

Г. М. Айвазян

ОБ АССИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ $K(\rho)$
ДЛЯ $\rho < 40$ И РАЗЛИЧНЫХ m

Световой поток при прохождении через замутнение рассеивается и поглощается аэрозолями среды. Для монодисперсного сферического аэрозоля коэффициент ослабления вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{\pi d^2}{4} N \cdot K(\rho), \quad (1)$$

где N — число частиц в единице объема,
 d — диаметр аэрозолей,
 λ — длина волны радиации,

$K(\rho)$ — функция параметра $\rho = \frac{\pi d}{\lambda}$ и согласно теории

диффракции электромагнитных волн на сферическом шаре [1] выражается:

$$K(\rho) = \frac{2}{\rho^2} \operatorname{Im} \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) (-1)^l (c_l - b_l) \quad (2)$$

Здесь l — порядок парциальной волны, а c_l и b_l — амплитуды парциальных волн и для случая $\rho \gg 1$ равны:

$$c_l = (-1)^l i \frac{2l+1}{l(l+1)} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 - e^{2i\rho(f_0 - mf_1)} \frac{1 - iz_2 \cdot e^{2im\rho f_1}}{1 + iz_2 \cdot e^{-2im\rho f_1}} \right\}$$
$$b_l = -(-1)^l i \frac{2l+1}{l(l+1)} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 - e^{2i\rho(f_0 - mf_1)} \frac{1 - iz_1 \cdot e^{2im\rho f_1}}{1 + iz_1 \cdot e^{-2im\rho f_1}} \right\},$$

где

$$f_0 = \sin \tau_0 - \tau_0 \cdot \cos \tau_0 \quad f_1 = \sin \tau_1 - \tau_1 \cdot \cos \tau_1$$

$$\cos \tau_0 = \frac{l + \frac{1}{2}}{\rho} \quad \cos \tau_1 = \frac{l + \frac{1}{2}}{m\rho}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sin \tau_0 - m \sin \tau_1}{\sin \tau_0 + m \sin \tau_1} \quad \varepsilon_2 = \frac{m \sin \tau_0 - \sin \tau_1}{m \sin \tau_0 + \sin \tau_1}$$

С увеличением l амплитуды парциальных волн убывают как $\frac{1}{l}$, а число парциальных волн, которое необходимо учесть в (2) должно быть порядка ρ . Так, если в случае рэлеевского рассеяния $\rho(m-1) \ll \rho \ll 1$ учитывается только первая электрическая парциальная волна c_1 , то для видимого света и аэрозолей с радиусом 5μ в формуле (2) необходимо брать сумму около 60 членов. Теперь можно представить с какими трудностями связан расчет функции $K(\rho)$ только для одного значения комплексного показателя преломления m , когда $\rho \gg 1$. Вопрос еще больше усложняется, если по ходу работы требуются кривые $K(\rho)$ для многих значений $m \sim 1$. Кроме того, практика показала, что при решении ряда теоретических задач невозможно пользоваться формулой (2), так как из-за своей несовершенности она не поддается интегрированию совместно с другими функциями. Все рассмотренное приводит к выводу, что для $K(\rho)$ необходимо иметь простую асимптотическую формулу, куда бы в качестве переменной входил и комплексный показатель преломления. Для крупных прозрачных частиц подобная формула (1) существует

$$K(\rho) = 2 \left\{ 1 - \frac{4m^2}{\rho(m+1)^2(m-1)} \sin [2\rho(m-1)] \right\}, \quad (3)$$

но она плохо описывает ход $K(\rho)$ для $\rho < 40$, т. е. для интересующих нас значений ρ . В настоящей работе видоизменением формулы (3) получена асимптотическая формула $K(\rho)$, для $\rho < 40$ и $m \sim 1$.

В дальнейшем кривые $K(\rho)$ Пендорфа [2] и Шифрина [1], а также кривую $K(\rho)$ при $m = 1,55$ Синклера [3] мы примем за „стандартные“ и по ним видоизменим формулу (3).

На рис. 1 и 2 для сравнения приведены кривые $K(\rho)$ соответственно для $m = 1,33$ (Пендорфа) и $m = 1,21$ (Шифрина), а также кривые $K(\rho)$ для тех же значений m , но рассчитанные по формуле (3). Как показывают графические данные, пунктирные кривые проходят соответственно ниже кривых Пендорфа и Шифрина и как бы смещены в целом

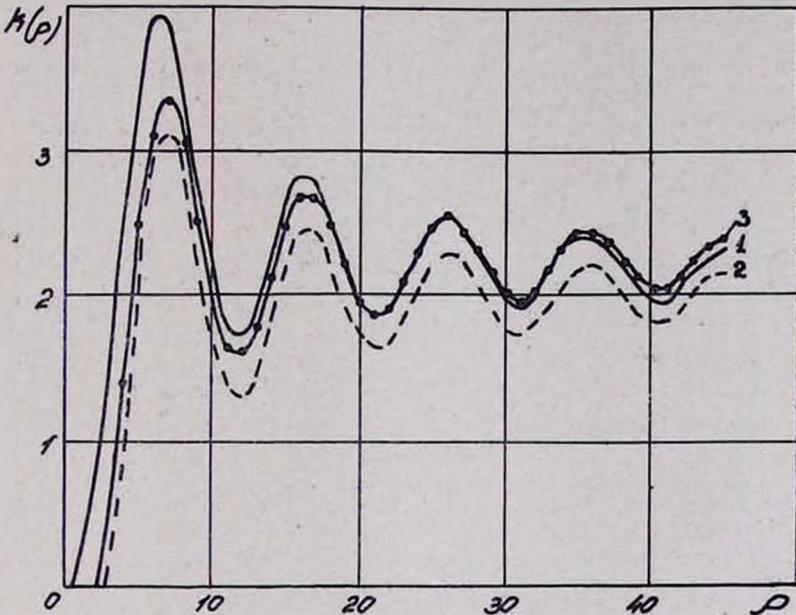


Рис. 1. Коэффициент ослабления $K(\rho)$ для $m=1,33$.
 1—Кривая $K(\rho)$ Пендорфа, 2—кривая $K(\rho)$ по формуле (3),
 3—кривая $K(\rho)$ по формуле (4)

вниз на постоянную величину. Для лучшего согласования кривых, формулу (3) можно переписать в виде:

$$K'(\rho) = 2 \left\{ 1,13 - \frac{4m^2}{\rho(m+1)^2(m-1)} \sin [2\rho(m-1)] \right\}. \quad (4)$$

Кривые $K'(\rho)$ для $m = 1,33$ и $m = 1,21$, вычисленные по формуле (4), также нанесены на рис. 1 и 2. Легко заметить, что хотя формула (4) дает лучшее согласование со „стандартными“ кривыми для различных m , но она опять плохо описывает область первого максимума. Расчеты по-

казали, что в пределах первого максимума разность $-\Delta K(\rho)$ между кривой Пендорфа ($m = 1,33$) и $K'(\rho)$, рассчитанной для $m = 1,33$, линейно зависит от ρ . Линейной оказалась зависимость $\Delta K(\rho)$ от ρ при сравнении $K(\rho)$ с $K'(\rho)$ и для $m = 1,21$ (Шифрина) и $m = 1,55$ (Сянклера). Кроме того

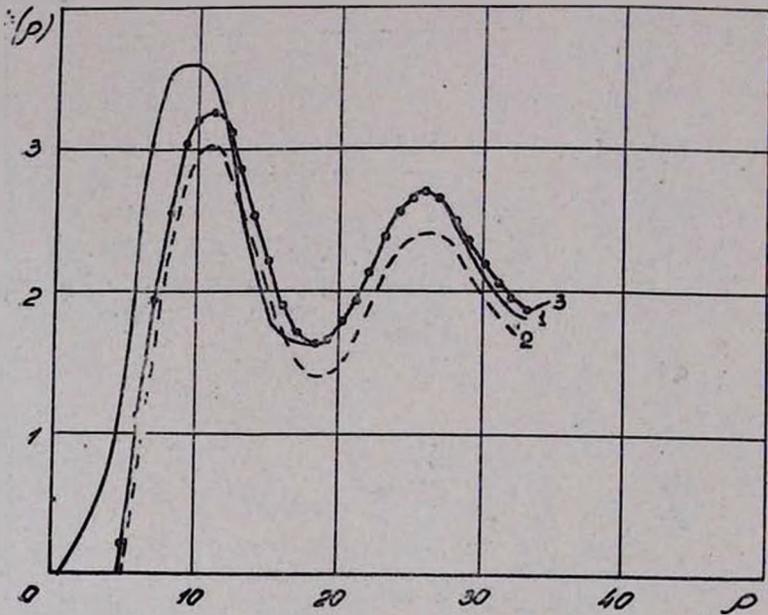


Рис. 2. Коэффициент ослабления $K(\rho)$ для $m=1,21$.
1—Кривая $K(\rho)$ Шифрина, 2— кривая $K(\rho)$ по формуле (3),
3—кривая $K(\rho)$ по формуле (4)

оказалось, что коэффициенты линейности для различных m в свою очередь линейно зависят от $m - 1$. Тогда стало возможным ассимптотическую формулу $K(\rho)$ для $\rho < 40$ представить в виде суммы:

$$\begin{aligned}
 K(\rho) &= K'(\rho) + \Delta K(\rho) = \\
 &= 2 \left\{ 1,13 - \frac{4m^2}{\rho(m+1)^2(m-1)} \sin [2\rho(m-1)] \right\} + \\
 &\quad + 2,393 + 1,940(m-1) + \rho [-0,035 - (m-1)], \quad (5)
 \end{aligned}$$

где при расчетах необходимо брать только $\Delta K(\rho) > 0$.

Для сравнения на рис. 3, 4 и 5 приведены кривые $K(\rho)$ Пендорфа [4] для $m = 1,33$, $m = 1,40$ и $m = 1,50$ и соответственно расчеты по формуле (5) (пунктир) для тех же значений m . По этим данным рассчитывались относительные погрешности (см. табл. 1), которые можно до-

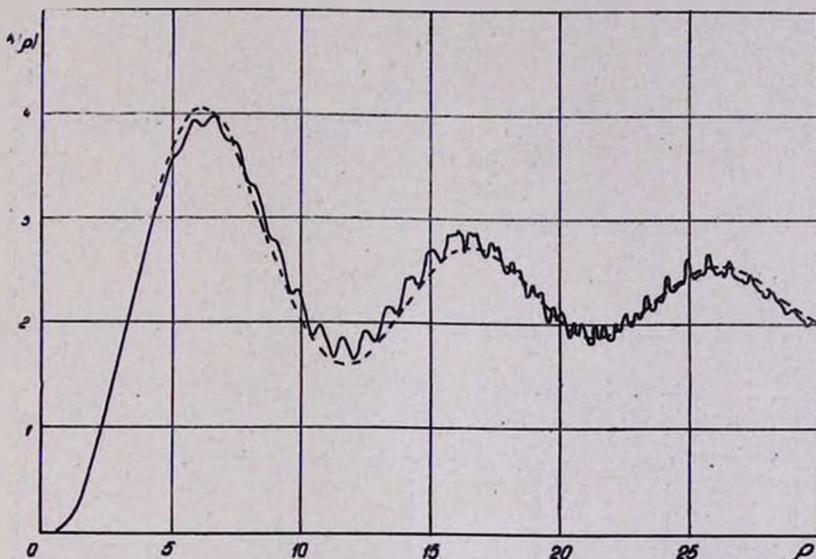


Рис. 3. Коэффициент ослабления $K(\rho)$ для $m=1,33$.

1—Кривая $K(\rho)$ Пендорфа, 2—кривая $K(\rho)$ по формуле (5) (пунктир)

пустить, применяя вместо точных формул, полуэмпирическую формулу (5). Нетрудно убедиться, что для любых m из интервала $1,33 \leq m \leq 1,50$ и для ρ , изменяющихся в пределах $1 \leq \rho \leq 40$, относительная погрешность при расчетах $K(\rho)$ по формуле (5) не превышает 10%. Причем, погрешность всегда несколько больше (см. табл. 1) в первом максимуме и минимуме каждой из кривых. В нашем распоряжении не оказалось кривых $K(\rho)$, вычисленных по точным формулам для $m < 1,33$, поэтому для расчета относительных погрешностей использовались кривые $K(\rho)$, построенные методом подобия для $m = 1,21$ и $m = 1,15$ [5]. Сравнение показало, что для $m = 1,21$ и $1,15$ при расчетах $K(\rho)$ по формуле (5), относительная погрешность мало отличается

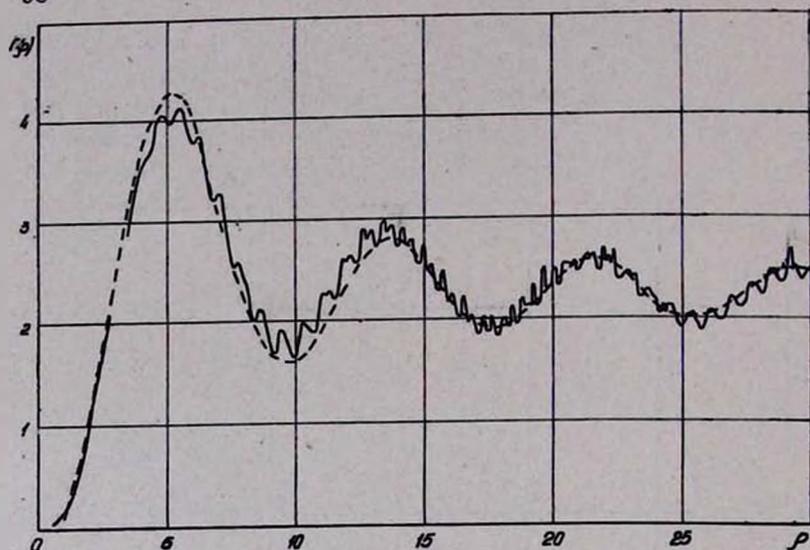
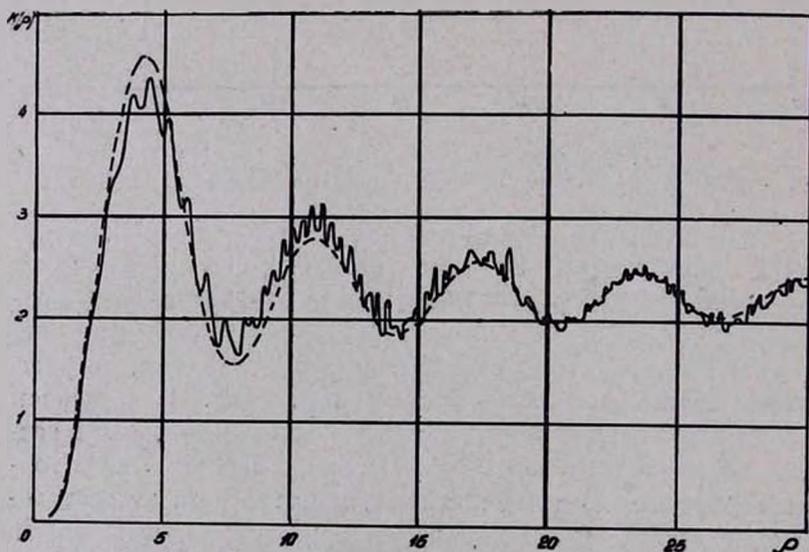
Рис. 4. Коэффициент ослабления $K(\rho)$ для $m=1,40$.1—Кривая $K(\rho)$ Пендорфа, 2—кривая $K(\rho)$ по формуле (5) (пунктир)Рис. 5. Коэффициент ослабления $K(\rho)$ для $m=1,50$.1—Кривая $K(\rho)$ Пендорфа, 2—кривая $K(\rho)$ по формуле (5) (пунктир)

Таблица 1

$m=1,33$		$m=1,40$		$m=1,50$	
ρ	погрешн. %	ρ	погрешн. %	ρ	погрешн. %
1—4	<0,5	1—3	<0,5	1—2	<3
4—9	<2	3—6	<3	2—3	<8
9—13	<3	6—8	<2	3—5	<5
13—17	<2	8—12	<4	5—6,5	<2
17—25	<1	12—15	<3	6,5—9,5	<8
25—35	<2	15—25	<2	9,5—12	<4
35—40	<3	25—40	<3	12—25	<2
				25—40	<4

от погрешностей в табл. 1 и, во всяком случае, не превышает 10%.

Таким образом, для любых m в интервале $1,15 \leq m \leq 1,55$ и значений ρ от 1 до 40, вместо точных формул (2) можно пользоваться асимптотической полуэмпирической формулой (5) с погрешностью (см. табл. 1) не превышающей 10%.

В заключение автор пользуется случаем поблагодарить проф. К. С. Шифрина за обсуждение.

Бюракан
сентябрь 1959 г.

Վ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ $K(\rho)$ ԲԱՆԱԶԵՎ ՏԱՐԲԵՐ m -ԵՐԻ ԵՎ $\rho < 40$ -Ի ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում առաջարկված է սսիմպտոտիկ բանաձև (տես [5]), որի օգնությամբ կարելի է հաշվել $K(\rho)$ ֆունկցիաները m -ի ամեն մի նշանակության համար՝ $1,15 \leq m \leq 1,55$ սահմանի միջից, երբ $\rho < 40$: Համեմատվում են $K(\rho)$ ֆունկցիաները, որոնք հաշված են (5) բանաձևով և Մի-ի ճիշտ բանաձևերով (տես նկ. 3--5):

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде, ГИТТЛ, 1952.
2. Penndorf R. J. Meteorol. 13, № 2, 219, 1956.
3. Sinclair D. JOSA 37, 9, 475, 1947.
4. Penndorf R. JOSA 47, 11, 1010, 1957.
5. Айвазян Г. М. Теоретический расчет спектрального коэффициента ослабления радиации 1,5—15 μ в полидисперсных облаках и туманах с учетом изменения комплексного показателя преломления от длины волны радиации (настоящий сборник стр. 15).