

В. Ю. Тербиж

ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ФОТОНА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Вопрос о числе рассеяний, испытываемых фотоном при диффузии в мутной среде, неоднократно обсуждался в ряде работ. В. А. Амбарцумян [1] получил следующее выражение для среднего числа рассеяний, приходящихся на один квант любого потока излучения (как выходящего из среды, так и идущего внутри нее):

$$\bar{n} = \lambda \frac{\partial \ln I}{\partial \lambda}, \quad (1)$$

где I —интенсивность излучения, λ —вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния. Как было показано в недавней работе В. В. Соболева [2], подобное выражение можно написать и для среднего числа рассеяний, испытываемых фотоном, выходящим из данного места внутри среды:

$$Q_1(A) = \lambda \frac{\partial \ln P(A)}{\partial \lambda}. \quad (2)$$

Здесь $P(A)$ —вероятность того, что фотон, поглощенный в точке A , выйдет из среды после любого числа рассеяний.

Единственное допущение, которое было сделано при выводе формул (1) и (2), заключалось в том, что λ есть величина постоянная во всей среде. Это условие выполняется для большого круга задач. Вместе с тем, в некоторых важных задачах (например, при рассмотрении переноса излу-

ния через атмосферу звезды в спектральной линии) величина λ зависит от координат. В связи с этим представляет интерес обобщение полученных результатов на случай неоднородной среды.

I

Рассмотрим среду, занимающую объем произвольной формы. Пусть $\lambda(A)$ есть произвольная заданная функция координат точек внутри среды. Представим $\lambda(A)$ в виде

$$\lambda(A) = \lambda_0 g(A), \quad (3)$$

где λ_0 — некоторая постоянная. Тогда среднее число рассеяний фотона может быть найдено тем же методом, который применил В. А. Амбарцумян при выводе формулы (1). В самом деле, запишем вероятность выхода кванта из среды $P(A)$ в виде ряда

$$P(A) = \sum_k \lambda_0^k P_k(A), \quad (4)$$

где $\lambda_0^k P_k(A)$ — вероятность того, что квант, поглощенный в точке A , выйдет из среды после k рассеяний. Среднее же число рассеяний выходящего кванта равно

$$Q_1(A) = \frac{1}{P(A)} \sum_k k \lambda_0^k P_k(A) = \lambda_0 \frac{\partial \ln P(A)}{\partial \lambda_0}. \quad (5)$$

Это выражение является непосредственным обобщением формулы (2). Формула (1) будет справедлива и для случая неоднородной среды, если заменить в ней λ на λ_0 .

Найдем, в качестве примера, среднее число рассеяний фотона, выходящего из одномерной полубесконечной среды, характеризующейся вероятностью выживания фотона

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 e^{-2\tau}, \quad (\lambda_0 \leq 1). \quad (6)$$

В работе [3] показано, что функция $y(\tau)$, определяемая соотношением

$$P(\tau) = \lambda(\tau) y(\tau), \quad (7)$$

удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$y''(\tau) = [1 - \lambda(\tau)] y(\tau) \quad (8)$$

с граничными условиями

$$y(0) - y'(0) = 1, \quad y(\infty) = 0. \quad (9)$$

При выбранном виде $\lambda(\tau)$ уравнение (8) является частным случаем уравнения Бесселя. Следовательно, его общее решение может быть записано в форме

$$y(\tau) = C J_1(\lambda_0^{1/2} e^{-\tau}) + D Y_1(\lambda_0^{1/2} e^{-\tau}), \quad (10)$$

где J_1 и Y_1 — бесселевы функции соответственно I и II рода, а C и D — произвольные постоянные. Определяя постоянные из граничных условий и подставляя $y(\tau)$ в (7), получаем.

$$P(\tau) = \frac{\lambda_0^{1/2}}{J_0(\lambda_0^{1/2})} e^{-2\tau} J_1(\lambda_0^{1/2} e^{-\tau}). \quad (11)$$

Подставляя $P(\tau)$ из (11) в формулу (5), находим следующее выражение для среднего числа рассеяний, испытываемых квантом, выходящим с глубины τ :

$$Q_1(\tau) = \frac{\lambda_0^{1/2}}{2} \left[\frac{J_1(\lambda_0^{1/2})}{J_0(\lambda_0^{1/2})} + e^{-\tau} \frac{J_0(\lambda_0^{1/2} e^{-\tau})}{J_1(\lambda_0^{1/2} e^{-\tau})} \right]. \quad (12)$$

Интересно асимптотическое поведение функций $P(\tau)$ и $Q_1(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Известно (см., например, [4]), что при малых значениях аргумента

$$J_0(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{4}, \quad J_1(x) \simeq \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} \right), \quad (x \ll 1). \quad (13)$$

Потому из (11) — (13) следует

$$P(\tau) \simeq \frac{\lambda_0}{2J_0(\lambda_0^{1/2})} e^{-3\tau}, \quad (\tau \gg 1), \quad (14)$$

и

$$Q_1(\tau) \approx 1 + \frac{\lambda_0^{1/2} J_1(\lambda_0^{1/2})}{2J_0(\lambda_0^{1/2})} - \frac{\lambda_0}{8} e^{-2\tau}, \quad (\tau \gg 1). \quad (15)$$

В данном случае $Q_1(\tau)$ стремится при возрастании τ к конечному пределу (в отличие от случая $\lambda = \text{const}$, где Q_1 линейно возрастает с ростом оптической глубины).

II

Выражение (5) определяет среднее число рассеяний фотона, выходящего из среды наружу. Между тем, иногда (например, для оценки времени установления лучистого равновесия) нужно знать среднее число рассеяний в среде фотонов как выходящих наружу, так и гибнущих в среде. Соответствующие формулы для однородной среды были получены В. В. Соболевым [2]. В случае неоднородной среды затруднительно написать простое выражение, подобное (5). Поэтому мы рассмотрим метод, отличный от использованного выше, и применим его к случаю, когда диффузия излучения происходит в одномерной неоднородной среде.

Для получения основных уравнений воспользуемся обобщением принципа инвариантности на случай неоднородной среды, сделанным В. В. Соболевым [5]. Рассмотрим вместе с исходной средой, в которой вероятность выживания кванта при однократном рассеянии равна $\lambda(\tau)$, совокупность сред, в которых вероятность выживания кванта равна $\lambda(\tau + \alpha)$, где α — параметр. Обозначим через $p_k(\tau, \alpha)$ и $q_k(\tau, \alpha)$ вероятности того, что квант, поглощенный на оптической глубине τ в среде, характеризующейся параметром α , выйдет из среды наружу или, соответственно, поглотится после k рассеяний. Легко видеть, что

$$p_1(\tau, \alpha) = \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} e^{-\tau}, \quad q_1(\tau, \alpha) = 1 - \lambda(\tau + \alpha), \quad (16)$$

$$p_k(\tau, \alpha) = \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} \int_0^\tau e^{-1-\tau-\tau'} p_{k-1}(\tau', \alpha) d\tau',$$

$$(k = 2, 3, \dots), \quad (17)$$

$$q_k(\tau, \alpha) = \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} \int_0^{\infty} e^{-|\tau - \tau'|} q_{k-1}(\tau', \alpha) d\tau',$$

$$(k = 2, 3, \dots). \quad (18)$$

Для величин $p_k(\tau, \alpha)$ и $q_k(\tau, \alpha)$ можно также получить систему функциональных уравнений. Рассмотрим вероятность выхода после k рассеяний кванта, поглощенного на оптической глубине $\tau + \Delta\tau$, где $\Delta\tau$ — малая величина. Учитывая, что после отделения слоя толщиной $\Delta\tau$ от среды, характеризующейся параметром α , получается среда, характеризующаяся параметром $\alpha + \Delta\tau$, находим

$$p_k(\tau + \Delta\tau, \alpha) = p_k(\tau, \alpha + \Delta\tau) (1 - \Delta\tau) +$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i(\tau, \alpha + \Delta\tau) \Delta\tau p_{k-i}(0, \alpha), \quad (k = 2, \dots). \quad (19)$$

Аналогично

$$q_k(\tau + \Delta\tau, \alpha) = q_k(\tau, \alpha + \Delta\tau) +$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i(\tau, \alpha + \Delta\tau) \Delta\tau q_{k-i}(0, \alpha), \quad (k = 2, \dots). \quad (20)$$

Устремляя в уравнениях (19) и (20) $\Delta\tau$ к 0, получаем

$$\frac{\partial p_k(\tau, \alpha)}{\partial \tau} - \frac{\partial p_k(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} = -p_k(\tau, \alpha) +$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i(\tau, \alpha) p_{k-i}(0, \alpha), \quad (21)$$

$$\frac{\partial q_k(\tau, \alpha)}{\partial \tau} - \frac{\partial q_k(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{k-1} p_i(\tau, \alpha) q_{k-i}(0, \alpha). \quad (22)$$

Функции $p_1(\tau, \alpha)$ и $q_1(\tau, \alpha)$ также будут удовлетворять уравнениям (21) и (22), если считать, что суммы, стоящие в правых частях этих уравнений, равны 0 при $k = 1$. Таким образом, мы будем рассматривать уравнения (21) и (22) при всех $k = 1, 2, \dots$

Очевидно, вероятность выхода кванта из среды после любого числа рассеяний равна

$$p(\tau, \alpha) = \sum_1^{\infty} p_k(\tau, \alpha) = 1 - \sum_1^{\infty} q_k(\tau, \alpha). \quad (23)$$

Суммируя уравнения (17) по k от 2 до ∞ и уравнения (21) от 1 до ∞ , получаем уравнения для функции $p(\tau, \alpha)$, найденные ранее в [3, 5]:

$$p(\tau, \alpha) = \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} e^{-\tau} + \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} \int_0^{\infty} e^{-|\tau - \tau'|} p(\tau', \alpha) d\tau', \quad (24)$$

$$\frac{\partial p(\tau, \alpha)}{\partial \tau} - \frac{\partial p(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} = -p(\tau, \alpha) [1 - p(0, \alpha)]. \quad (25)$$

Суммирование уравнений (18) и (22) дает тот же результат.

Введем далее величины $Q_1(\tau, \alpha)$ и $Q_2(\tau, \alpha)$, представляющие собой соответственно средние числа рассеяний фотонов, выходящих из среды наружу и гибнущих в ней. Мы имеем

$$Q_1(\tau, \alpha) = \frac{1}{p(\tau, \alpha)} \sum_1^{\infty} k p_k(\tau, \alpha), \quad Q_2(\tau, \alpha) = \frac{1}{1 - p(\tau, \alpha)} \times \\ \times \sum_1^{\infty} k q_k(\tau, \alpha). \quad (26)$$

Среднее же число рассеяний всех рассматриваемых фотонов равно

$$Q(\tau, \alpha) = p(\tau, \alpha) Q_1(\tau, \alpha) + [1 - p(\tau, \alpha)] Q_2(\tau, \alpha). \quad (27)$$

Из приведенных выше соотношений легко можно получить уравнения для функций Q_1 и Q_2 . Для этого умножим уравнения (17), (18), (21) и (22) на k , суммируем их в соответствующих пределах и воспользуемся уравнениями (24)

и (25), определяющими функцию $p(\tau, \alpha)$. Сделав это, находим

$$p(\tau, \alpha) Q_1(\tau, \alpha) = p(\tau, \alpha) + \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau - \tau'|} p(\tau', \alpha) Q_1(\tau', \alpha) d\tau', \quad (28)$$

$$[1 - p(\tau, \alpha)] Q_2(\tau, \alpha) = 1 - p(\tau, \alpha) + \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau - \tau'|} \times \\ \times [1 - p(\tau', \alpha)] Q_2(\tau', \alpha) d\tau', \quad (29)$$

$$\frac{\partial Q_1(\tau, \alpha)}{\partial \tau} - \frac{\partial Q_1(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} = Q_1(0, \alpha) p(0, \alpha), \quad (30)$$

$$\frac{\partial Q_2(\tau, \alpha)}{\partial \tau} - \frac{\partial Q_2(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} = p(\tau, \alpha) \frac{1 - p(0, \alpha)}{1 - p(\tau, \alpha)} [Q_1(\tau, \alpha) + Q_2(0, \alpha) - \\ - Q_2(\tau, \alpha)]. \quad (31)$$

Из последних четырех уравнений, используя (27), находим также следующие уравнения для $Q(\tau, \alpha)$:

$$Q(\tau, \alpha) = 1 + \frac{\lambda(\tau + \alpha)}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau - \tau'|} Q(\tau', \alpha) d\tau', \quad (32)$$

$$\frac{\partial Q(\tau, \alpha)}{\partial \tau} - \frac{\partial Q(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} = Q(0, \alpha) p(\tau, \alpha). \quad (33)$$

Решения уравнений (30) и (33) имеют вид

$$Q_1(\tau, \alpha) = Q_1(0, \tau + \alpha) + \int_\alpha^{\tau + \alpha} Q_1(0, \alpha') p(0, \alpha') d\alpha', \quad (34)$$

$$Q(\tau, \alpha) = Q(0, \tau + \alpha) + \int_\alpha^{\tau + \alpha} Q(0, \alpha') p(\tau + \alpha - \alpha', \alpha') d\alpha'. \quad (35)$$

Итак, мы выразили искомые средние числа рассеяний через вероятность выхода кванта из среды $p(\tau, \alpha)$ и функции от одной переменной $Q_1(0, \alpha)$ и $Q(0, \alpha)$. Для определения последних воспользуемся интегральными уравнениями (28) и (32). Найдем сначала $Q(0, \alpha)$. Полагая в (32) $\tau = 0$, получаем

$$Q(0, \alpha) = 1 + \frac{\lambda(\alpha)}{2} u(\alpha), \quad (36)$$

где

$$u(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\tau} Q(\tau, \alpha) d\tau. \quad (37)$$

Домножим теперь уравнение (33) на $e^{-\tau}$ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до ∞ . Тогда получим следующее уравнение для $u(\alpha)$:

$$\frac{du}{d\alpha} = [1 - p(0, \alpha)] u(\alpha) - 1 - p(\alpha), \quad (38)$$

где

$$p(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\tau} p(\tau, \alpha) d\tau \quad (39)$$

есть вероятность диффузного отражения кванта от среды, связанная с функцией $p(0, \alpha)$ соотношением

$$p(0, \alpha) = \frac{\lambda(\alpha)}{2} [1 + p(\alpha)]. \quad (40)$$

Аналогично для $Q_1(0, \alpha)$ получается из (28) выражение

$$Q_1(0, \alpha) = 1 + \frac{v(\alpha)}{1 + p(\alpha)}, \quad (41)$$

где функция

$$v(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\tau} p(\tau, \alpha) Q_1(\tau, \alpha) d\tau \quad (42)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{dz} = 2[1 - p(0, z)]v(z) - p(0, z)[1 + p(z)]. \quad (43)$$

Для того, чтобы найти среднее число рассеяний кванта в исходной среде, в приведенных выражениях для $Q_1(\tau, z)$, $Q_2(\tau, z)$ и $Q(\tau, z)$ необходимо положить $z = 0$. Подставляя (36) и (41) в формулы (34) и (35), получаем окончательно

$$Q(\tau, 0) = 1 + \frac{\lambda(\tau)}{2} u(\tau) + \int_0^\tau \left[1 + \frac{\lambda(z)}{2} u(z)\right] p(\tau - z, z) dz, \quad (44)$$

$$Q_1(\tau, 0) = 1 + \frac{v(\tau)}{1 + p(\tau)} + \frac{1}{2} \int_0^\tau \lambda(z)[1 + p(z) + v(z)] dz. \quad (45)$$

Уравнения (38) и (43), определяющие функции $u(z)$ и $v(z)$, легко решаются. После нахождения величин Q_1 и Q из соотношения (27) можно найти и среднее число рассеяний погибающих квантов, т. е. $Q_2(\tau, 0)$.

Следует отметить (см. [2]), что знание функций Q_1 , Q_2 и Q позволяет определить средние числа рассеяний фотонов при любых действующих в среде источниках излучения.

Վ. ՅԱՆ. ՏԵՐԵՐԻԺ

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌԻ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՖՈՏՈՆԻ ՑՐՈՒՄՆԵՐԻ ԹԻՎԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում դիտվում է անհամասեռ միջավայրում ֆոտոնների ցրումների միջին թվի խնդիրը: Ենթադրվում է, որ ֆոտոնի մեկ անգամ ցրման ալբեդոն հանդիսանում է կամայական տրված ֆունկցիա միջավայրի կետերի կոորդինատներից: Որոշելի մեծությունը արտահայտվում է միջավայրից քվանտի ելքի հավանականությունից:

V. Yu. TEREbizh

THE NUMBER OF SCATTERING OF A PHOTON
IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM

S u m m a r y

The problem of the determination of the mean number of scattering of a photon in an inhomogeneous medium is considered. It is assumed, that the scattering albedo is an arbitrary given function of the coordinates of a points in the medium. An unknown quantities are expressed by means of a probability of escaping of a photon from the medium.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, ДАН АрмССР, 8, 101, 1948.
2. В. В. Соболев, Астрофизика, 2, 135, 1966.
3. В. В. Соболев. Ученые записки ЛГУ, 237, 3, 1958.
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа. т. 2, М., ФМ, 1963, стр. 189.
5. В. В. Соболев. ДАН СССР, 111, 1000, 1956.