В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян

К НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕОРИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ СВЕРХПЛОТНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

1. Для космологических и особенно космогонических проблем все более актуальным становится изучение свойств материи при больших плотностях. В исследованиях, посвященных разработке этого вопроса, получены интегральные параметры и структура белых карликов и барионных звезд, в предположении сферически-симметричного распределения масс* [1—6].

До последнего времени проблема вращения этих конфигураций не рассматривалась из-за сложности задачи. Достаточно сказать, что задача вращения в теории Эйнштейна пока еще полностью не сформулирована. Поэтому определенный интерес представляет рассмотрение вращающихся сверхплотных конфигураций, используя при этом ньютоновскую теорию тяготения. Применение нерелятивистской теории при больших плотностях кажется неоправданным, однако, она для невращающихся конфигураций дает правильный по порядку величины результат для радиуса и массы, а характер зависимости последних от центральной плотности почти такой же, как и в точной теории [8, 9].

Цель настоящей статьи показать, что в широком интервале центральных плотностей возможное значение угловых скоростей настолько мало, что с достаточной точностью можно применять теорию возмущений для расчета важнейших интегральных характеристик сверхплотных вращающихся

---

* Достаточно подробную информацию о работах в этом направлении можно найти в обзоре Зельдовича и Новикова [7].

звезд, рассматривая их как возмущенное состояние статической сферически-симметричной конфигурации.

2. Структура конфигураций, вращающихся как твердое тело, определяется решением системы следующих уравнений.

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} P = -\rho\vec{\nabla}\varphi + \rho\omega^2\vec{r}, \tag{2}$$

$$P = P(\rho), \tag{3}$$

где k — гравитационная постоянная, $\vec{r}$ — расстояние от оси вращения. Соотношение (3) — символическая запись уравнения состояния, которое в приведенном виде выполняется в случаях, когда вещество рассматриваемой конфигурации вырождено, или же температура везде является функцией плотности ρ.

Введем сферические координаты R, $\mu = \cos\theta$, Φ. Тогда, если ограничиться псевдосфероидальными решениями, то есть решениями, не зависящими от угла Φ (здесь и далее будет использована терминология Джинса [10]), уравнение гидростатического равновесия (2) легко интегрируется, и систему, определяющую структуру конфигураций, можно переписать в виде

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] = G, \tag{4}$$

$$F = -\varphi + G_c\,\beta R^2(1-\mu^2) + C. \tag{5}$$

Здесь

$$F = \int\frac{dP}{\rho},\quad G = 4\pi k\rho,\quad G_c = 4\pi k\rho_c, \tag{6}$$

$$\beta = \frac{\omega^2}{8\pi k\rho_c}\cdot \tag{7}$$

Поскольку, потенциал определен с точностью до постоянной, можно было бы постоянную интегрирования C положить равной нулю. При такой нормировке $\varphi(\infty) \neq 0$. Однако предпочтительнее оставить эту постоянную неопределенной с тем, чтобы сохранить для потенциала традиционную нормировку $\varphi(\infty) = 0$.

Как легко видеть из (4)—(7), все характеристики вращающихся конфигураций определяются значениями двух независимых параметров — ρ_c и β. При некоторых специальных типах уравнений состояния (например, политропы) путем подходящего выбора системы единиц параметр ρ_c можно исключить [11, 12].

3. Аксиально-симметричные решения уравнений (4), (5) обычно ищут в виде рядов по полиномам Лежандра. Коэффициенты разложения при соответствующих полиномах Лежандра оказываются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, для нахождения которых необходимо иметь их значения и значения их производных в центре конфигурации. Использование заданного ρ_c, которое фактически играет роль краевого условия для уравнений (4), (5), делает возможным определение этих коэффициентов лишь с точностью до постоянных множителей. Поэтому для однозначного нахождения решений необходимо наложить соответствующие условия на границе, в качестве которых выступают требования непрерывности потенциала и его первой производной на поверхности звезды. Другими словами, решения (4) и (5) должны быть непрерывным образом сшиты с решением $\varphi^{(c)}$ уравнения

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi^{(c)}}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi^{(c)}}{\partial\mu}\right]=0, \tag{8}$$

которому удовлетворяет потенциал вне звезды.

Лишь в немногочисленных частных случаях уравнение состояния позволяет решить задачу аналитически. В этих случаях определение вышеуказанных констант из условий на границе сравнительно просто и сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений [11]. В большинстве случаев бывают вынуждены прибегнуть к численному интегрированию, которое ввиду неопределенности начальных значений искомых функций наталкивается на значительные трудности.

Наиболее точный, но довольно сложный, требующий многочисленных расчетов, метод преодоления этих трудностей разработан Джеймсом [12]. Произвольно подбирая константы в центре, он оставлял те из них, которые удовлетворяли условиям сшивки на границе и таким образом были найдены характеристики вращающихся политроп и простейшей модели белых карликов [13].

Метод Джеймса применительно к параметрическим уравнениям состояния нейтронной звезды представляется еще более сложным.

4. В поисках подходящего решения задачи заслуживающим внимания оказался факт хорошего совпадения результатов Джеймса и ранней работы Чандрасекара [14], который использовал для подсчета характеристик вращающихся политроп метод теории возмущений, причем в качестве малого параметра использовалась величина, аналогичная β.

Для выяснения вопроса о применимости теории возмущений при расчете структуры вращающихся сверхплотных конфигураций оценено максимально возможное при заданной плотности в центре значение безразмерного параметра β. С этой целью на электронно-вычислительной машине „Наири“ были рассчитаны характеристики сферически—симметричного распределения масс с введенным дополнительно формальным потенциалом вида $\frac{1}{2}\omega^2 R^2$. В качестве уравнения состояния использовалось известное уравнение, описывающее вещество вырожденной нейтронной звезды [1. 4]. Было подсчитано β_{max} из условия равенства на поверхности конфигурации „центробежного“ ускорения и ускорения сил тяжести, по формуле

$$\beta_{max} = \frac{M}{8\pi\rho_c R_0^3}, \tag{9}$$

где M и R_0 масса и радиус соответствующей сферической конфигурации. В результате, для интервала центральных плотностей от $\rho_c = 10^{14}$ *г/см³* до $\rho_c = 1.3 \cdot 10^{16}$ *г/см³* для β_{max} было найдено значение в пределах от 0.0148 до 0.0076.

Приведенные выше соображения позволяют утверждать, что теория возмущений, по-видимому, является хорошим методом решения задачи расчета структуры вращающихся сверхплотных небесных тел.

5. Согласно изложенному, решения уравнений (4) и (5) будем искать в виде разложений в ряд по степеням β, пренебрегая всеми членами, содержащими β выше первого порядка [14, 15],

$$F(R, \mu) = f(R) + \beta\left[f_0(R) + \sum_{l=2} A_l f_l(R) P_l(\mu)\right],$$

$$G(R, \mu) = g(R) + \beta\left[g_0(R) + \sum_{l=2} B_l g_l(R) P_l(\mu)\right]. \qquad (10)$$

Здесь $P_l(\mu)$ — полином Лежандра l-го порядка, A_l и B_l — константы, $f(R)$, $g(R)$ — характеристики соответствующих невращающихся конфигураций (см. (6)). Отсутствие в (10) членов с нечетными l обусловлено симметрией распределения масс относительно экваториальной плоскости $\mu=0$ [16].

Для дальнейшего необходимо найти связь между A_l и B_l. Это нетрудно сделать, если G рассмотреть как функцию F и разложить в ряд Тейлора вокруг значения $F=f$. Сохраняя при этом лишь члены первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} G(f) &= g, \\ \gamma f_0 &= g_0, \\ \gamma A_l f_l &= B_l g_l, \end{aligned} \qquad (11)$$

где

$$\gamma = \left.\frac{dG}{dF}\right|_{F=f} = \frac{dg}{df}. \qquad (12)$$

Подставим, далее, разложения (10) в (4), тогда с учетом (5) и (11), приравнивая коэффициенты при полиномах Лежандра одинакового порядка, получим систему

$$\Delta_0 f = -g, \qquad (13a)$$

$$\Delta_0 f_0 + \gamma f_0 = 4G_c, \qquad (13b)$$

$$\Delta_l f_l + \gamma f_l = 0, \ l > 0, \qquad (13c)$$

где

$$\Delta_l = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d}{dR}\right) - \frac{l(l+1)}{R^2}.$$

Уравнения (13) определяют вид радиальных функций f, f_0, f_l. Однако задача нахождения характеристик рассматриваемых конфигураций будет решена, лишь если удастся выяснить значения постоянных, фигурирующих в (5) и (10), а также определить форму поверхности звезды.

Следуя духу теории возмущений, будем считать, что граница звезды определяется соотношением

$$Q_\mu = R_0 + \beta \sum_{l=0}^{\infty} q_l \cdot P_l(\mu). \tag{14}$$

Здесь R_0 — радиус соответствующей невращающейся конфигурации, вклад от вращения учитывается членами под знаком суммы.

Как известно, на поверхности звезды давление и плотность исчезают. Это обстоятельство приводит к исчезновению на границе распределения функции F, введенной соотношением (6). Условие $F(Q_\mu)=0$, если учесть (10) и (15), дает

$$\begin{gathered} f(R_0) = 0, \\ f'(R_0)\, q_0 + f_0(R_0) = 0, \\ f'(R_0)\, q_l + A_l f_l(R_0) = 0,\ l > 0, \end{gathered} \tag{15}$$

причем

$$f'(R_0) \equiv \left.\frac{df}{dR}\right|_{R=R_0}.$$

Как было сказано, для определения константы A_l и других необходимо сшить значения потенциала и его первой производной на границе звезды. Поэтому выпишем предварительно решение уравнения (8), которому удовлетворяет потенциал $\varphi^{(e)}$ вне конфигурации в виде

$$\varphi^{(e)} = \frac{k_0}{R} + \beta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k_{1l}}{R^{l+1}} P_l(\mu), \tag{16}$$

k_0 и k_{1l} — постоянные. Тогда, решая совместно алгебраические уравнения, следующие из условий $\varphi^{(e)}(Q_\mu) = \varphi(Q_\mu)$ и $\left.\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial R}\right|_{R=Q_\mu} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right|_{R=Q_\mu}$ с учетом соотношения $F(Q_\mu) = 0$, получим

$$k_0 = R_0^2 f'(R_0), \quad k_{10} = R_0^2 f_0'(R_0) - \frac{4G_c}{3} R_0^3,$$

$$C_0 = R_0 f'(R_0),\ C_1 = R_0 f_0'(R_0) + f_0(R_0) + 2\,G_t\ R_0^2,$$

$$A_2 = -\frac{10\,G_t}{3}\,\frac{R_0^2}{R_0 f_2'(R_0) + 3f_2(R_0)}, \tag{17}$$

$$k_{12} = -\frac{2G_t}{3}\,\frac{R_0^3\,[f_2'(R_0)\,R_0 - 2f_2(R_0)]}{R_0 f_2'(R_0) + 3f_2(R_0)},$$

$$A_l = q_l = k_{1l} = 0 \text{ при } l > 2.$$

Таким образом, все константы, необходимые для нахождения интегральных характеристик вращающейся звезды, полностью определяются решениями уравнений (13) на границе R_0 соответствующей невращающейся конфигурации. Это обстоятельство, очевидно, является следствием основного предположения о малости β.

Если известны значения постоянных (17), то, как это следует из (16), масса звезды может быть подсчитана по формуле

$$M = -k_0 - \beta k_{10}. \tag{18}$$

Для большой Q_e ($\mu = 0$) и малой Q_p ($\mu = 1$) полуосей поверхности (14) дает

$$Q_e = R_0 + \beta\,(q_0 - 0{,}5\ q_2),$$

$$Q_p = R_0 + \beta\,(q_0 + q_2). \tag{19}$$

Параметр β изменяется в пределах от 0 до некоторого максимально возможного значения, определяемого требованием равенства на экваторе гравитационного и центробежного ускорений:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)_{R=Q_e} = 2G_t\,\beta_{max}\,Q_e,$$

откуда, используя (16) и опуская в разложении по β члены высшего порядка малости, получим

$$\beta_{max} = \frac{k_0\,R_0^2}{1.5\,k_{12} + 2k_0\,R_0\,(q_0 - 0.5\,q_2) - k_{10}\,R_0^2 - 2G_t\,R_0^3}. \tag{20}$$

Отметим, что изложенный метод применим для любого уравнения состояния, если значения β_{max} невелики.

6. Для окончательного выяснения вопроса о применимости приведенной теории при значениях параметра $\beta \sim \beta_{max}$

необходимо знать вклад последующих членов разложения по β в значения основных параметров конфигураций. При решении задачи в этом приближении возникают серьезные математические трудности. Поэтому применим эту теорию для расчета интегральных характеристик конфигураций вплоть до значения β_{max} и сравним полученные результаты с более точными расчетами, выполненными Джеймсом.

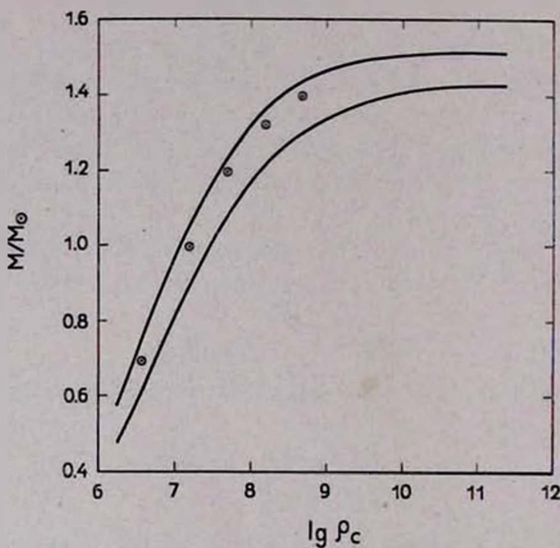

Рис. 1. Верхняя кривая—зависимость массы конфигурации, вращающейся с максимально возможной угловой скоростью от ρ_c. Нижняя кривая — то же для невращающейся конфигурации. Масса измерена в единицах массы Солнца. Абсцисса— $\lg \rho_c$. Кружочками отмечены результаты Джеймса.

Նկ. 1. Վերին կորը. հնարավոր մաքսիմալ անկյունային արագությամբ պտտվող կոնֆիգուրացիայի զանգվածի կախումը ρ_c-ից։ Ներքին կորը. նույնը չպտտվող կոնֆիգուրացիայի համար։ Զանգվածը հաշված է Արեգակի զանգվածի միավորներով։ Աբսցիսը՝ $\lg \rho_c$ ։ Ջեյմսի արդյունքները նշված են շրջանակներով։

С этой целью, рассмотрим специальный вид уравнения состояния

$$\rho = ax^3,$$

$$P = b\left[x(2x^2-3)\sqrt{1+x^2}+3\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right], \qquad (21)$$

описывающий поведение вещества в наиболее простых моделях белых карликов [13]. Приведенное уравнение состояния послужило Джеймсу [12] основой для расчета массы и главных полуосей вращающихся белых карликов, предложенным им весьма точным методом.

В единицах $k = c = 1$, $\frac{m_n^4 c^5}{32\pi^2 h^3} = \frac{1}{4\pi}$ [1, 4], постоянные $a = \frac{16}{3\pi}\left(\frac{m_e}{m_n}\right)^3$, $b = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{m_e}{m_n}\right)^4$. Здесь c — скорость света, h — постоянная Планка, m_e и m_n — массы электрона и нейтрона соответственно.

Используемое уравнение состояния (21) позволяет без труда получить выражение

$$\gamma = 128\left(\frac{m_e}{m_n}\right)^2 x\sqrt{1+x^2},$$

фигурирующее в основных для развитого метода уравнениях (13). Если далее проинтегрировать эти уравнения и вычислить константы (17), то по формулам (18) и (19) легко найти интересующие нас характеристики звезды.

Численное интегрирование было выполнено на ЭВМ „Наири" для целого ряда значений центральных плотностей от $\rho_c = 1{,}665 \cdot 10^6$ *г/см*^{3} до $\rho_c = 1{,}791 \cdot 10^{11}$ *г/см*^{3}. На рис. 1 и 2 приведены результаты расчета и сравнение их с результатами Джеймса, изображенных кружочками. Рис. 1 представляет зависимость, измеренной в единицах массы Солнца, массы конфигурации, вращающейся с максимально возможной при данной центральной плотности угловой скоростью, от ρ_c. Тут же для сравнения приведена зависимость массы невращающейся конфигурации от ρ_c. Рис. 2 дает зависимость, измеренных в километрах, большой Q_e и малой Q_p полуосей конфигурации с $\beta = \beta_{max}$ от ρ_c. Наибольшее отклонение полученных результатов от результатов Джеймса не превышает 6%.

Таким образом, изложенный метод, с одной стороны, применим для произвольных уравнений состояния, с другой—обеспечивает достаточно хорошую точность, что дало нам возможность применить его при расчетах интегральных характеристик вращающихся белых карликов и нейтронных звезд. Результаты будут опубликованы в следующей статье.

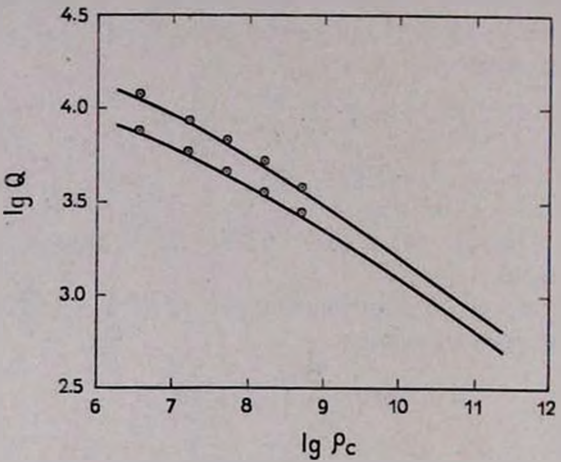

Рис. 2. Верхняя кривая — зависимость большой полуоси Q_e псевдосфероида, вращающегося с максимально возможной угловой скоростью, от ρ_c. Нижняя кривая — то же для малой полуоси Q_p. Q_e и Q_p измерены в километрах. Абсцисса— $\lg \rho_c$. Кружочками отмечены результаты Джеймса.

Նկ. 2. Վերին կորը. հնարավոր մաքսիմալ անկյունային արագությամբ պտտվող պսեվդոսֆերոիդի մեծ կիսաառանցքի Q_e-ի կախումը ρ_c-ից: Ներքին կորը. նույնը փոքր կիսաառանցքի Q_p-ի համար: Q_e-ն և Q_p չափված են կիլոմետրերով: Աբսցիսը՝ $\lg \rho_c$: Ջեյմսի արդյունքները նշված են շրջանակներով:

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность академику В. А. Амбарцумяну и Г. С. Саакяну за ценные замечания и обсуждения.

Бюраканская Астрофизическая обсерватория
Ереванский Государственный Университет

Վ. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Է. Վ. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

ՊՏՏՎՈՂ ԳԵՐԽԻՏ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆԵՐԻ ՆՅՈՒՏՈՆՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հոդվածում ցույց է տրված, որ գերխիտ պտտվող կոնֆիգուրացիաների համար կենտրոնական խտության լայն տիրույթում կարելի է կիրառել գրգռումների տեսությունը։ Այդ մեթոդի օգնությամբ հնարավոր է ստանալ պտտվող աստղերի ինտեգրալ պարամետրերը։ Մեթոդը կիրառելի է ցանկացած վիճակի հավասարման համար։

V. V. PAPOYAN, D. M. SEDRAKIAN, E. V. CHUBARIAN

ON THE NEWTONIAN THEORY OF SUPERDENSE ROTATING CONFIGURATIONS

It is shown that the perturbation theory may be used for superdense rotating configurations for a wide region of the central densities. On this basis it is possible to obtain a calculation method of the stellar main integral parameters in the Newtonian approximation. The method is valid for any state equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff*, Phys., Rev., 55, 374, 1939.
2. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. II, стр. 298, Ереван, 1960.
3. *В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян*, Астрон. журнал, 37, 193, 1960.
4. *Г. С. Саакян*, Докторская диссертация, ФИАН, 1963.
5. *Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартанян*, Сообщения Бюраканской обсерватории, 33, 55, 1963.
6. *Г. С. Саакян, Э. В. Чубарян*, Сообщ. Бюр. обс., 34, 99, 1963.
7. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, УФН, 84, 377, 1964.
8. *В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян*, Астрофизика, 1, 3, 1965.
9. *Г. С. Саакян*, Астрон. журнал, 39, 1014, 1962.
10. *J. H. Jeans*, Astronomy and Cosmology, Cambridge, Cambridge University Press, 1929.

11. *В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Астрофизика, 3, 41, 1967.
12. *R. A. James*. Ap. J., 140, 552, 1964.
13. *S. Chandrasekhar*, M. N., 95, 207, 1935.
14. *S. Chandrasekhar*, M. N., 93, 390, 1933.
15. *S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz*, Ap. J. 136, 1032, 1962.
16. *L. Lichtenstein*, Gleichgewichtsfiguzen Rotierender Flüssigkeiten, Julius Springer, Berlin, 1933.