют потенциал, можно записать [3, 4]

$$
\sigma_\alpha = \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\alpha}}, \qquad \sigma_\beta = \frac{\partial W}{\partial e_{\beta\beta}}, \qquad \sigma_\gamma = \frac{\partial W}{\partial e_{\gamma\gamma}},
\tag{2.5}
$$

где W — потенциальная энергия деформации, отнесенная к единице объема тела в данной точке.

Исходя из (2.3) и (2.5) и поступая обычным образом [4], получим

$$
C_{ik} = C_{ki},
\tag{2.6}
$$

в силу чего легко показать наличие взаимности между коэффициентами упругости, т. е.

$$
a_{ik} = a_{ki}.
\tag{2.7}
$$

Исходя из приведенных выше результатов, для коэффициентов a_{ik} в различных общих случаях напряженного состояния можно получить

1) если $\sigma_\alpha > 0$, $\sigma_\beta > 0$, $\sigma_\gamma > 0$,

$$
a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E^+}, \qquad a_{ik} = -\frac{\nu^+}{E^+};
\tag{2.8}
$$

2) если $\sigma_\alpha < 0$, $\sigma_\beta < 0$, $\sigma_\gamma < 0$,

$$
a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E^-}, \qquad a_{ik} = -\frac{\nu^-}{E^-};
\tag{2.9}
$$

3) если $\sigma_\alpha > 0$, $\sigma_\beta < 0$, $\sigma_\gamma > 0$,

$$a_{11} = a_{33} = \frac{1}{E^+}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \qquad a_{ik} = -\frac{\nu^-}{E^-} = -\frac{\nu^+}{E^+}; \tag{2.10}$$

4) если $\sigma_\alpha > 0$, $\sigma_\beta < 0$, $\sigma_\gamma < 0$,

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{ik} = -\frac{\nu^-}{E^-} = -\frac{\nu^+}{E^+} \tag{2.11}$$

и т. д.

Рассматривая (2.1) и различные возможные варианты значений a_{ik} т. е. (2.8)–(2.11) и т. д., замечаем, что в тех точках и областях тела, где все три главные напряжения (σ_α, σ_β, σ_γ) или растягивающие или сжимающие, для коэффициентов a_{ik} соответственно имеем или (2.8) или (2.9), т. е. обобщенный закон Гука (2.1) совпадает со своей классической формулировкой, данной для однородного изотропного тела. Что же касается иных областей и точек тела, где одно из главных напряжений имеет отличный от двух других главных напряжений знак, для коэффициентов a_{ik} имеем (2.10), (2.11) и т. д., т. е. обобщенный закон Гука (2.1) приобретает новую структуру, напоминающую структуру обобщенного закона Гука, сформулированного для ортотропного тела.

Таким образом, в настоящем пункте сформулирован обобщенный закон Гука, в главных направлениях (α, β, γ), для разномодульного материала.

3. Исходя из (2.1), напишем обобщенный закон упругости для исходной декартовой системы координат (x, y, z), относительно которой положение главных направлений (α, β, γ) рассматриваемой точки определяется с помощью девяти направляющих косинусов (см. схему), которые удовлетворяют известным уравнениям следующих типов [3, 4]

	α	β	γ
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

$$\begin{aligned} &l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \\ &l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Пользуясь известными формулами преобразования компонентов напряженного и деформированного состояний при переходе от одной ортогональной системы координат к другой [3], получим следующие эквивалентные варианты уравнений обобщенного закона упругости [2]

$$e_{xx} = \begin{cases} a_{11}\sigma_x + a_{12}(\sigma_y + \sigma_z) + B_3 m_1^2 \sigma_1 + B_2 n_1^2 \sigma_1 \\ a_{22}\sigma_x + a_{12}(\sigma_y + \sigma_z) - B_3 l_1^2 \sigma_1 + B_1 n_1^2 \sigma_1 \\ a_{33}\sigma_x + a_{12}(\sigma_y + \sigma_z) - B_2 l_1^2 \sigma_1 - B_1 m_1^2 \sigma_1, \end{cases}$$

$$e_{yy} = \begin{cases} a_{11}\sigma_y + a_{12}(\sigma_x + \sigma_z) + B_3 m_2^2 \sigma_1 + B_2 n_2^2 \sigma_1 \\ a_{22}\sigma_y + a_{12}(\sigma_x + \sigma_z) - B_3 l_2^2 \sigma_1 + B_1 n_2^2 \sigma_1 \\ a_{33}\sigma_y + a_{12}(\sigma_x + \sigma_z) - B_2 l_2^2 \sigma_1 - B_1 m_2^2 \sigma_1, \end{cases}$$

$$e_{zz}=\begin{cases}a_{11}\sigma_z+a_{12}(\sigma_x+\sigma_y)+B_3m_3^2\sigma_2+B_2n_3^2\sigma_3\\ a_{22}\sigma_z+a_{12}(\sigma_x+\sigma_y)-B_3l_3^2\sigma_1+B_1n_3^2\sigma_3\\ a_{33}\sigma_z+a_{12}(\sigma_x+\sigma_y)-B_2l_3^2\sigma_1-B_1m_3^2\sigma_2,\end{cases}$$

$$e_{yz}=\begin{cases}2A_1\tau_{yz}+2B_3m_2m_3\sigma_2+2B_2n_2n_3\sigma_3\\ 2A_2\tau_{yz}-2B_3l_2l_3\sigma_1+2B_1n_2n_3\sigma_3\\ 2A_3\tau_{yz}-2B_2l_2l_3\sigma_1-2B_1m_2m_3\sigma_2,\end{cases}$$

$$e_{zx}=\begin{cases}2A_1\tau_{zx}+2B_3m_1m_3\sigma_2+2B_2n_1n_3\sigma_3\\ 2A_2\tau_{zx}-2B_3l_1l_3\sigma_1+2B_1n_1n_3\sigma_3\\ 2A_3\tau_{zx}-2B_2l_1l_3\sigma_1-2B_1m_1m_3\sigma_2,\end{cases}$$

$$e_{xy}=\begin{cases}2A_1\tau_{xy}+2B_3m_1m_2\sigma_2+2B_2n_1n_2\sigma_3\\ 2A_2\tau_{xy}-2B_3l_1l_2\sigma_1+2B_1n_1n_2\sigma_3\\ 2A_3\tau_{xy}-2B_2l_1l_2\sigma_1-2B_1m_1m_2\sigma_2,\end{cases} \qquad (3.2)$$

где

$$A_1=a_{11}-a_{12},\qquad B_1=a_{33}-a_{22},$$
$$A_2=a_{22}-a_{12},\qquad B_2=a_{33}-a_{11}, \qquad (3.3)$$
$$A_3=a_{33}-a_{12},\qquad B_3=a_{22}-a_{11}.$$

Что касается главных напряжений, то они через искомые напряжения и направляющие косинусы представляются обычным [3, 4] образом*

$$\sigma_1=l_1^2\sigma_x+l_2^2\sigma_y+l_3^2\sigma_z+2(l_2l_3\tau_{yz}+l_1l_3\tau_{zx}+l_1l_2\tau_{xy}) \quad (l,\ m,\ n). \quad (3.4)$$

Что же касается направляющих косинусов l_i, m_i, n_i, которые являются функциями напряженного состояния рассматриваемой точки, то они, при использовании соотношений (3.1), могут быть определены из условий $\tau_{12}=0$, $\tau_{23}=0$, $\tau_{31}=0$, которые имеют вид [3, 4]

$$\tau_{23}=m_1n_1\sigma_x+m_2n_2\sigma_y+m_3n_3\sigma_z+(m_2n_3+m_3n_2)\tau_{yz}+$$
$$+(m_1n_3+m_3n_1)\tau_{zx}+(m_1n_2+m_2n_1)\tau_{xy}=0, \quad (l,\ m,\ n). \qquad (3.5)$$

В последующем может возникнуть необходимость представления главных напряжений и направляющих косинусов через искомые деформации. В связи с этим приводим также формулы преобразования деформаций, которые имеют вид [3, 4]

$$e_{11}=l_1^2e_{xx}+l_2^2e_{yy}+l_3^2e_{zz}+l_2l_3e_{yz}+l_1l_3e_{zx}+l_1l_2e_{xy}, \quad (l,\ m,\ n), \quad (3.6)$$

$$e_{23}=2(m_1n_1e_{xx}+m_2n_2e_{yy}+m_3n_3e_{zz})+(m_2n_3+m_3n_2)e_{yz}+$$
$$+(m_1n_3+m_3n_1)e_{zx}+(m_1n_2+m_2n_1)e_{xy}, \quad (l,\ m,\ n). \qquad (3.7)$$

* $(l,\ m,\ n)$ указывает, что значения остальных двух уравнений можно получить путем круговой перестановки.

Рассматривая (3.2), замечаем, что обобщенный закон упругости для разномодульных тел существенно отличается от обобщенного закона Гука классической теории упругости. Обобщенный закон упругости (3.2) наряду с известными величинами содержит новые члены, которые, будучи произведениями направляющих косинусов и главных напряжений, являются нелинейными функциями напряженного состояния рассматриваемой точки. В частности, когда напряжения σ_x, σ_y, σ_z являются главными напряжениями данной точки, то обобщенный закон упругости (3.2) совпадает с обобщенным законом Гука (2.1). В случае же, когда $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, $A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{2} G^{-1}$ (G — модуль сдвига), обобщенный закон упругости (3.2) превращается в обобщенный закон Гука классической теории упругости изотропного тела.

Таким образом, имея статические и геометрические уравнения классической теории упругости и уравнения обобщенного закона упругости, можно приступить к рассмотрению отдельных задач разносопротивляющей или разномодульной теории упругости.

При рассмотрении конкретных задач разномодульной теории упругости в тех точках и областях тела, где одновременно $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 > 0$ или, наоборот, $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 < 0$, как нетрудно заметить, обобщенный закон упругости совпадает с обобщенным законом Гука классической теории упругости. В этих точках и областях, которые будем называть точками или областями первого рода, надо пользоваться лишь уравнениями классической теории упругости, при этом надо лишь помнить, что в качестве упругих постоянных должны быть взяты или E^+, ν^+, или E^-, ν^-. А в тех точках и областях тела, где одно из главных напряжений имеет отличный от двух других главных напряжений знак (например, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$, $\sigma_2 > 0$), оставляя неизменными чисто статические и чисто геометрические уравнения и соотношения классической теории упругости, к ним должны быть присоединены уравнения обобщенного закона упругости (3.2). Такие точки и области тела впредь будем называть точками и областями второго рода.

В связи с этим укажем, что зачастую, при рассмотрении задач разносопротивляющей или разномодульной теории упругости, будут возникать вопросы определения областей и точек того или иного рода [1, 2].

Для полноты картины и удобства дальнейшего изложения, приведем те уравнения и соотношения классической теории упругости [3, 4], которые будут использованы в последующем.

Уравнения равновесия*

* Здесь и в последующем частные производные обозначаются запятыми в индексах с последующим указанием аргументов, по которым берутся производные.

$$\begin{aligned}
&\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + \rho X = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx},\\
&\tau_{yx,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + \rho Y = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx},\\
&\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \sigma_{z,z} + \rho Z = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy};
\end{aligned} \tag{3.8}$$

условия на поверхности:

$$\begin{aligned}
&X_\nu = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \quad l = \cos(\nu, x),\\
&Y_\nu = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \quad m = \cos(\nu, y),\\
&Z_\nu = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \quad n = \cos(\nu, z);
\end{aligned} \tag{3.9}$$

зависимости между компонентами деформации (e_{ik}) и компонентами перемещения (u, v, w):

$$\begin{aligned}
&e_{xx} = u_{,x}, \quad e_{yy} = v_{,y}, \quad e_{zz} = w_{,z}\\
&e_{xy} = v_{,x} + u_{,y}, \quad e_{yz} = w_{,y} + v_{,z}, \quad e_{zx} = u_{,z} + w_{,x};
\end{aligned} \tag{3.10}$$

уравнения неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned}
&e_{xx,yy} + e_{yy,xx} = e_{xy,xy} \qquad (x, y, z)\\
&(e_{yz,x} + e_{zx,y} - e_{xy,z})_{,z} = 2e_{zz,xy} \qquad (x, y, z).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

4. Рассмотрим задачу плоской деформации. Принимается, что а) направление z является главным и совпадает с γ, б) перемещение w равно нулю, в) перемещения u и v являются функциями лишь x и y.

В силу принятых предположений можно записать

$$l_3 = m_3 = n_1 = n_2 = 0, \qquad n_3 = 1, \tag{4.1}$$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0, \tag{4.2}$$

$$e_{zz} = 0, \qquad e_{xz} = 0, \qquad e_{yz} = 0, \tag{4.3}$$

$$\sigma_z = \sigma_3, \qquad \tau_{xz} = 0, \qquad \tau_{yz} = 0. \tag{4.4}$$

Учитывая, что $e_{zz} = 0$, из третьих уравнений закона упругости (3.2) получим

$$\sigma_z = -\frac{a_{12}}{a_{33}}(\sigma_x + \sigma_y). \tag{4.5}$$

Значение коэффициента a_{33}, очевидно, можно установить лишь после того как будет определен знак напряжения σ_z. При $\sigma_z > 0$ для a_{33} должны взять $1/E^+$, а при $\sigma_z < 0$ — $1/E^-$.

Подставляя значение σ_z из (4.5) в (3.2), для уравнений обобщенного закона упругости, в интересующем нас варианте, получим

$$\begin{aligned}
&e_{xx} = b_{11}\sigma_x + b_{12}\sigma_y + B_3 m_1^2 \sigma_3,\\
&e_{yy} = b_{11}\sigma_y + b_{12}\sigma_x + B_3 m_2^2 \sigma_3,\\
&e_{xy} = 2A_1\tau_{xy} + 2B_3 m_1 m_2 \sigma_3,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$b_{ik} = \left(a_{ik} - \frac{a_{12}^2}{a_{33}}\right) \qquad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2). \tag{4.7}$$

Решая (4.6), относительно напряжений получим

$$\sigma_x = \frac{1}{A_1} e_{xx} - \frac{\nu_1}{A_1} e + B_3 \left(\frac{\nu_1}{A_1} - \frac{m_1^2}{A_1} \right) \sigma_2,$$

$$\sigma_y = \frac{1}{A_1} e_{yy} - \frac{\nu_1}{A_1} e + B_3 \left(\frac{\nu_1}{A_1} - \frac{m_2^2}{A_1} \right) \sigma_2, \qquad (4.8)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2A_1} e_{xy} - \frac{B_3}{A_1} m_1 m_2 \sigma_2,$$

где

$$\nu_1 = \frac{b_{12}}{b_{11} + b_{12}}, \qquad e = e_{xx} + e_{yy},$$

$$\sigma_2 = m_1^2 \sigma_x + m_2^2 \sigma_y + 2 m_1 m_2 \tau_{xy}. \qquad (4.9)$$

Направляющие косинусы m_1 и m_2 определятся из условия $\tau_{12} = 0$, которое имеет вид

$$\tau_{12} = l_1 m_1 \sigma_x + l_2 m_2 \sigma_y + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \tau_{xy} = 0. \qquad (4.10)$$

Из уравнения (4.10) с учетом (3.1) для направляющих косинусов получим

$$m_1^2 = \frac{1}{1 + k^2}, \qquad m_2^2 = \frac{k^2}{1 + k^2}, \qquad m_1 m_2 = \frac{k}{1 + k^2}, \qquad (4.11)$$

где

$$k = \frac{m_2}{m_1} = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}, \qquad 2t = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}}. \qquad (4.12)$$

Рассматривая (4.12), замечаем, что при определении направляющих косинусов мы не раз должны сталкиваться с вопросом установления знака параметра k.

Для конкретности последующих рассуждений будем полагать, что $\sigma_2 < 0$, $\sigma_1 > 0$, т. е. главное напряжение σ_2 — сжимающее.

Из (3.4) после некоторых преобразований можно получить

$$\sigma_1 = \sigma_y - k\tau_{xy} \quad \text{или} \quad \sigma_1 = \sigma_x - \frac{1}{k}\tau_{xy},$$

$$\sigma_2 = \sigma_x + k\tau_{xy} \quad \text{или} \quad \sigma_2 = \sigma_y + \frac{1}{k}\tau_{xy}. \qquad (4.13)$$

Рассматривая (4.13), замечаем, что в точках второго рода, при любых σ_x и σ_y, для того, чтобы осуществилось условие $\sigma_2 < \sigma_1$, необходимо и достаточно, чтобы $k\tau_{xy} < 0$, т. е. τ_{xy} и k должны иметь разные знаки.

Таким образом, можно констатировать, что

$$\text{при} \quad \tau_{xy} > 0, \ k < 0, \quad \text{т. е.} \quad k = -t - \sqrt{t^2 + 1},$$

$$\text{при} \quad \tau_{xy} < 0, \ k > 0, \quad \text{т. е.} \quad k = -t + \sqrt{t^2 + 1}. \qquad (4.14)$$

Наконец, подставляя значения k из (4.14) в (4.13), для главных напряжений σ_1 и σ_2 получим известные формулы

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Из (4.15) легко заключить, что если $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} < 0$, то всегда $\sigma_2 < 0$, в противном случае, т. е. когда $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} > 0$, для обеспечения условия $\sigma_2 < 0$ необходимо, чтобы

$$\left[\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}\right]^{1/2} > \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \text{ т. е. } \tau_{xy}^2 > \sigma_x \sigma_y.$$

Исходя из условия $e_{12} = 0$, которое в силу (3.7) записывается следующим образом

$$e_{12} = 2(l_1 m_1 e_{xx} + l_2 m_2 e_{yy}) + (l_1 m_2 + l_2 m_1) e_{xy} = 0, \tag{4.16}$$

направляющие косинусы m_i и напряжения σ_1, σ_2 могут быть представлены посредством деформаций e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}.

Сравнивая (4.16) с (4.10) и учитывая при этом (3.1), получим

$$2t = -\frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{l_1 m_1} = -\frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1 m_2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} = \frac{2(e_{xx} - e_{yy})}{e_{xy}}. \tag{4.17}$$

Формулы (4.11) и (4.12) для определения m_i остаются неизменными и только лишь значение t будем брать из (4.17). Укажем при этом, что при определении знака параметра k надо учесть, что знаки τ_{xy} и e_{xy} совпадают.

Исходя из (3.6), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{yy} - \frac{k}{2} e_{xy}, \quad & e_{11} &= e_{xx} - \frac{1}{2k} e_{xy}, \\ e_{22} &= e_{xx} + \frac{k}{2} e_{xy}, \quad & e_{22} &= e_{yy} + \frac{1}{2k} e_{xy}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Подставляя значения k из (4.12) с учетом (4.17) в (4.18), для главных деформаций получим

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e_{xy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}, \\ e_{22} &= \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{e_{xy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Из обобщенного закона Гука (2.1), учитывая, что $\sigma_1 = \sigma_{11}$, а также, что $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$, получим

$$e_{\alpha\alpha} = b_{11}\sigma_\alpha + b_{12}\sigma_\beta, \qquad e_{\beta\beta} = b_{12}\sigma_\alpha + b_{22}\sigma_\beta. \tag{4.20}$$

Решая (4.20) относительно напряжений и используя (4.19), окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{A_2}{2\omega_b}(e_{xx} + e_{yy}) + \frac{b_{22} + b_{12}}{2\omega_b}\sqrt{e_{xy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}, \\ \sigma_\beta &= \frac{A_1}{2\omega_b}(e_{xx} + e_{yy}) - \frac{b_{11} + b_{12}}{2\omega_b}\sqrt{e_{xy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

где

$$\omega_b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2. \tag{4.22}$$

В силу исходных предположений в задачах плоской деформации напряжения и перемещения являются функциями лишь x и y. С учетом сказанного выше, уравнения равновесия объемного элемента (3.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \rho X &= 0, \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \rho Y &= 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Упрощаются также условия на поверхности (3.9), которые перепишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy}\cos(\nu, y), \\ Y_\nu &= \tau_{xy}\cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Из шести условий неразрывности деформаций (3.11) остается лишь первое, т. е.

$$e_{xx,yy} + e_{yy,xx} = e_{xy,xy}. \tag{4.25}$$

Подставляя значения напряжений из (4.8) в (4.23) с учетом (3.10), получим следующую систему дифференциальных уравнений в искомых перемещениях $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

$$\begin{aligned} \Delta u + (1 - 2\mu_1)e_{,x} + 2B_1[\mu_1\sigma_{\beta,x} - (m_1^2\sigma_\beta)_{,x} - (m_1m_2\sigma_\beta)_{,y}] &= -2A_1\rho X, \\ \Delta v + (1 - 2\mu_1)e_{,y} + 2B_1[\mu_1\sigma_{\beta,y} - (m_2^2\sigma_\beta)_{,y} - (m_1m_2\sigma_\beta)_{,x}] &= -2A_1\rho Y, \end{aligned} \tag{4.26}$$

где наряду с ранее принятыми обозначениями имеем также

$$\Delta(\ ) = (\ )_{,xx} + (\ )_{,yy}, \quad e = e_{xx} + e_{yy}.$$

Из (4.21) в силу (3.10) имеем

$$\sigma_\beta = \frac{A_1}{2\omega_b}(u_{,x} + v_{,y}) - \frac{b_{11} + b_{12}}{2\omega_b}\sqrt{(u_{,y} + v_{,x})^2 + (u_{,x} - v_{,y})^2}. \tag{4.27}$$

Для направляющих косинусов m_i имеем формулы (4.11). Что же касается параметра k, то из (4.12) в силу (4.17) и (3.10) получим

при $\qquad \tau_{xy} > 0 \quad (e_{xy} > 0)$

$$k=-\frac{u_{,x}-v_{,y}}{u_{,y}+v_{,x}}-\sqrt{1+\left(\frac{u_{,x}-v_{,y}}{u_{,y}+v_{,x}}\right)^2}, \tag{4.28}$$

при $\tau_{xy}<0$ $(e_{xy}<0)$

$$k=-\frac{u_{,x}-v_{,y}}{u_{,y}+v_{,x}}+\sqrt{1+\left(\frac{u_{,x}-v_{,y}}{u_{,y}+v_{,x}}\right)^2}. \tag{4.29}$$

Граничные условия, наряду с (4.24), могут быть заданы и в перемещениях.

Аналогично классической теории упругости в разномодульной теории упругости тоже можно ввести функцию напряжений $\varphi=\varphi(x, y)$.

Полагая [3, 4]

$$\sigma_x=\varphi_{,yy},\quad \sigma_y=\varphi_{,xx},\quad \tau_{xy}=-\varphi_{,xy}, \tag{4.30}$$

тождественно удовлетворим уравнениям равновесия (4.23) при отсутствии объемных сил ($X=0$, $Y=0$).

Подставляя значения напряжений из (4.30) в (4.6), получим

$$\begin{aligned} e_{x} &= A_1\varphi_{,yy}+b_{12}(\varphi_{,yy}+\varphi_{,xx})+B_3m_1^2\sigma_3,\\ e_{y} &= A_1\varphi_{,xx}+b_{12}(\varphi_{,yy}+\varphi_{,xx})+B_3m_2^2\sigma_3,\\ e_{xy} &= -2A_1\varphi_{,xy}+2B_3m_1m_2\sigma_3, \end{aligned} \tag{4.31}$$

где в силу (4.15) и (4.12) имеем

$$\sigma_3=\frac{\varphi_{,yy}+\varphi_{,xx}}{2}-\sqrt{(\varphi_{,xy})^2+\frac{(\varphi_{,yy}-\varphi_{,xx})^2}{4}}, \tag{4.32}$$

$$k=\frac{\varphi_{,yy}-\varphi_{,xx}}{2\varphi_{,xy}}-\sqrt{1+\frac{(\varphi_{,yy}-\varphi_{,xx})^2}{4(\varphi_{,xy})^2}}\quad \text{при}\quad \tau_{xy}>0, \tag{4.33}$$

$$k=\frac{\varphi_{,yy}-\varphi_{,xx}}{2\varphi_{,xy}}+\sqrt{1+\frac{(\varphi_{,yy}-\varphi_{,xx})^2}{4(\varphi_{,xy})^2}}\quad \text{при}\quad \tau_{xy}<0. \tag{4.34}$$

Подставляя значения деформаций из (4.31) в уравнение неразрывности (4.25), окончательно получим следующее дифференциальное уравнение относительно искомой функции $\varphi=\varphi(x, y)$

$$\Delta\Delta\varphi+\frac{B_3}{b_{11}}\left[(m_1^2\sigma_3)_{,yy}-2(m_1m_2\sigma_3)_{,xy}+(m_2^2\sigma_3)_{,xx}\right]=0, \tag{4.35}$$

где для σ_3 и m_i имеем (4.32)—(4.34) и (4.11).

Граничные условия получим из (4.24) с помощью (4.30).

Искомые перемещения будут определены с помощью (4.31) с учетом (3.10).

Таким образом, в настоящем пункте приведены все необходимые соотношения и уравнения задачи плоской деформации разномодульной теории упругости.

5. Рассмотрим задачу плоского напряженного состояния. Принимается, что а) направление z является главным и совпадает с σ_3, б) напряжения, действующие на площадках $z = \text{const}$, равны нулю.

В силу принятых предположений, можно записать

$$l_3 = m_3 = n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1, \tag{5.1}$$

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{zy} = 0. \tag{5.2}$$

Обобщенный закон упругости (3.2), в силу (5.1) и (5.2), в интересующем нас варианте примет вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + B_3 m_1^2 \sigma_1, \\ e_{yy} &= a_{11}\sigma_y + a_{12}\sigma_x + B_3 m_2^2 \sigma_1, \\ e_{zz} &= a_{12}(\sigma_x + \sigma_y), \quad e_{yz} = 0, \quad e_{zx} = 0, \\ e_{xy} &= 2A_1\tau_{xy} - 2B_3 m_1 m_2 \sigma_1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Решая (5.3) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{A_1} e_{xx} - \frac{\lambda_1}{A_1} e + B_3\left(\frac{\lambda_1}{A_1} - \frac{m_1^2}{A_1}\right)\sigma_1, \\ \sigma_y &= \frac{1}{A_1} e_{yy} - \frac{\lambda_1}{A_1} e + B_3\left(\frac{\lambda_1}{A_1} - \frac{m_2^2}{A_1}\right)\sigma_1, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2A_1} e_{xy} - \frac{B_3}{A_1} m_1 m_2 \sigma_1, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где наряду с (4.9) и (4.11) введено также следующее обозначение

$$\lambda_1 = \frac{a_{12}}{a_{11} + a_{12}}, \qquad e = e_{xx} + e_{yy}. \tag{5.5}$$

Сравнивая (5.4) с (4.8), замечаем, что они отличаются лишь постоянными коэффициентами ν_1 и λ_1.

Что же касается деформации e_{zz}, то если в задаче плоской деформации она равна нулю, то здесь имеет значение

$$e_{zz} = a_{12}(\sigma_x + \sigma_y) = \lambda_1(e - B_3\sigma_1). \tag{5.6}$$

В силу (5.2) уравнения равновесия (3.8) и в этом случае имеют вид (4.23).

Подставляя значения напряжений из (5.4) в (4.23) с учетом (3.10), получим следующую систему дифференциальных уравнений в перемещениях

$$\begin{aligned} \Delta u + (1 - 2\nu_1) e_{,x} + 2B_3[\lambda_1\sigma_{1,x} - (m_1^2\sigma_1)_{,x} - (m_1 m_2\sigma_1)_{,y}] &= 2A_1\rho X, \\ \Delta v + (1 - 2\nu_1) e_{,y} + 2B_3[\lambda_1\sigma_{1,y} - (m_2^2\sigma_1)_{,y} - (m_1 m_2\sigma_1)_{,x}] &= 2A_1\rho Y. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений задачи плоской деформации (4.26) лишь коэффициентом λ_1 (здесь взамен ν_1 имеем λ_1), вернее коэффициентами a_{ik}, ибо в этом случае для σ_z имеем

$$\sigma_z = \frac{A_3}{2\omega_0}(u_{,x}+v_{,y}) \pm \frac{a_{11}+a_{12}}{2\omega_0}\sqrt{(u_{,y}-v_{,x})^2+(u_{,x}-v_{,y})^2}, \qquad (5.8)$$

где

$$\omega_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \qquad (5.9)$$

Сравнивая (5.8) с (4.27), замечаем, что они отличаются лишь коэффициентами a_{ik} и b_{ik}. Что же касается направляющих косинусов m_i, то для их определения имеем (4.11), (4.28) и (4.29).

Наконец, отметим, что граничные условия не отличаются от граничных условий задачи о плоской деформации.

Однако, как и в классической теории упругости [3, 4], несмотря на идентичность задач плоской деформации и плоского напряженного состояния, между этими задачами имеется принципиальное различие, заключающееся в том, что в задачах плоской деформации перемещения и напряжения всегда являются функциями лишь x и y, а в задачах плоского напряженного состояния, как правило, зависят также и от z.

6. Рассмотрим вариант обобщенного плоского напряженного состояния. Принимается, что а) направление z является главным и совпадает с γ, б) напряжения, действующие на площадках $z=$ const, равны нулю, в) отличные от нуля напряжения и перемещения — функции лишь x и y.

В силу принятых предположений можно записать

$$l_3 = m_3 = n_1 = n_2 = 0, \qquad n_3 = 1, \qquad (6.1)$$

$$\sigma_z = \sigma_\gamma = 0, \qquad \tau_{xz} = 0, \qquad \tau_{zy} = 0, \qquad (6.2)$$

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \qquad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \qquad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \qquad (6.3)$$

Не вдаваясь в известные подробности [4], приведем те уравнения обобщенного закона упругости (3.2), которые будут интересовать нас в последующем, а именно

$$\begin{aligned} e_{xx} &= a_{11}\sigma_x - a_{12}\sigma_y + B_3 m_1^2\sigma_\gamma, \\ e_{yy} &= a_{11}\sigma_y - a_{12}\sigma_x + B_3 m_2^2\sigma_\gamma, \qquad (6.4) \\ e_{xy} &= 2A_2\tau_{xy} + 2B_3 m_1 m_2\sigma_\gamma. \end{aligned}$$

Из уравнений равновесия (4.23), при $X_{,x} = Y_{,y} = 0$, имеем

$$2\tau_{xy,xy} = -(\sigma_{x,xx} + \sigma_{y,yy}). \qquad (6.5)$$

Подставляя значения деформаций из (6.4) в уравнение неразрывности (4.25), с учетом (6.5), получим

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{B_3}{a_{11}}\left[(m_1^2\sigma_\gamma)_{,yy} - 2(m_1m_2\sigma_\gamma)_{,xy} + (m_2^2\sigma_\gamma)_{,xx}\right] = 0. \qquad (6.6)$$

Присоединяя к уравнению (6.6) уравнения равновесия

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0, \qquad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0, \qquad (6.7)$$

получим полную систему трех дифференциальных уравнений относительно трех напряжений.

Полагая [3, 4]

$$\sigma_x = \varphi_{,yy}, \quad \sigma_y = \varphi_{,xx}, \quad \tau_{xy} = -\varphi_{,xy}, \tag{6.8}$$

тождественно удовлетворим уравнениям (6.7), а из (6.6) получим

$$\Delta\Delta\varphi + \frac{B_3}{a_{11}}\left[(m_1^2\sigma_2)_{,yy} - 2(m_1 m_2 \sigma_2)_{,xy} + (m_2^2\sigma_2)_{,xx}\right] = 0, \tag{6.9}$$

где для σ_2 и m_i имеем (4.32)—(4.34) и (4.11).

Таким образом, решение обобщенной плоской задачи разномодульной теории упругости также сводится к решению одного нелинейного уравнения. Уравнение (6.9) отличается от уравнения (4.35) лишь коэффициентом a_{11}. В (4.35) взамен a_{11} имеем b_{11}.

Граничные условия, как и для уравнения (4.35), получим из (4.24) с учетом (6.8).

7. Приведем некоторые общие уравнения плоской задачи в полярных координатах. Применим цилиндрические координаты. Пусть ось исследуемого призматического тела параллельна оси z, которая является главной и совпадает с σ_3. Тогда, формально забывая направление oz, задачу будем исследовать в условной плоскости в полярных координатах r и θ, т. е. точно так, как в классической теории упругости [3, 4]. Направляющие косинусы главных направлений будем определять по приведенной схеме. Под l_2 и m_1 будем подразумевать косинусы углов соответственно между направлением α, β и нормалью к r в данной точке.

	α	β
r	l_1	m_1
θ	l_2	m_2

Будем рассматривать лишь задачи плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния. Приведем те уравнения и соотношения, которые являются общими для обеих задач.

Зависимости между деформациями и компонентами перемещений $u = u(r, \theta)$, $v = v(r, \theta)$,

$$e_{rr} = u_{,r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} v_{,\theta} + \frac{1}{r} u, \tag{7.1}$$

$$e_{r\theta} = v_{,r} - \frac{1}{r} v + \frac{1}{r} u_{,\theta};$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}\tau_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0,$$

$$\tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} = 0; \tag{7.2}$$

уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{1}{r}e_{\theta\theta,r}+\frac{1}{r^2}e_{rr,\theta\theta}+e_{\theta\theta,rr}=\frac{1}{r}e_{r\theta,r\theta}-\frac{1}{r^2}e_{r\theta,\theta}. \tag{7.3}$$

Разрешающее уравнение в случае задачи о плоской деформации имеет вид

$$\nabla\nabla\varphi=-\frac{B_3}{b_{11}}\left[\frac{1}{r}(m_1^2\sigma_1)_{,r}+\frac{1}{r^2}(m_1^2\sigma_1)_{,\theta\theta}+\right.$$

$$\left.+(m_2^2\sigma_1)_{,rr}-2\frac{1}{r}(m_1m_2\sigma_1)_{,r\theta}+2\frac{1}{r^2}(m_1m_2\sigma_1)_{,\theta}\right], \tag{7.4}$$

где $\varphi=\varphi(r,\theta)$ — искомая функция, посредством которой напряжения представляются следующими формулами:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\varphi_{,r}+\frac{1}{r^2}\varphi_{,\theta\theta},\quad \sigma_\theta=\varphi_{,rr},$$
$$\tau_{r\theta}=-\left(\frac{1}{r}\varphi_{,\theta}\right)_{,r}=-\frac{1}{r}\varphi_{,r\theta}+\frac{1}{r^2}\varphi_{,\theta}. \tag{7.5}$$

В этом случае σ_1 и m_1 определяются с помощью формул (4.11) — —(4.15) с учетом (7.5). Ввиду громоздкости и элементарности получения, окончательные выражения σ_1 и m_i, представленные посредством искомой функции $\varphi(r,\theta)$, здесь не приводим.

Что же касается уравнений обобщенного закона упругости (4.6), то они переписываются таким образом

$$e_{rr}=b_{11}\sigma_r+b_{12}\sigma_\theta+B_3m_1^2\sigma_1,$$
$$e_{\theta\theta}=b_{11}\sigma_\theta+b_{12}\sigma_r+B_3m_2^2\sigma_1, \tag{7.6}$$
$$e_{r\theta}=2A_1\tau_{r\theta}+2B_3m_1m_2\sigma_1.$$

Далее, в случае задачи плоской деформации, для определения значения коэффициента a_{33} должны пользоваться очевидной формулой (4.5), переписанной для полярных координат, а именно формулой

$$\sigma_z=-\frac{a_{12}}{a_{33}}(\sigma_r+\sigma_\theta). \tag{7.7}$$

Наконец, укажем, что все уравнения и расчетные формулы плоского напряженного состояния в полярных координатах получим из приведенных выше уравнений и формул (исключая (7.7)), заменяя b_{ik} на a_{ik}.

8. На примере плоской задачи покажем справедливость формул Кастильяно в разномодульной теории упругости.

Доказательство приводится для обобщенного плоского напряженного состояния. Оно может быть повторено и для плоской деформации.

Обобщенный закон Гука (2.1), в силу (3.7), в случае плоского напряженного состояния имеет вид

$$e_{22} = a_{11}\sigma_2 + a_{12}\sigma_3, \quad e_{33} = a_{12}\sigma_2 + a_{22}\sigma_3. \tag{8.1}$$

Удельная потенциальная энергия W записывается известным образом [3, 4]

$$W = \frac{1}{2}\left(\sigma_2 e_{22} + \sigma_3 e_{33}\right) \tag{8.2}$$

или в силу (8.1)

$$W = \frac{1}{2} a_{11}\sigma_2^2 + a_{12}\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{2} a_{22}\sigma_3^2. \tag{8.3}$$

Из (3.4) для σ_2 и σ_3 имеем

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= l_1^2\sigma_x + l_2^2\sigma_y + 2l_1 l_2\tau_{xy}, \\ \sigma_3 &= m_1^2\sigma_x + m_2^2\sigma_y + 2m_1 m_2\tau_{xy}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Подставляя значения σ_2 и σ_3 из (8.4) в (8.3) и учитывая при этом (3.1) и (4.10), получим

$$W = \frac{a_{11}}{2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right) + a_{12}\sigma_x\sigma_y + A_1\tau_{xy}^2 + \frac{B_3}{2}\sigma_3^2. \tag{8.5}$$

Вычислим частные производные W по напряжениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \sigma_x} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + B_3\sigma_3\frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_x}, \\ \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} &= a_{11}\sigma_y + a_{12}\sigma_x + B_3\sigma_3\frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_y}, \\ \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} &= 2A_1\tau_{xy} + B_3\sigma_3\frac{\partial \sigma_3}{\partial \tau_{xy}}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Выясним, что же собой представляют частные производные главного напряжения σ_3 по напряжениям σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Из (3.1) имеем

$$m_1^2 + m_2^2 = 1, \quad \frac{\partial m_1^2}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial m_2^2}{\partial \sigma_x} = 0, \quad m_1\frac{\partial m_1}{\partial \sigma_x} = -m_2\frac{\partial m_2}{\partial \sigma_x}. \tag{8.7}$$

Исходя из (8.4) и используя (8.7), можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_x} &= m_1^2 + 2\sigma_x m_1\frac{\partial m_1}{\partial \sigma_x} + 2\sigma_y m_2\frac{\partial m_2}{\partial \sigma_x} + 2\tau_{xy}\left(m_2\frac{\partial m_1}{\partial \sigma_x} + m_1\frac{\partial m_2}{\partial \sigma_x}\right) = \\ &= m_1^2 + (\sigma_x - \sigma_y)\, 2m_1\frac{\partial m_1}{\partial \sigma_x} + 2\tau_{xy}\left(m_2\frac{\partial m_1}{\partial \sigma_x} - \frac{m_1^2}{m_2}\frac{\partial m_1}{\partial \sigma_x}\right) = \\ &= m_1^2 + \frac{2}{m_2}\frac{\partial m_1}{\partial \sigma_x}\left[m_1 m_2(\sigma_x - \sigma_y) + (m_2^2 - m_1^2)\tau_{xy}\right]. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Из (8.8) в силу (4.17) легко установить

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_x} = m_1^2. \tag{8.9}$$

Поступая аналогичным образом, получим также

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_y} = m_2^2, \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_{xy}} = 2m_1 m_2. \tag{8.10}$$

В силу (8.9) и (8.10) из (8.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \sigma_x} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + B_1\sigma_1 m_1^2, \\ \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + B_1\sigma_1 m_2^2, \\ \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} &= 2A_1\tau_{xy} + 2B_1\sigma_1 m_1 m_2. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Сравнивая (8.11) с (5.3), можно записать

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = e_{xx}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} = e_{yy}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} = e_{xy}.$$

Таким образом, можно утверждать, что известные формулы Кастильяно [3, 4] имеют место и в разномодульной теории упругости.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 II 1966

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ԿԱՄ ՏԱՐԱԴԻՄԱԴՐՈՂԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Կառուցված է ձգման և սեղմման տարբեր մոդուլներ ունեցող նյութերի առաձգականության ընդհանրացված օրենքը. Ելնելով առաձգականության դասական տեսության զուտ ստատիկական և զուտ երկրաչափական հավասարումներից ու առնչություններից, ստացված են տարամոդուլ նյութերի առաձգականության տեսության ընդհանուր հավասարումները և առնչությունները։

S. A. AMBARTSUMIAN

THE EQUATIONS OF THE PLANE PROBLEM OF THE DIFFERENTMODUL THEORY OF ELASTICITY

Summary

In the paper the generalized law of elasticity for differentmodul materials is received.

All equations and relations of the plane problem of the differentmodul theory of elasticity are obtained.

On the example of plane problems Castiliano's formulas in the case of differentmodul materials is shown to be just.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, сопротивляющегося растяжению и сжатию. Известия АН СССР, Механика, № 4, 1965.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Известия АН СССР, механика твердого тела, № 2, 1966.
3. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
4. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.