

ФЛЮКТУАЦИИ В ВИДИМОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗВЕЗД И КОСМИЧЕСКОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ

Б. Е. МАРКАРЯН

ВВЕДЕНИЕ

Изучение причин нерегулярностей в видимом распределении звезд на небе имеет весьма важное значение для дальнейшего развития учения о строении Галактики.

Упомянутые нерегулярности никак не могут быть объяснены чисто случайными колебаниями в пространственном распределении звезд, а также влиянием возможных ошибок в предельных звездных величинах, т. к. анализ обоих упомянутых факторов показывает, что вызываемые ими флуктуации в числе звезд на много меньше, чем те, которые фактически наблюдаются. Поэтому для объяснения нерегулярностей в видимом распределении звезд, привлекается космическое поглощение.

В настоящее время известны неоспоримые факты, которые привели к выводу, что поглощающая среда в Галактике неоднородна и неравномерна, что она имеет пятнистую, клочковатую структуру. Гипотеза о клочковатости межзвездной поглощающей материи подробно была рассмотрена В. А. Амбарцумяном.

Амбарцумян и Горделадзе¹, исходя из данных, относящихся к статистике диффузных туманностей, пришли к весьма интересному заключению, что связь между диффузными туманностями и освещающими их звездами носит характер случайной встречи, и что должно существовать огромное количество неосвещенных туманностей, совокупность которых может обуславливать общее поглощение света в межзвездном пространстве. В этом исследовании средняя поглощающая способность каждой из таких неосвещенных туманностей предварительно была оценена приблизительно в 0^m30 . Другие астро-

номы (Greenstein, Kreiken, Becker и другие), исходя из совершенно других соображений, пришли, независимо друг от друга, к той же по существу гипотезе, что космическое поглощение обусловлено совокупностью отдельных облаков. Но полученные ими оценки поглощающей силы отдельных облаков заметно расходятся. Это вызвало необходимость решения вопроса новыми методами.

С этой целью в 1939 г. В. А. Амбарцумян произвел анализ подсчетов внегалактических туманностей², используя для этой цели площадки, названные Hubble-ом „Survey Fields“. Анализ подсчетов показал, что разность $\lg N - \lg \bar{N}$, которая характеризует дисперсию в числах внегалактических туманностей, приходящихся на каждую площадку, сильно возрастает по мере уменьшения галактической широты. Амбарцумян на основании этого пришел к выводу, что флуктуации в числе внегалактических туманностей обусловлены, главным образом, колебаниями в галактическом поглощении на данной галактической широте. Что же касается средней оптической толщины одного поглощающего облака, то она была выведена, на основании построенной Амбарцумяном простой математической теории, из флуктуации чисел внегалактических туманностей и была найдена равной $0^m.274$.

Но в этом исследовании, как это заметил его автор, окончательное значение оптической толщины зависит от величины среднего поглощения в направлении галактического полюса, которое было принято равным $0^m.25$ согласно Hubble-y. Если для среднего поглощения в направлении галактического полюса принимать меньшее значение, то значение средней оптической толщины отдельного облака увеличится.

Поэтому полученное значение оптической толщины нуждается в дальнейшей проверке.

В то время, как до сих пор подсчеты звезд служили либо для установления характеристики отдельных темных туманностей, либо для получения характеристик всего галактического поглощающего слоя, без учета ее дискретной, клочковатой структуры, в настоящей работе мы делаем попытку изучения звездных подсчетов для установления величин, ха-

рактизирующих поглощающую среду, как статистическую совокупность отдельных поглощающих облаков и в первую очередь средней оптической толщины одного поглощающего облака. Мы попытались разрешить этот вопрос, исследуя для этой цели флюктуации в видимом распределении звезд, вызванные в основном неравномерностью космического поглощения.

В I главе настоящей работы произведен подробный анализ подсчетов звезд и суммарных их яркостей на основании данных наблюдений. При этом были рассмотрены влияния естественных колебаний и ошибок в предельных звездных величинах на относительную средне-квадратичную флюктуацию чисел звезд.

Результаты анализов подсчетов звезд и суммарных их яркостей почти совпадают и приводят к заключению, что нерегулярности в видимом распределении звезд на данной галактической параллели вызваны, главным образом, флюктуациями в галактическом поглощении.

Помимо этого, в этой главе дается теоретический анализ суммарных яркостей звезд, который почти полностью подтверждает результаты, полученные анализом данных наблюдений.

Во II главе мы попытались дать теорию флюктуаций чисел звезд. Выведены формулы для относительной средне-квадратичной флюктуации чисел звезд ярче m -ой величины — $N(m)$. При выводах этих формул принимается гипотеза, согласно которой междузвездная среда, которая в основном обуславливает флюктуации в видимом распределении звезд, имеет исключительно клочковатую структуру. Затем, на основании выведенных формул, определяется значение средней оптической толщины поглощающих облаков, производящих общее междузвездное поглощение.

Кроме этого, в этой главе приведено сравнение результатов теории флюктуаций чисел звезд с результатами теории флюктуации яркостей Млечного Пути, данной В. А. Амбарцумяном.

ГЛАВА I

АНАЛИЗ ПОДСЧЕТОВ ЗВЕЗД

Для настоящей работы было бы желательно иметь готовые дифференциальные подсчеты звезд* в отдельных, достаточно обширных, участках Млечного Пути, а не в мало-численных площадках, разбросанных по всему небу, как, скажем, избранные площадки Каптейна.

Подсчеты звезд Гарвардской и Пулковской обсерваторий, которые проводятся в настоящее время в обширных областях Млечного Пути с целью изучения темных туманностей, безусловно, пригодились бы для настоящей работы, но, к сожалению, они еще не закончены.

Из-за отсутствия более подходящего материала мы были вынуждены использовать van-Rhijn-овские данные², выведенные из Mount-Wilson-овских (Mount-Wilson Catalogue) и Harvard-ских (Harvard Annals, 101 и 103) подсчетов, произведенных в избранных площадках Каптейна, а именно, данные, приведенные в табл. I упомянутой работы в столбцах под заголовком „adopted“.

Помимо этого, были рассмотрены дифференциальные подсчеты В. В. Лавдовского, произведенные в ряде площадок созвездий Близнецов и Ориона⁴, и Lois Kieffer-а и Robert H. Baker-а в созвездии Возничего⁴.

Из избранных площадок Каптейна были составлены четыре группы. В первую группу вошли площадки, которые имеют галактическую широту менее $\pm 5^\circ$ (за исключением площадки № 134). Во вторую группу вошли площадки, имеющие галактическую широту между $\pm 8^\circ$ и $\pm 11^\circ$,
в третью между ± 23 и $\pm 32^\circ$,
в четвертую между ± 38 и $\pm 43^\circ$.

* Под дифференциальными подсчетами мы понимаем здесь подсчеты звезд данной или до данной звездной величины.

Пятая группа была составлена из площадок В. В. Лавдовского, имеющих галактическую широту между -7° и -13° (за исключением площадки № 6, которая приходится на большую темную туманность и имеет очень мало звезд).

Шестая и седьмая группы были составлены из зон и площадок Lois Kiefer-a и Robert H. Baker-a, имеющих галактическую широту соответственно между $+10^\circ$ и $+12^\circ.5$, и 0° и $+2^\circ.5$. Номера этих площадок по группам и их галактические координаты по ван Райну приведены в табл. 1 (см. 1 приложение).

В виду того, что координаты площадок каждой группы, тем не менее, заметно отличаются друг от друга, данные подсчетов были редуцированы к средним координатам площадок каждой группы с целью исключения эффекта галактической концентрации (за исключением шестой и седьмой групп, т. к. координаты этих групп мало отличаются друг от друга). Координаты, к которым были редуцированы площадки, даны в последнем столбце таблицы 1.

Величина редукции значений $\lg N(m)$ для каждой площадки с координатами центра β и λ к точке с координатами β' и λ' находилась по формуле:

$$\text{red} = \lg N_{\beta, \lambda}(m) - \lg N_{\beta', \lambda'}(m),$$

где $N_{\beta, \lambda}(m)$ обозначает сглаженные числа звезд до данной величины m на данной гал. широте и долготе, отнесенные к площадке в один квадратный градус.

Логарифмы $N_{\beta, \lambda}(m)$ для определенных значений β и λ даны в табл. 10 Groningen Publ. 43, 1929. Для промежуточных значений координат вычисления производились путем интерполирования табличных данных.

Логарифмы редуцированных $N(m)$, начиная от $m=13$ до $m=18$ для площадок I, II, III и IV групп, и от $m=10$ до $m=15$ для площадок V группы, а так же логарифмы $N(m)$, начиная от $m=10$ до $m=15$ для площадок VI и VII групп по группам приведены в табл. 2 (см. приложение).

§ 1. Анализ подсчетов чисел звезд. В качестве характеристики флуктуаций мы будем изучать среднее квадратичное отклонение $N(m)$ от $\overline{N(m)}$:

$$\sigma = \sqrt{[N(m) - \overline{N(m)}]^2},$$

где $N(m)$ — число всех звезд ярче величины m , отнесенное к одному квад. градусу, а черта сверху означает усреднение.

Как известно

$$\begin{aligned} [N(m) - \overline{N(m)}]^2 &= \overline{N(m)^2} - 2 \overline{N(m)} \overline{N(m)} + \overline{N(m)}^2 = \\ &= \overline{N(m)^2} - \overline{N(m)}^2, \end{aligned}$$

поэтому

$$\sigma^2 = \overline{N(m)^2} - \overline{N(m)}^2.$$

Разделяя обе стороны на $\overline{N(m)}^2$, получим квадрат относительной средне-квадратичной флуктуации величины $N(m)$. Обозначая его через δ^2 , имеем:

$$\delta^2 = \frac{\overline{N(m)^2} - \overline{N(m)}^2}{\overline{N(m)}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Для того, чтобы по данным наблюдений определить значения относительной средне-квадратичной флуктуации в видимом распределении звезд — $\delta^2_{\text{наб.}}$, для каждой группы в отдельности по данным таблицы 2 были вычислены: $\overline{N(m)}$, $\overline{N(m)}^2$, $\overline{N(m)^2}$ и σ^2 , значения которых приведены в табл. 3 (см. приложение). Значения же $\delta^2_{\text{наб.}}$, вычисленные по формуле (1) на основании данных таблицы 3, даны в таблице 4.

Как мы видим, квадрат относительной средне-квадратичной флуктуации чисел звезд по мере уменьшения галак. широты сильно возрастает. При переходе от зоны $30-40^\circ$ к зоне $0^\circ-10^\circ$ он возрастает в 2,5 раза (по данным I, II, III и IV групп), несмотря на возрастание среднего значения $N(m)$.

Этот поразительный факт заслуживает особого внимания.

Помимо этого, мы видим, что значения $\delta^2_{\text{наб.}}$, вычисленные по данным V и VII групп, несколько больше, чем те, ко-

Таблица 4

m № групп	13	14	15	16	17	18	Среднее значение
I	0,067	0,075	0,099	0,092	0,089	0,116	0,090
II	0,059	0,053	0,071	0,094	0,100	0,079	0,076
III	0,049	0,031	0,038	0,044	0,050	0,027	0,040
IV	0,052	0,029	0,032	0,023	0,016	0,027	0,030

m № групп	10	11	12	13	14	15	
V	0,154	0,136	0,136	0,123	0,108	0,080	0,123
VI	0,055	0,074	0,083	0,101	0,123	0,133	0,096
VII	0,086	0,137	0,146	0,152	0,135	0,149	0,134

торые вычислены по данным II и III групп, находящихся соответственно на тех же галактических параллелях.

Это будет вполне понятно, если принять во внимание то обстоятельство, что площадки V, VI и VII групп находятся в специально выбранных областях больших темных туманностей, которые, повидимому, представляют из себя скопления поглощающих облаков.

Заметим, что при исследовании подсчетов внегалактических туманностей В. А. Амбарцумян выявил³, что при переходе от зоны $50^\circ-70^\circ$ к зоне $25^\circ-30^\circ$ гал. широт разность $\lg N - \overline{\lg N}$, которая характеризует дисперсию в числе внегалактических туманностей, возрастает в 2,5 раза. Из его данных можно заключить, что относительная флюктуация в числе внегалактических туманностей возрастает при убывании гал. широты в еще большей степени, чем это установлено выше для звезд.

Займемся теперь причинами, которые могут в большей или меньшей степени обусловить флюктуации чисел звезд. В качестве факторов, обуславливающих наблюдаемые отно-

сительные средне-квадратичные флюктуации чисел звезд, можно привести нижеследующие:

a. естественные флюктуации в пространственном распределении звезд, а также в распределении их в проекции на небесную сферу;

b. ошибки в предельных звездных величинах, различные для различных площадей;

c. флюктуации в междузвездном поглощении.

a. Известно, что естественное средне-квадратичное отклонение числа звезд, приходящихся на какую-нибудь площадь от среднего значения, равняется квадратному корню от этого среднего значения. Поэтому ясно, что его относительное значение $\delta_{\text{ест.}}$ будет зависеть от величин площадей, на которых произведены подсчеты звезд. Ввиду этого в данном случае непременно надо рассматривать фактически наблюдаемые числа звезд, а не числа звезд, отнесенные к площадке в один квад. градус.

Обозначая фактически наблюдаемые числа звезд ярче m -ой величины через $N_1(m)$, будем иметь:

$$\sigma_{\text{ест.}} = \sqrt{N_1(m)},$$

отсюда находим:

$$\delta_{\text{ест.}}^2 = \frac{1}{N_1(m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Значения $N_1(m)$, на основании которых по формуле (2) вычисляются значения $\delta_{\text{ест.}}^2$ для площадей I, II, III и IV групп были взяты из данных, приведенных ван-Райном в скобках табл. 1 Groningen Publications 43. А для площадей V, VI и VII групп значения $N(m)$ были умножены на соответствующие величины площадей.

Вычисленные таким образом значения $\delta_{\text{ест.}}^2$ приведены в табл. 5.

Как мы видим, значения $\delta_{\text{ест.}}^2$ во-первых, составляют несравненно меньше чем $\delta_{\text{наб.}}^2$, а во-вторых, что самое главное, они дают совершенно противоположный ход в том смысле, что при уменьшении галактической широты — убывают.

Таблица 5

m групп	13	14	15	16	17	18	Среднее значение
I	0,014	0,006	0,003	0,002	0,002	0,001	0,005
II	0,018	0,007	0,003	0,002	0,002	0,001	0,005
III	0,019	0,008	0,004	0,003	0,003	0,004	0,008
IV	0,018	0,009	0,004	0,004	0,004	0,008	0,008

m групп	10	11	12	13	14	15	
V	0,070	0,029	0,012	0,006	0,002	0,001	0,020
VI	0,010	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,003
VII	0,010	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,003

б. Рассмотрим теперь влияние на звездные подсчеты ошибок в предельных звездных величинах.

Наблюдаемые числа звезд, как функцию предельной величины можно представить в первом, самом грубом (но достаточном здесь) приближении в виде:

$$N(m) = c e^{\lambda m}$$

Допустим, что при определении предельной звездной величины — m допущена некоторая ошибка, обозначим ее через Δm , тогда наблюдаемое значение $N(m)$ окажется равным:

$$N(m) = c e^{\lambda(m + \Delta m)} = N_0 e^{\lambda \Delta m}$$

Вероятность ошибки Δm в предельной величине подсчетов будет определяться законом Гауса, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} e^{-\frac{\Delta m^2}{2\beta}}$$

повтому среднее значение величины $N(m)$ определится следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{N(m)} &= \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda \Delta m} e^{-\frac{\Delta m^2}{2\beta^2}} d\Delta m = \\ &= \frac{N_0 e^{\frac{\lambda^2 \beta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{\beta} - \lambda \beta \right)^2} d\Delta m,\end{aligned}$$

обозначая $\frac{\Delta m}{\beta} - \lambda \beta = x$, $d\Delta m = \beta dx$,

находим:

$$\begin{aligned}\overline{N(m)} &= \frac{N_0 e^{\frac{\lambda^2 \beta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = N_0 e^{\frac{\lambda^2 \beta^2}{2}} \\ \overline{N(m)}^2 &= N_0^2 e^{\lambda^2 \beta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)\end{aligned}$$

Таким же образом

$$\begin{aligned}\overline{N(m)^2} &= \frac{N_0^2}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\lambda \Delta m} e^{-\frac{\Delta m^2}{2\beta^2}} d\Delta m = \\ &= \frac{N_0^2}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{\beta} - 2\lambda \beta \right)^2} d\Delta m = \\ &= \frac{N_0^2 e^{2\lambda^2 \beta^2}}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{\beta} - 2\lambda \beta \right)^2} d\Delta m = N_0^2 e^{2\lambda^2 \beta^2} \\ \overline{N(m)^2} &= N_0^2 e^{2\lambda^2 \beta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)\end{aligned}$$

Подставляя (3) и (4) в (1) для относительной среднес-

квадратичной флюктуации, обусловленной ошибками в предельных звездных величинах, находим:

$$\delta^1_{\text{пред.}} = e^{\lambda^2 \beta^2} - 1,$$

или разлагая в ряд $e^{\lambda^2 \beta^2}$ и ограничиваясь, ввиду малости $(\lambda^2 \beta^2)$ первыми двумя членами ряда, имеем:

$$\delta^1_{\text{пред.}} = \lambda^2 \beta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Значение параметра λ определяется нами по данным подсчетов чисел звезд во второй главе, в среднем оно порядка 0.8. Что же касается β^2 , то, как известно из теории вероятностей⁶, оно из себя представляет дисперсию величины Δm (в данном случае квадрат средне-квадратической ошибки). С другой стороны, из теории ошибок известно, что крайне невероятно, чтобы случайная ошибка получилась больше утроенной средней квадратической, поэтому

$$\Delta m_{\text{max.}} = 3\beta.$$

Если теперь допустим, что колебания при определении предельной звездной величины m происходит в интервал $(m-0.3, m+0.3)$, т. е. $\Delta m_{\text{max.}} = 0.3$, то получим $\beta = 0.10$. Подставляя в (5) $\lambda^2 = 0.64$ и $\beta^2 = 0.01$, находим:

$$\delta^1_{\text{пред.}} = 0.006.$$

Выбранный нами интервал колебания m довольно большой. На практике можно считать более вероятным меньший интервал. В соответствии с этим $\delta^1_{\text{пред.}}$ уменьшится еще более.

с. Таким образом, очевидно, что флюктуации, вызванные естественными отклонениями и ошибками в предельных звездных величинах, вместе взятые, никак не могут объяснить нерегулярности в видимом распределении звезд.

Заметим здесь, что и Öpik уже давно в своей работе „The Distribution of the Stars and the Law of Chance“⁷ пришел к тому выводу, что естественные флюктуации чисел звезд не могут объяснить иррегулярности в видимом распределении звезд. Мы же здесь показали тоже самое в отношении наших площадей.

После всего этого естественно предположить, что флюктуации в видимом распределении звезд на данной галактиче-

ской параллели вызваны, главным образом, клочковатой структурой межзвездной поглощающей материи.

Поэтому, если мы из наблюдаемых относительных средне-квадратичных флюктуаций исключим относительные средне-квадратичные флюктуации, обусловленные естественными колебаниями и ошибками в предельных звездных величинах, то получим относительные средне-квадратичные флюктуации чисел звезд, обусловленные лишь поглощающими облаками.

Но мы решили не исправлять наблюдаемые значения δ^2 за влияние ошибок в предельных звездных величинах, во-первых, потому, что оно, как мы уже видели, чрезвычайно мало, во-вторых, потому, что не уверены, что на самом деле ошибки в предельных звездных величинах доходят до значений, принятых нами выше. Иными словами, значение β нам точно неизвестно.

Исходя из сказанного, напомним:

$$\Delta_{\text{наб.}} = \Delta_{\text{тум.}} + \Delta_{\text{ест.}},$$

где Δ обозначает соответствующие отклонения фактически наблюдаемых чисел звезд от их среднего значения.

Возводя в квадрат обе стороны и беря среднее, получаем:

$$\overline{\Delta_{\text{наб.}}^2} = \overline{\Delta_{\text{тум.}}^2} + \overline{\Delta_{\text{ест.}}^2},$$

т. к. $\overline{\Delta_{\text{тум.}} \cdot \Delta_{\text{ест.}}} = 0$, поскольку отклонения $\Delta_{\text{тум.}}$ и $\Delta_{\text{ест.}}$ независимы.

Или, замечая, что $\overline{\Delta_{\text{ест.}}^2} = N_1(m)$, имеем:

$$\sigma_1^2 \text{наб.} = \sigma_1^2 \text{тум.} + N_1(m);$$

разделяя обе стороны на $N_1(m)$, находим:

$$\delta^2_{\text{тум.}} = \delta^2_{\text{наб.}} - \delta^2_{\text{ест.}}$$

Выходит, что значения $\delta^2_{\text{тум.}}$ получим путем вычитания из данных табл. 4 соответствующих данных табл. 5. Значения $\delta^2_{\text{тум.}}$ приведены в таблице 6.

§ 2. Анализ суммарных яркостей звезд. Наряду с анализом флюктуаций чисел звезд представляет большой интерес также анализ флюктуаций суммарных яркостей звезд, приходящихся на единицу площади неба. Эти суммарные яр-

Таблица 6

№ групп \ m	13	14	15	16	17	19	Среднее значение
I	0,053	0,069	0,096	0,090	0,087	0,115	0,085
II	0,041	0,016	0,068	0,092	0,018	0,078	0,071
III	0,030	0,023	0,034	0,041	0,042	0,023	0,032
IV	0,034	0,020	0,028	0,019	0,012	0,019	0,022

№ групп \ m	10	11	12	13	14	15	
V	0,084	0,107	0,124	0,117	0,106	0,079	0,103
VI	0,045	0,070	0,081	0,100	0,128	0,133	0,093
VII	0,076	0,133	0,144	0,151	0,135	0,149	0,131

кости, когда они охватывают все звездные величины, представляя собой звездную компоненту поверхностной яркости неба.

Метод анализа аналогичен тому, который применялся в § 1. В качестве характеристики флюктуаций суммарных яркостей звезд рассматривается средне-квадратичное отклонение l от $\bar{l}$, т. е.

$$\sigma = \sqrt{l(l-1)} = \sqrt{\bar{l}^2 - \bar{l}^2},$$

где l — суммарная яркость звезд.

Подсчеты чисел звезд, которые были использованы в § 1 при вычислении значений $\overline{N(m)^2}$ и $\overline{N(m)}^2$, можно использовать и для вычисления значений $\bar{l}^2$ и $\bar{l}^2$ с той лишь оговоркой, что, к сожалению, мы не обладаем необходимыми для этого данными чисел звезд всех величин. Но, повидимому, это мало скажется на результатах, т. к. известно, что на суммарную яркость звезд всех величин влияют, главным образом, звезды 13-ой, 14-ой и 15-ой величин.

Если число звезд данной величины $(m + 1/2)$ умножим на соответствующую яркость и просуммируем по всем m , то получим суммарную яркость звезд, т. е.

$$I = \sum_m A(m + 1/2) E_{m+1/2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

где $A(m + 1/2)$ — число звезд величины $(m + 1/2)$, значения которого находим из данных таблицы 2 (см. приложение) по формуле:

$$A(m + 1/2) = N(m + 1) - N(m),$$

$E_{m+1/2}$ — яркость звезд величины $(m + 1/2)$, которая, как известно, равняется $10^{-0.4(m + 1/2)}$, если за единицу принять яркость звезды нулевой величины.

Повторю для удобства введя произвольную постоянную c , уравнение (6) можно переписать в следующем виде:

$$I = 10^{-0.4(c + 1/2)} I_1,$$

где

$$I_1 = \sum A(m + 1/2) 10^{-0.4(m - c)}$$

Мы придали c значение 13 для I, II, III и IV групп и 9 для V, VI и VII групп.

Значения I_1 для каждой группы в отдельности приведены в таблице 7 (см. приложение).

На основании данных табл. 7 были вычислены значения $\overline{I_1}$, $\overline{I_1^2}$, $\overline{I_1^3}$, σ^2 и δ^2 , которые приведены в табл. 8, причем значения δ^2 вычислялись по формуле:

$$\delta^2 = \frac{\overline{I_1^2} - \overline{I_1}^2}{\overline{I_1}} = \frac{\overline{I_1^2} - \overline{I_1}^2}{\overline{I_1}^2}.$$

Полученные значения δ^2 для суммарных яркостей звезд, как мы видим, очень сходны с результатами, которые были получены в § 1 для чисел звезд (см. таблицу 6).

Такое хорошее совпадение результатов в известной степени оправдывает высказанную нами мысль о том, что неполнота данных чисел звезд мало сказывается на относительных флуктуациях суммарных яркостей звезд.

Таблица 8

Г р у п п а	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\bar{\Gamma}_1$	346,0	385,1	191,6	101,1	25,7	16,0	24,8
$\bar{\Gamma}_1^2$	119716	116639	36711	10221	660,5	256,0	615,0
$\bar{\Gamma}_1^3$	130723	157631	37825	10423	714,7	281,7	692,6
σ^2	11007	10942	1114	202	54,2	25,7	77,6
σ^3	0,092	0,075	0,030	0,020	0,082	0,100	0,126

Вычисленные относительные средне-квадратичные флюктуации суммарных яркостей звезд по данным наблюдений можно полностью приписать поглощающим облакам по той простой причине, что влияние естественных флюктуаций в суммарных яркостях звезд оказывается еще меньшим, чем для чисел звезд, а остальные факторы не играют никакой роли.

§ 3. *Теоретический анализ суммарных яркостей звезд для разных галактических широт.* Исходя из произведенного выше анализа подсчетов чисел звезд и суммарных яркостей их, можно считать установленным тот факт, что относительные средне-квадратичные флюктуации чисел звезд и суммарных яркостей их сильно возрастают по мере уменьшения галактических широт. Представляется весьма вероятным, что это явление вызывается флюктуациями в космическом поглощении. Однако, для строгого объяснения этого явления необходимо построить теорию флюктуаций чисел звезд и суммарных их яркостей, вызываемых нерегулярностями в структуре поглощающего слоя. В основу этой теории должна лечь какая либо гипотеза о характере этой иррегулярности. Мы допустим, что эта иррегулярность выражается в клочковатой структуре поглощенного слоя.

К сожалению, теоретический анализ флюктуаций чисел звезд на основе этой гипотезы встречает некоторые трудности чисто математического характера. Зато он может быть успешно проведен для суммарных яркостей звезд, путем обобщения метода Амбарцумяна, который был применен им

при рассмотрении флуктуации поверхностных яркостей в Млечном Пути⁸, поскольку суммарные яркости по существу являются теми же поверхностными яркостями.

Представим Галактику в виде плоско параллельных слоев равной звездной плотности и галактическое пространство равномерно заполнено поглощающими облаками, с постоянной прозрачностью— q . Это значит, что при прохождении света звезд через какое нибудь облако всегда поглощается одна и та же доля света $1-q$.

Обозначим через $n(r)$ число облаков, расположенных в каком нибудь направлении, до расстояния r , тогда ясно, что свет от звезды, находящейся на расстоянии r ослабнет $q^{n(r)}$ раз. Поэтому, если через η обозначим „коэффициент излучения“ галактического пространства (т. е. излучение звезд единичного объема в единичном телесном угле), то полная яркость в слое, простирающемся до расстояния R в каком нибудь направлении будет равна:

$$I = \int_0^R q^{n(r)} \eta dr \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Задача наша заключается в вычислении относительной средне-квадратичной флуктуации величины I . Значения ее мы находим по формуле:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\overline{I^2} - \bar{I}^2}{\bar{I}^2} = \frac{\overline{I^2}}{\bar{I}^2} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Замечая, что среднее интеграла равняется интегралу от средних, из (7) имеем:

$$\bar{I} = \eta \int_0^R \frac{q^{n(r)}}{q} dr \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Среднее значение $q^{n(r)}$ находим по формуле:

$$\overline{q^{n(r)}} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) q^n,$$

где $P(n)$ — вероятность того, что в данном направлении до расстояния r встречается n поглощающих облаков. Значение $P(n)$ определяется законом Пуассона, согласно которому

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}.$$

Поэтому

$$\overline{q^{n(r)}} = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} q^n = e^{-\bar{n}(1-q)},$$

где $\bar{n}$ — среднее число поглощающих облаков до расстояния r . Положив его равным γr (γ — среднее число поглощающих облаков на единицу пути луча) и подставляя полученное значение $\overline{q^{n(r)}}$ в (9), находим:

$$\bar{I} = \gamma \int_0^R e^{-\gamma(1-q)r} dr = \frac{\gamma}{\gamma(1-q)} [1 - e^{-\gamma R(1-q)}],$$

отсюда

$$\bar{I}^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2(1-q)^2} [1 - e^{-\gamma R(1-q)}]^2. \quad (10)$$

Перейдем теперь к определению значения $\bar{I}^2$. Для этого возводим в квадрат (7)

$$\begin{aligned} I^2 &= \gamma^2 \left\{ \int_0^R q^n dr \right\}^2 = \gamma^2 \int_0^R q^{n_1} dr_1 \cdot \int_0^R q^{n_2} dr_2 = \\ &= \gamma^2 \int_0^R \int_0^R q^{n_1 + (n_2 - n_1)} dr_1 dr_2, \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\overline{I^2} = \eta^2 \int_0^R \int_0^R q^{2n_1 + (n_2 - n_1)} dr_1 dr_2 = 2\eta^2 \int_0^R \int_{r_1}^R q^{2n_1 + (n_2 - n_1)} dr_1 dr_2 \quad (11)$$

В последнем выражении $n_2 > n_1$.

Среднее значение $q^{2n_1 + (n_2 - n_1)}$ определяется так, как в работе Амбарцумяна⁸.

$$\begin{aligned} \overline{q^{2n_1 + (n_2 - n_1)}} &= \sum_{n_1, (n_2 - n_1)} P(n_1) P(n_2 - n_1) q^{2n_1 + (n_2 - n_1)} = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} P(n_1) q^{2n_1} \sum_{n_2=n_1+1}^{\infty} P(n_2 - n_1) q^{(n_2 - n_1)}, \quad (12) \end{aligned}$$

где $P(n_1)$ — вероятность того, что на пути луча в данном направлении до расстояния r_1 , встречается n_1 , поглощающих облаков, а $P(n_2 - n_1)$, таким же образом, вероятность того, что от r_1 до r_2 встречается $(n_2 - n_1)$ поглощающих облаков.

По формуле Пуассона имеем:

$$\begin{aligned} P(n_1) &= \frac{\overline{n_1}}{n_1!} e^{-\overline{n_1}}, \\ P(n_2 - n_1) &= \frac{\overline{(n_2 - n_1)}}{(n_2 - n_1)!} e^{-\overline{(n_2 - n_1)}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (12) и замечая, что

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{\overline{n_1}}{n_1!} q^{2n_1} &= e^{\overline{n_1} q^2}, \\ \sum_{n_2=n_1+1}^{\infty} \frac{\overline{(n_2 - n_1)}}{(n_2 - n_1)!} q^{(n_2 - n_1)} &= e^{\overline{(n_2 - n_1)} q}. \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} \overline{q^{2n_1 + (n_2 - n_1)}} &= e^{-\overline{n_1}} e^{\overline{n_1} q^2} e^{-\overline{(n_2 - n_1)}} e^{\overline{(n_2 - n_1)} q} = \\ &= e^{-\overline{n_1} q(1-q)} e^{-\overline{n_2} (1-q)} \end{aligned}$$

или положив $\bar{n}_1 = \nu r_1$ и $\bar{n}_2 = \nu r_2$ (ν имеет прежнее значение)

и подставляя значение $q^{\frac{2n_1 + (n_2 - n_1)}{2}}$ в (11), имеем:

$$\begin{aligned} \bar{I}^2 &= 2\eta^2 \int_0^R e^{-\nu(1-q)r_1} dr_1 \int_{r_1}^R e^{-\nu(1-q)r_2} dr_2 = \\ &= 2\eta^2 \int_0^R e^{-\nu q(1-q)r_1} \left\{ \frac{1}{\nu(1-q)} \left[e^{-\nu(1-q)r_1} - e^{-\nu R(1-q)} \right] \right\} dr_1 = \\ &= \frac{2\eta^2}{\nu(1-q)} \left\{ \frac{1}{\nu(1-q^2)} \left[1 - e^{-\nu R(1-q^2)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\nu q(1-q)} \left[e^{-\nu R(1-q)} - e^{-\nu R(1-q^2)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Производя простое преобразование, окончательно находим

$$\begin{aligned} \bar{I}^2 &= \frac{\eta^2}{\nu^2(1-q)^2} \cdot \frac{2}{q(1+q)} \left\{ q \left[1 - e^{-\nu R(1-q)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[e^{-\nu R(1-q)} - e^{-\nu R(1-q^2)} \right] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} A &= e^{-\nu R(1-q)} \\ B &= e^{-\nu R(1-q^2)} \end{aligned} \quad (14)$$

и подставляя (13) и (9) в (8), получаем:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{2}{q(1+q)} \cdot \frac{q(1-A) - (A-B)}{(1-A)^2} - 1 \quad (15)$$

Таким образом, мы получили выражение относительно средне-квадратичной флуктуации суммарных яркостей звезд, которое зависит от прозрачности поглощающих облаков — q и от их среднего числа на данном расстоянии R .

Поскольку прозрачность — q представляет из себя отношение яркостей звезд после и до прохождения света через какое нибудь облако, то

$$q = \frac{I_1}{I} = (2.512)^{-\varepsilon}$$

или

$$q = 10^{-0.4\varepsilon},$$

где ε является средней оптической толщиной (поглощающая мощность) темных облаков, выраженной в звездных величинах. На основании полученных формул нами были вычислены примеры. Для ε взяты значения: 0^m30 и 0^m20 ; соответствующие значения q будут: 0.7586 и 0.8318. Что же касается значений ν_R , то их находим следующим образом. Для среднего поглощения $\overline{\Delta m}$ на галактической широте β мы имеем:

$$\overline{\Delta m} = 0^m25 \csc \beta,$$

где 0^m25 — среднее поглощение в направлении галактического полюса согласно Hubble'у. С другой стороны, можно положить:

$$\overline{\Delta m} = \nu_R \varepsilon.$$

Повтому

$$\nu_R = \frac{0^m25 \csc \beta}{\varepsilon}.$$

Значения ν_R , вычисленные по этой формуле для разных галактических широт, даны в табл. 9.

Таблица 9

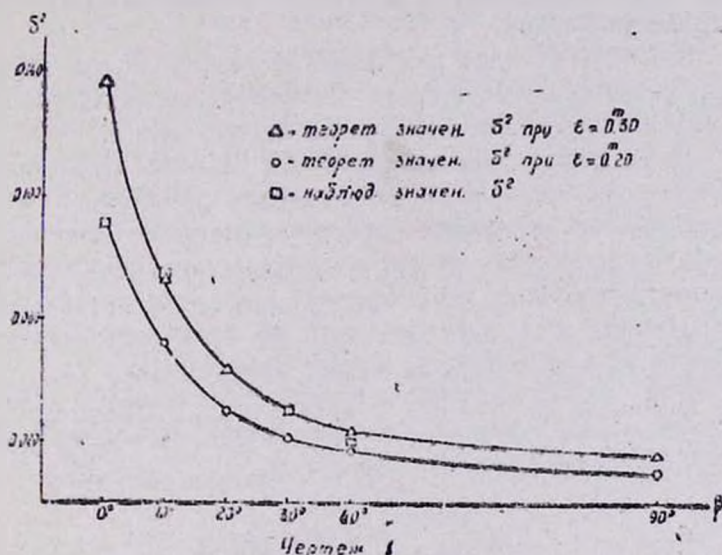
β	0°	10°	20°	30°	40°	90°
ν_R						
0^m30	∞	4,7990	2,4365	1,6667	1,2961	0,8333
0^m20	∞	7,1985	3,6548	2,5000	1,9447	1,2500

Согласно обозначениям (14) по соответствующим значениям q и ν_R были вычислены значения A и B , которые приведены в табл. 10 (см. приложение). После всего этого были определены значения δ^2 по формуле (15), которые приведены в табл. 11.

Таблица 11

β	0°	10°	20°	30°	40°	90°
$0^m 30$	0,187	0,073	0,042	0,030	0,024	0,017
$0^m 20$	0,092	0,052	0,030	0,024	0,017	0,011

Для сопоставления результатов анализов суммарных яркостей звезд, проведенных на основании данных наблюдений и теоретическим путем нанесли на чертеж 1 данные табл. 8 и табл. 11.



Как видно из чертежа 1, наблюдаемые значения $\bar{\sigma}^2$ располагаются между кривыми теоретических значений $\bar{\sigma}^2$ при $\epsilon = 0^m 30$ и $\epsilon = 0^m 20$.

Таким образом, теоретический анализ суммарных яркостей звезд показывает, что установленный анализами подсчетов чисел звезд и суммарных яркостей их — факт возрастания средней квадратичной флуктуации с убыванием галактической широты целиком объясняется гипотезой о дискретной (клочковатой) структуре поглощающего слоя.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ ЧИСЕЛ ЗВЕЗД

В этой главе мы делаем попытку вычислить теоретическим путем флюктуации в видимом распределении звезд, происходящие от клочковатости поглощающего слоя. При этом нами рассматривается только случай весьма низких галактических широт.

В этом случае мы для простоты расчета можем предположить, что пространственная плотность звезд вдоль луча зрения постоянна при удалении до бесконечности.

То же самое предположение мы делаем относительно плотности распределения поглощающих облаков. Хотя на больших расстояниях обе указанные плотности несомненно сильно меняются, все же это обстоятельство слабо скажется на вычисленных ниже теоретических значениях средних чисел звезд, потому что, вследствие того же космического поглощения, отдаленные области играют малую роль.

§ 1. *Приближенное решение.* Как известно, число звезд до данной величины m определяется первым интегральным уравнением звездной статистики:

$$N(m) = \omega \int_0^{\infty} D(r) \varphi(m) r^2 dr, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Где ω — телесный угол, под которым видна изучаемая часть неба, r — расстояние, $D(r)$ — звездная плотность, m — абсолютная величина звезд, $\varphi(m)$ — функция светимости.

Допустим, что плотность распределения звезд постоянна вдоль луча зрения, т. е. $D(r) = D_0 = \text{const.}$ Кроме этого, предположим, что функцию светимости можно выразить следующим образом:

$$\Phi(m) = e^{\lambda_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

где λ параметр, значение которого определяется данными наблюдений. Это предположение относительно функции светимости; безусловно, не отражает истинный характер $\varphi(m)$, его можно считать правильным в лучшем случае лишь в некотором интервале абсолютных величин. Однако, поскольку мы интересуемся в основном не вычислением $N(m)$, а лишь вычислением флуктуаций этой величины, принятие (2) вряд ли может сказать существенное влияние на результат, если только будет подобрано подходящее значение λ .

Абсолютная величина звезд — m у нас, ради простоты, определяется через стандартное расстояние в один парсек. При определении абсолютной величины через видимую учитывается межзвездное поглощение. Что касается характера межзвездного поглощения, то, как уже было сказано, предполагается, что оно имеет исключительно клочковатый характер. Поэтому абсолютная величина звезд определяется следующей формулой:

$$m = m_0 - 5 \lg r - \varepsilon n(r),$$

где $n(r)$ число поглощающих туманностей на пути луча в данном направлении до расстояния r , которое, очевидно, будет принимать случайные значения, а ε — оптическая толщина туманностей, производящих общее галактическое поглощение. Мы принимаем при этом, что ε — одно и то же для всех туманностей.

Подставляя значение m в (2) и замечая, что

$$e^{-5\lambda \lg r} = r^{-5\lambda \lg e},$$

имеем:

$$\Phi(m) = e^{\lambda m - \lambda \varepsilon n(r)} r^{-5\lambda \lg e}.$$

Подставляя в (1) значения $\Phi(m)$ и $D(r) = D_0$, получаем:

$$N(m) = \omega D_0 e^{\lambda m} \int_0^{\infty} e^{\lambda \varepsilon n(r)} r^{2-5\lambda \lg e} dr. \quad (3)$$

Таким образом, для чисел звезд до данной величины m получилось выражение, которое зависит от многих характе-

ристик, однако, это не мешает нам, как это видно будет дальше, пользоваться им для вывода формулы относительной средне-квадратичной флуктуации.

Как мы видели в I главе, относительная средне-квадратичная флуктуация величины $N(m)$ определяется через $\overline{N(m)}$ и $\overline{N(m)^2}$. Перейдем к их вычислению.

Вычислим $\overline{N(m)}$.

Замечая, что среднее значение суммы равняется сумме средних значений слагаемых, из (3) имеем:

$$\overline{N(m)} = \omega D_0 e^{\lambda m} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s n(r)}}{r^{2-s} l g e} dr \quad (4)$$

Среднее значение данной величины с $e^{-\lambda s n(r)}$ определяется через

$$e^{-\lambda s n} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{-\lambda s n},$$

где $P(n)$ — вероятность того, что на пути луча, в данном направлении до расстояния r встречается n поглощающих туманностей. По формуле Пуассона имеем:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}},$$

где $\bar{n}$ — среднее число туманностей на пути луча, до расстояния r . Подставляя значение $P(n)$ в выражение $e^{-\lambda s n}$, находим:

$$e^{-\lambda s n} = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\bar{n} e^{-\lambda s} \right]^n = e^{-\bar{n}} e^{\bar{n} e^{-\lambda s}} = e^{-\bar{n} (1 - e^{-\lambda s})}.$$

Заменяя здесь $\bar{n}$ через γr , где γ — среднее число поглощающих туманностей на единицу пути луча, и подставляя в (4), получаем:

$$\overline{N(m)} = \omega D_0 e^{-\lambda m} \int_0^{\infty} r^{z-5\lambda lge} e^{-\gamma(1-e^{-\lambda r})} r dr$$

или

$$\overline{N(m)} = \omega D_0 e^{\lambda m} \int_0^{\infty} r^{z-1} e^{-br} dr, \quad (5)$$

где

$$z = 3 - 5\lambda lge, \quad b = \gamma(1 - e^{-\lambda}) \quad (6)$$

Пользуясь эйлеровым интегралом II рода, мы можем написать:

$$\int_0^{\infty} r^{z-1} e^{-br} dr = b^{-z} \Gamma(z),$$

причем должно соблюдаться следующее условие:

$$z > 0, \quad \text{т. е. } 3 - 5\lambda lge > 0$$

или

$$\lambda < \frac{3}{5\lambda lge} = 1,39.$$

Это неравенство у нас полностью соблюдается (как видно будет дальше, λ значительно меньше единицы).

Подставляя значение интеграла в (5), окончательно получаем:

$$\overline{N(m)} = \omega D_0 e^{\lambda m} b^{-z} \Gamma(z), \quad (7)$$

отсюда

$$\overline{N(m)}^2 = \omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} b^{-2z} \Gamma^2(z) \quad (8)$$

Вычислим теперь $\overline{N(m)^2}$.

Возводя в квадрат (3), имеем:

$$N(m)^2 = \omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} r^{z-1} dr \right\}^2$$

или

$$N(m)^2 = \omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda z(s+t)} x^{z-1} y^{z-1} dx dy,$$

где s и t представляют значения n , соответствующие x и y .
Беря среднее по различным значениям s и t , находим:

$$\overline{N(m)^2} = \omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda z(s+t)} x^{z-1} y^{z-1} dx dy \quad (9)$$

Среднее значение $e^{-\lambda z(s+t)}$ находим методом В. А. Амбарцумяна, о котором упоминали при теоретическом анализе суммарных яркостей звезд.

Допустим, что $t > s$, тогда

$$\begin{aligned} \overline{e^{-\lambda z(s+t)}} &= \sum_{s, (t-s)} P(s) P(t-s) e^{-\lambda z(s+t)} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} P(s) e^{-2\lambda s} \sum_{(t-s)=0}^{\infty} P(t-s) e^{-\lambda z(t-s)}, \end{aligned}$$

где $P(s)$ — вероятность того, что на пути луча в данном направлении до расстояния x встречается s поглощающих облаков, а $P(t-s)$, таким же образом, вероятность того, что на пути луча в данном направлении от расстояния x до расстояния y встречается $t-s$, поглощающих облаков.

Эти вероятности определяются по формуле Пуассона:

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{\bar{s}^s}{s!} e^{-\bar{s}} \\ P(t-s) &= \frac{(\overline{t-s})^{(t-s)}}{(t-s)!} e^{-\overline{t-s}} \end{aligned}$$

Подставляя значения $P(s)$ и $P(t-s)$ в выражение $\overline{e^{-\lambda z(s+t)}}$

и замечая, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left[\bar{s} e^{-2\lambda z} \right]^s = e^{\bar{s}} e^{-2\lambda z}$$

$$\sum_{(t-s)=0}^{\infty} \frac{1}{(t-s)!} \left[\overline{(t-s)} e^{-\lambda z} \right]^{(t-s)} = e^{\overline{(t-s)}} e^{-\lambda z}$$

находим:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda z(s+t)} &= e^{-\bar{s}} e^{-\bar{s}} e^{-2\lambda z} e^{-\overline{(t-s)}} e^{-\overline{(t-s)}} e^{-\lambda z} = \\ &= e^{-\bar{s}} e^{-\lambda z} (1 - e^{-\lambda z}) e^{-\bar{t}} (1 - e^{-\lambda z}) \end{aligned}$$

Заменяя здесь $\bar{s}$ и $\bar{t}$ соответственно через νx и νy (ν — прежнему среднее число поглощающих туманностей на единицу пути луча) и $\nu(1 - e^{-\lambda z})$ — через b , согласно обозначения (6), окончательно будем иметь:

$$e^{-\lambda z(s+t)} = e^{-b e^{-\lambda z} x} e^{-b y}$$

Подставляя это в (9) и замечая, что входящий в эту формулу двойной интеграл равен удвоенному двойному интегралу, распространенному на область $y > x$, находим:

$$\overline{N(m)}^2 = 2\omega^2 D_0 e^{2\lambda z} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-b e^{-\lambda z} x} dx \int_x^{\infty} y^{z-1} e^{-by} dy$$

или изменив порядок интегрирования и замечая, что во внутреннем интеграле x будет меняться от нуля до y , получаем:

$$\overline{N(m)}^2 = 2\omega^2 D_0^2 e^{2\lambda z} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-by} dy \int_0^y x^{z-1} e^{-b e^{-\lambda z} x} dx.$$

Учитывая малость z , можно приближенно написать:

$$e^{-\lambda z} = 1 - \lambda z + \frac{\lambda^2 z^2}{2}.$$

Поэтому

$$e^{-be^{-\lambda z}x} = e^{-bx} e^{b\lambda x} e^{-\frac{b\lambda^2 x^2}{2}}.$$

Разлагая теперь в ряд $e^{b\lambda x}$ и $e^{-\frac{b\lambda^2 x^2}{2}}$ и пренебрегая членами, содержащими ε^3 , находим:

$$e^{-be^{-\lambda z}x} = e^{-bx} [1 + b(\lambda\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon^2)x + \frac{1}{2}b^2\lambda^2\varepsilon^2x^2].$$

Подставляя полученное значение $e^{-be^{-\lambda z}x}$ в (10), находим с точностью до величины второго порядка по отношению к ε :

$$\begin{aligned} \overline{N(m)}^2 = 2\omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} & \left\{ \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-by} dy \int_0^y x^{\alpha-1} e^{-bx} dx + \right. \\ & + b(\lambda\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon^2) \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-by} dy \int_0^y x^\alpha e^{-bx} dx + \\ & \left. + \frac{1}{2}b^2\lambda^2\varepsilon^2 \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-by} dy \int_0^y x^{\alpha+1} e^{-bx} dx \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Интегрируя по частям во внутренних интегралах второго и третьего членов правой части, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^y x^\alpha e^{-bx} dx &= -\frac{1}{b} y^\alpha e^{-by} + \frac{\alpha}{b} \int_0^y x^{\alpha-1} e^{-bx} dx, \\ \int_0^y x^{\alpha+1} e^{-bx} dx &= -\frac{1}{b} y^{\alpha+1} e^{-by} + \frac{\alpha+1}{b} \int_0^y x^\alpha e^{-bx} dx = \\ &= -\frac{1}{b} y^{\alpha+1} e^{-by} - \frac{\alpha+1}{b^2} y^\alpha e^{-by} + \frac{(\alpha+1)\alpha}{b^2} \int_0^y x^{\alpha-1} e^{-bx} dx. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения интегралов в (11) и объединяя члены, содержащие одинаковые интегралы, находим:

$$\begin{aligned} \overline{N(m)^2} = \omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} & \left\{ \left[1 + \alpha \left(\lambda \varepsilon - \frac{1}{2} \lambda^2 \varepsilon^2 \right) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} (\alpha + 1) \alpha \lambda^2 \varepsilon^2 \left. \right] \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-by} dy \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-bx} dx - \\ & - 2 \left[\lambda \varepsilon - \frac{1}{2} \lambda^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{2} (\alpha + 1) \lambda^2 \varepsilon^2 \right] \int_0^\infty y^{2\alpha-1} e^{-2by} dy - \\ & \left. - b \lambda^2 \varepsilon^2 \int_0^\infty y^{2\alpha} e^{-2by} dy \right\}. \end{aligned}$$

Определяя значения входящих сюда интегралов с помощью Эйлерова интеграла II рода, имеем:

$$\begin{aligned} \overline{N(m)^2} = \omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} & \left\{ \left[1 + \alpha \lambda \varepsilon + \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 \varepsilon^2 \right] b^{-2\alpha} \Gamma(\alpha)^2 - \right. \\ & \left. - 2 \left[\lambda \varepsilon + \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \varepsilon^2 \right] (2b)^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha) - b \lambda^2 \varepsilon^2 (2b)^{-(2\alpha+1)} \Gamma(2\alpha+1) \right\}. \end{aligned}$$

По теореме умножения Гауса¹⁰ имеем:

$$\Gamma(2\alpha) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}),$$

$$\Gamma(2\alpha+1) = 2\alpha \Gamma(2\alpha) = \alpha \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}).$$

Подставляя значения $\Gamma(2\alpha)$ и $\Gamma(2\alpha+1)$ и производя простые преобразования, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \overline{N(m)^2} = \omega^2 D_0^2 e^{2\lambda m} b^{-2\alpha} \Gamma(\alpha) & \left\{ \left[1 + \alpha \lambda \varepsilon + \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 \varepsilon^2 \right] \Gamma(\alpha) - \right. \\ & \left. - [\lambda \varepsilon + \alpha \lambda^2 \varepsilon^2] \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12) \end{aligned}$$

Как мы видели в главе I, интересующая нас относительная средняя квадратичная флуктуация величины $N(m)$ определяется выражением

$$\delta^2 = \frac{\overline{N(m)^2}}{\overline{N(m)}^2} - 1.$$

Подставляя сюда значения $\overline{N(m)}$ и $\overline{N(m)^2}$ из (8) и (12), находим:

$$\delta^2 = \alpha \lambda \varepsilon + \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 \varepsilon^2 - [\lambda \varepsilon + \alpha \lambda^2 \varepsilon^2] \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)},$$

отсюда

$$\delta^2 = \lambda \left[\alpha - \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \right] \varepsilon + \alpha \lambda^2 \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \right] \varepsilon^2 \quad (13)$$

Таким образом, как мы видим, относительная средняя квадратичная флуктуация чисел звезд до данной величины $m - N(m)$, не зависит от звездной величины m , а также и от числа поглощающих облаков, а зависит лишь от их средней оптической толщины ε и от параметра λ (α выражается через λ , согласно обозначению (6): $\alpha = 3 - 5\lambda \lg e$). Значения λ определяются из данных подсчетов звезд, что же касается гамма-функций, то их значения для соответствующих λ находим из таблиц.

Значения δ^2 нами были вычислены в § 1 главы I на основании данных наблюдений, поэтому уравнение (13) дает возможность определить значение средней оптической толщины поглощающих туманностей, т. е. ε .

С этой целью определим значение λ . Из уравнения (7) имеем:

$$\frac{\overline{N(m+1)}}{\overline{N(m)}} = e^\lambda.$$

Логарифмируя, находим:

$$\lambda = \frac{\lg \overline{N(m+1)} - \lg \overline{N(m)}}{\lg e}$$

Разности $[\lg \overline{N(m+1)} - \lg \overline{N(m)}]$ составляются по данным тех

же подсчетов, на основании которых были вычислены δ^2 (см. табл. 4). Значения $\lg \overline{N(m)}$ и $[\lg \overline{N(m+1)} - \lg \overline{N(m)}]$ для I и II групп приведены в таблице 12.

Таблица 12

m		12	13	14	15	16	17	18
$\lg \overline{N(m)}$	I гр.	1,544	1,903	2,233	2,550	2,870	3,217	3,604
	II гр.	1,483	1,839	2,201	2,579	2,942	3,310	3,614
$\lg \overline{N(m+1)} -$ $-\lg \overline{N(m)}$	I гр.	0,359	0,330	0,317	0,320	0,377	0,357	—
	II гр.	0,356	0,362	0,378	0,363	0,368	0,304	—

Беря среднее арифметическое от разностей по группам и деля на $\lg e = 0,434$, находим:

$$\lambda_{I \text{ гр.}} = 0.790$$

$$\lambda_{II \text{ гр.}} = 0.818.$$

Соответственно для гамма-функций из таблиц¹¹ находим:

Таблица 13

Г р у п п а	I	II
α	1,296	1,225
$\Gamma(\alpha)$	0,800	0,912
$\Gamma(\alpha + 1/2)$	0,928	0,914

Подставляя соответствующие значения: δ^2 из табл. 6 и λ в (13) и производя необходимые вычисления, имеем:

$$0,085 = 0,556 \varepsilon_{I \text{ гр.}} + 0,049 \varepsilon_{II \text{ гр.}}$$

$$0,071 = 0,539 \varepsilon_{I \text{ гр.}} + 0,030 \varepsilon_{II \text{ гр.}}$$

Решая эти квадратичные уравнения, получаем:

$$\varepsilon_{I \text{ гр.}} = 0^m 15$$

$$\varepsilon_{II \text{ гр.}} = 0^m 13$$

§ 2. Точное решение. В § 1 при определении теоретического значения $\overline{N(m)}^2$ мы разлагали в ряд $e^{-\lambda x}$, а также $e^{b\lambda x}$ и $e^{-\frac{1}{2} b\lambda^2 x}$ и ограничивались величинами второго порядка по отношению к ε , которая считалась малой величиной.

В этом параграфе попытаемся избежать этого и задачу решить для любого возможного значения ε . Как увидим, результат выражается с помощью интеграла, не сводящегося к элементарным функциям. Из (8) и (10), соответственно имеем:

$$\overline{N(m)}^2 = \left[\omega D_0 e^{\lambda m} b^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \right]^2 \quad . \quad (14)$$

$$\overline{N(m)}^2 = 2 \left(\omega D_0 e^{\lambda m} \right)^2 \int_0^\infty \int_0^y e^{-(\alpha x + by)} x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} dx dy, \quad (15)$$

где

$$\alpha = 3 - 5\lambda l g \varepsilon, \quad b = v \left(1 - e^{-\lambda \varepsilon} \right), \quad a = v e^{-\lambda \varepsilon} \left(1 - e^{-\lambda \varepsilon} \right).$$

Рассмотрим двойной интеграл, входящий в (15)

$$f(a, b, \alpha) = \int_0^\infty \int_0^y e^{-(\alpha x + by)} x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} dx dy.$$

Положим $\alpha x = t$, тогда

$$a^\alpha f(a, b, \alpha) = \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(t+by)} t^{\alpha-1} y^{\alpha-1} dt dy,$$

дифференцируя по a , находим:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[a^\alpha f(a, b, \alpha) \right] = \int_0^\infty e^{-by} y^\alpha dy \frac{\partial}{\partial (ay)} \int_0^{ay} e^{-t} t^{\alpha-1} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-by} y^{\alpha} \left[e^{-t} t^{\alpha-1} \right]_{t=ay}^{\infty} dt = a^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-(a+b)y} y^{2\alpha-1} dy = \\ = a^{\alpha-1} (a+b)^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha),$$

таким образом

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[a^{\alpha} f(a, b, \alpha) \right] = a^{\alpha-1} (a+b)^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha),$$

отсюда находим:

$$a^{\alpha} f(a, b, \alpha) = \Gamma(2\alpha) \int_0^a u^{\alpha-1} (b+u)^{-2\alpha} du + C.$$

Нетрудно видеть, что $C = 0$. На самом деле

$$C = \lim_{a \rightarrow 0} \left[a^{\alpha} f(a, b, \alpha) \right] = 0,$$

повтому

$$f(a, b, \alpha) = \Gamma(2\alpha) a^{-\alpha} \int_0^a u^{\alpha-1} (b+u)^{-2\alpha} du.$$

Положим теперь $u = az$ и заметим, что $a = be^{-\lambda z}$, тогда

$$f(a, b, \alpha) = b^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha) \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{\left(1 + e^{-\lambda z} z\right)^{2\alpha}}.$$

Подставляя значение $f(a, b, \alpha)$ в (15), получаем:

$$\overline{N(m)}^2 = \left(\omega D_0 e^{\lambda m} b^{-\alpha} \right)^2 2\Gamma(2\alpha) \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{\left(1 + e^{-\lambda z} z\right)^{2\alpha}}. \quad (16)$$

Беря отношение $\overline{N(m)}^2$ к $\overline{N(m)}$ соответственно из (16) и (14),

находим:

$$\frac{\overline{N(m)^2}}{\overline{N(m)}^2} = \frac{2\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2} \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{\left(1 + e^{-\lambda z} z\right)^{2\alpha}}$$

По теореме умножения Гаусса¹⁰, имеем:

$$\Gamma(2\alpha) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}),$$

повтому

$$\frac{\overline{N(m)^2}}{\overline{N(m)}^2} = \frac{2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{\left(1 + e^{-\lambda z} z\right)^{2\alpha}}$$

Обозначая входящий сюда интеграл, который не сводится к элементарным функциям, через $\Phi(\lambda, \varepsilon)$, для относительной средне-квадратичной флуктуации числ звезд, окончательно получаем:

$$\delta^2 = \frac{2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \Phi(\lambda, \varepsilon) - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Заметим между прочим, что относительная средне-квадратичная флуктуация величины $N(m)$ при $\varepsilon=0$ должна равняться нулю. Это на самом деле имеет место, так как

$$\Phi(\lambda, 0) = \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{(1+z)^{2\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}{2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}^{12}$$

Ввиду этого отношение $\frac{\overline{N(m)^2}}{\overline{N(m)}^2}$ равняется единице при $\varepsilon=0$.

Таким образом, и в этом случае относительная средне-квадратичная флуктуация чисел звезд до данной величины $m - N(m)$ не зависит от звездной величины m , а также от числа поглощающих туманностей (на единицу пути луча), а зависит лишь от их средней оптической толщины — ε и от параметра λ (значение которого определили в § 1).

Пользуясь данными таблиц Шпильрейна¹¹ для коэффициента при $\Phi(\lambda, \varepsilon)$ в уравнении (17), находим:

$$\frac{2^{2x} \Gamma(x + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(x)} = 3.4433.$$

Значение же $\Phi(\lambda, \varepsilon)$ определяется путем численного интегрирования по формуле Симпсона, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{b-a}{6n} \left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 4(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \dots + y_{\frac{n-1}{2}}) + y_n \right],$$

где n — число, на которое делится интервал интегрирования, а $y_0, y_{\frac{1}{2}}, y_1, \dots, y_{\frac{n-1}{2}}, y_{n-1}, y_n$ — значения подинтегральной

функции $f(x)$ в соответствующих точках. При вычислении значений подинтегральной функции в (16) для средней оптической толщины поглощающих облаков — ε принимаем следующие значения: $0^m30, 0^m20, 0^m18, 0^m15$ и 0^m10 . Соответствующие значения подинтегральной функции для всех случаев значения ε приведены в табл. 14 (см. приложение).

Значения $\Phi(\lambda, \varepsilon)$, вычисленные по формуле Симпсона на основании данных табл. 14 а также значения δ^2 , вычисленные по формуле (17), приведены в табл. 15.

Таблица 15

ε	0^m30	0^m20	0^m18	0^m15	0^m10
$\Phi(\lambda, \varepsilon)$	0,9363	0,9199	0,9163	0,9114	0,9032
δ^2	0,159	0,101	0,086	0,071	0,044

Сопоставляя значения δ^2 , выведенных теоретическим путем (табл. 17) и из данных наблюдений для 0^0 галактической широты (табл. 7, гр. I и VII) *, находим, что теоретические

* Значение λ для VII группы того же порядка, что и для I группы.

значения хорошо совпадают с его значениями, вычисленными по данным наблюдений при значениях $z = 0^m 18$ и $0^m 25$. Поэтому мы приходим к следующему очевидному выводу: средняя оптическая толщина поглощающих облаков, обуславливающих космическое поглощение, выраженная в звездных величинах, порядка $0^m 18$, за исключением тех мест в Галактике, где имеются большие темные туманности, для которых она порядка $0^m 25$ (т. к. площадки VII группы приходятся на область большой темной туманности в созвездии Возничего).

§ 3. *Дополнительные замечания к теории флюктуаций чисел звезд и поверхностных яркостей.* Как мы уже упоминали выше, Амбарцумян разработал теорию флюктуаций яркостей в Млечном Пути. Предполагая, что вся экваториальная плоскость Галактики с равномерной плотностью заполнена до бесконечности звездами и поглощающими облаками с одинаковыми прозрачностями q (так, что при прохождении света звезды через какое нибудь облако всегда поглощается одна и та же доля света $1-q$), он для относительного значения среднего квадратичного отклонения яркости от ее среднего значения получил следующую формулу:

$$\delta^2(l) = \frac{1-q}{1+q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

При выводе формулы (17), связывающей флюктуации чисел звезд с характеристиками поглощающих облаков были сделаны те же предположения о распределении облаков и звезд, что и при выводе формулы (18). Однако, о функции светимости при выводе (7) было сделано весьма специальное предположение.

В настоящем параграфе мы покажем, что можно получить некоторые соотношения, косвенно характеризующие флюктуации в числах звезд, без каких либо специальных предположений о функции светимости.

Для числа звезд данной величины m мы имеем при сделанных предположениях о плотности звезд и облаков

$$A(m) = \omega D_0 \int_0^{\infty} \varphi(m) r^2 dr \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

где $\varphi(m)$ — «дифференциальная» функция светимости и
 $m = m - 5 \lg r - \varepsilon n(r)$.

Помножая обе стороны (19) на $e^{-\lambda m}$ и интегрируя и обозначая результат через $a(\lambda)$, находим:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(m) e^{-\lambda m} dm = \omega D_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda m} dm \int_0^{\infty} \varphi[m - 5 \lg r - \\ &\quad - \varepsilon n(r)] r^2 dr = \\ &= \omega D_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda[5 \lg r + \varepsilon n(r)]} r^2 dr \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[m - 5 \lg r - \\ &\quad - \varepsilon n(r)] e^{-\lambda[m - 5 \lg r - \varepsilon n(r)]} dm = \\ &= \omega D_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda \varepsilon n(r)} r^{2-5\lambda \lg e} dr \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(m) e^{-\lambda m} dm \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(m) e^{-\lambda m} dm; \\ \alpha(\lambda) &= \omega D_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \varepsilon n(r)} r^{2-5\lambda \lg e} dr. \end{aligned}$$

Тогда

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(m) e^{-\lambda m} dm = \psi(\lambda) \alpha(\lambda), \quad (20)$$

причем, из двух множителей в правой части только второй принимает случайные значения, зависящие от случайного расположения поглощающих облаков, а первый множитель имеет определенное значение.

В связи с этим относительное значение средне-квадратичной флуктуации $a(\lambda)$ будет, очевидно, равно отношению значению средне-квадратичной флуктуации $x(\lambda)$. С другой стороны $x(\lambda)$, с точностью до множителя типа $\lim$ совпадает с правой частью формулы (3), для которой было вычислено относительное значение средне-квадратичной флуктуации, представляемое формулой (17). Следовательно, та же формула описывает средне-квадратичную флуктуацию $\delta^2[a(\lambda)]$ величины $a(\lambda)$, т. е.

$$\delta^2[a(\lambda)] = \frac{2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \Phi(\lambda, \varepsilon) - 1, \quad (21)$$

где

$$\Phi(\lambda, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{z^{\alpha-1} dz}{(1 + e^{-\lambda z} z)^{2\alpha}}.$$

Преобразуем теперь этот интеграл, положив в нем:

$$z = e^{-\lambda x} \operatorname{tg}^2 x.$$

После простых преобразований находим:

$$\Phi(\lambda, \varepsilon) = 2^{2-2\alpha} e^{\alpha \lambda \varepsilon} \int_0^{\operatorname{arctg} e^{-\frac{1}{2} \lambda \varepsilon}} \sin^{2\alpha-1} 2x dx$$

или положив $2x = y$, находим:

$$\Phi(\lambda, \varepsilon) = 2^{1-2\alpha} e^{\alpha \lambda \varepsilon} \int_0^{2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{1}{2} \lambda \varepsilon}} \sin^{2\alpha-1} y dy.$$

Подставляя это в уравнении (20), будем иметь:

$$\delta^2[a(\lambda)] = \frac{2\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} e^{\alpha \lambda \varepsilon} \int_0^{2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{1}{2} \lambda \varepsilon}} \sin^{2\alpha-1} y dy - 1 \quad (22)$$

Интеграл в последнем уравнении берется в конечном виде лишь для некоторых значений λ , из коих нас в данном случае интересует в частности значение $\lambda = \frac{0.1}{\lg e}$, т. к. при этом значении $a(\lambda)$, очевидно, превращается в суммарную яркость звезд I и мы вправе ожидать, что при $\lambda = \frac{0.1}{\lg e}$ уравнение (20) нам даст уравнение (18).

При $\lambda = \frac{0.4}{\lg e}$, $\alpha=1$ (т. к. $\alpha=3-5\lambda\lg e$) и мы получаем:

$$\begin{aligned} \delta^2(I) &= \frac{2\Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1)} e^{\frac{0.4}{\lg e} \arctg e^{-\frac{0.2}{\lg e}}} \int_0^{\frac{0.4}{\lg e} \arctg e^{-\frac{0.2}{\lg e}}} \sin y \, dy - 1 = \\ &= 10^{0.4} \left[1 - \cos^2 \arctg 10^{-0.2} + \sin^2 \arctg 10^{-0.2} \right] - 1 = \\ &= 10^{0.4} \left[1 - \frac{1}{1+10^{-0.4}} + \frac{10^{-0.4}}{1+10^{-0.4}} \right] - 1 = \\ &= \frac{1-10^{-0.4}}{1+10^{-0.4}} = \frac{1-q}{1+q}. \end{aligned}$$

Таким образом мы нашли:

$$\delta^2(I) = \frac{1-q}{1+q}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

т. е. мы получили опять формулу (18).

Однако, формула (22) дает возможность получить значения средне-квадратичной флюктуации не только для поверхностей яркости, но и для более широкого класса величин $a(\lambda)$, характеризующих наблюдаемую функцию $A(m)$.

Представляет интерес сравнение результатов теории флюктуации чисел звезд, развитой в предыдущем параграфе и теории флюктуации яркостей в Млечном Пути.

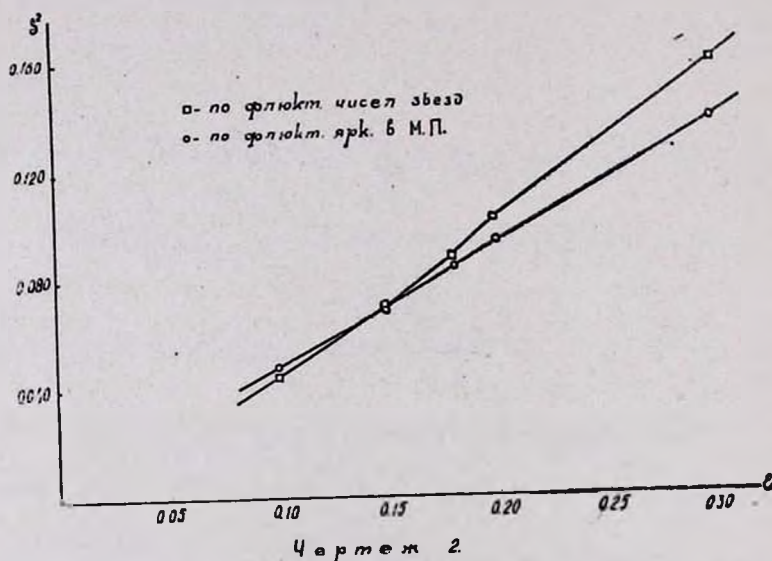
Давая те же значения при которых по формуле (17) были вычислены $\delta^2[N(m)]$ (эти данные приведены в табл. 17),

вычислили и $\delta^2 [I]$ по формуле (21); эти значения приведены в табл. 18.

Таблица 18

ε	$0^m 30$	$0^m 20$	$0^m 18$	$0^m 15$	$0^m 10$
$\delta^2 [I]$	0,137	0,092	0,083	0,069	0,046

Для сопоставления результатов обеих теорий мы на-
несли на чертеж 2 данные таблиц 17 и 18.



Из чертежа видно, что в пределах от $\varepsilon = 0^m 10$ до $\varepsilon = 0^m 30$ величины относительных средне-квадратичных отклонений $\delta [I]$ и $\delta [N(m)]$ очень близки друг к другу, т. е. относительные значения дисперсий поверхностных яркостей и чисел звезд должны мало отличаться друг от друга.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе настоящей работы мы дали анализ подсчетов чисел звезд и суммарных их яркостей на основании данных наблюдений. В качестве характеристики флюктуаций в обоих случаях рассматривалось средне-квадратичное отклонение. После подробного анализа и исключения влияний естественных колебаний и возможных ошибок в предельных звездных величинах (которые могут обусловить небольшую часть наблюдаемых иррегулярностей в подсчетах чисел звезд), мы установили весьма интересный факт, заключающийся в том, что относительные средне-квадратичные флюктуации чисел звезд и суммарных их яркостей сильно возрастают по мере уменьшения галактических широт. После всего этого, считая весьма вероятным, что упомянутые иррегулярности вызываются, главным образом, флюктуациями в космическом поглощении и принимая гипотезу о клочковатости поглощающего слоя, мы дали теоретический анализ флюктуаций суммарных яркостей звезд.

Результат этого анализа нас приводит к выводу, что установленный анализами подсчетов чисел звезд и суммарных их яркостей факт возрастания средне-квадратичной флюктуации с убыванием галактической широты довольно хорошо объясняется гипотезой о клочковатой структуре поглощающего слоя.

Во второй главе построена теория флюктуаций чисел звезд, вызываемых иррегулярностями в структуре поглощающего слоя. В основу этой теории легла гипотеза о клочковатой структуре поглощающего слоя. При этом поставленный вопрос был решен сначала приближенно (считая ϵ маленькой величиной, мы ограничивались величинами второго порядка по отношению к ϵ), а затем точно, т. е. при любом возможном значении ϵ , однако, при этом результат выражался уже с помощью интеграла, не сводящегося к элементарным функциям.

В обоих случаях почучены формулы, связывающие относительное значение средне-квадратичных флюктуаций чисел звезд с характеристиками поглощающих облаков. По этим

формулам было определено среднее значение оптической толщины — в поглощающих облаков, совокупность которых обуславливает космическое поглощение.

Первая оценка оптической толщины одного поглощающего облака — $0^m.18$, полученная нами по данным ван-Райна, меньше, чем оценка — $0^m.274$, полученная В. А. Амбарцумяном на основании анализа флуктуаций в числе внегалактических туманностей². Вторая оценка — $0^m.25$, полученная нами по подсчетам звезд в областях больших темных туманностей, довольно близка к оценке Амбарцумяна. Замечая, что разница между первой и второй оценками небольшая, можно заключить, что анализ флуктуаций чисел звезд для средней оптической толщины поглощающих облаков, выраженная в звездных величинах, дает величину несколько меньшую, чем оценка Амбарцумяна.

Однако, следует отметить, что оптическая толщина отдельных конкретных туманностей может отличаться от их среднего значения довольно сильно.

В заключение считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность В. А. Амбарцумяну за те ценные указания и советы, которые им делались при выполнении настоящей работы.

Ереван, 1944, май.

The Fluctuations in the Apparent Distribution of the Stars and the Cosmic Absorption

B. E. Markarian

(Abstract)

The fluctuations in the observed star numbers on the different galactic latitudes are studied. The relative magnitude of these fluctuations decreases with the increasing galactic latitude. A theory of the fluctuations of the star numbers is developed based on Ambarzumian's ideas about the cloud-structure of the absorbing layer in the Galaxy.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bulletin Abast. Obser. № 2, 1938.
2. Бюлл. Абаст. Обсерв. № 4, 1910.
3. Gron. Publ. № 43, 1929.
4. Известия Пулк. Обсерв. № 133, том XVI, 4, 1941.
5. „Analysis of the Milky Way in Auriga, Ast. Journal, vol. 94, 1941.
6. В. И. Гливенко. „Курс теории вероятностей“, 1930.
7. Publ. Tartu, 1924.
8. Бюлл. Абаст. Обсерв. (в печати).
9. Р. О. Кузьмин „Бесселевы функции“, 1935
10. П. Л. Чебышев. „Теория вероятностей“, 1936.
11. Я. Н. Шпильрейн. „Таблицы специальных функций“, часть I, 1933.
12. Е. Янке и Ф. Эмде. „Таблицы функций с формулами и кривыми“, 1934.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Таблица 1

Группа I	№ № площадей	8	9	19	24	25	40	64	74	87	98	123	—	Редуцированы к координатам
	β λ	—4° 80°	0° 105°	—2° 78°	—3° 126°	+5° 132°	0° 51°	0° 33°	—2° 161°	+3° 16°	—2° 179°	—2° 195°	— —	0° 100°
Группа II	№ № пл-к	2	10	23	39	41	63	65	75	88	111	124	135	—
	β λ	+11° 87°	+10° 117°	—10° 117°	+9° 46°	—8° 59°	+11° 28°	—11° 41°	+11° 168°	—10° 22°	—9° 4°	+10° 203°	—10° 348°	±10° 100°
Гр. III	№ № пл-к	4	37	46	52	67	72	85	96	108	121	—	—	—
	β λ	+29° 107°	+29° 98°	—30° 113°	+31° 158°	—28° 62°	—28° 144°	+30° 3°	—28° 165°	+32° 342°	—29° 83°	— —	— —	±30° 100°
Гр. IV	№ № пл-к	5	12	35	36	71	91	95	101	120	127	131	—	—
	β λ	+40° 92°	+38° 123°	+40° 41°	+40° 39°	—38° 133°	—43° 56°	—41° 156°	+39° 202°	—43° 177°	+42° 236°	+38° 313°	— —	±40° 130°
Гр. V	№ № пл-к	1	2	3	4	5	8	9	12	14	16	—	—	—
	β λ	—7°5 156°3	—10°8 155°7	—11°5 158°7	—13°1 163°9	—11°0 162°4	—8°1 159°5	—8°5 162°0	—9°6 167°3	—12°0 172°4	—7°0 166°5	— —	— —	—10° 160°
Гр. VI	β λ	+12°5 119°	+12°5 128°	+12°5 139°	+12°5 120°	+10°0 119°	—10°0 128°	+10°0 139°	+10°0 118°	+10°0 135°	— —	— —	— —	— —
Гр. VII	β λ	+2°5 121°	+2°5 128°	+2°5 139°	+2°5 128°	+2°5 137°	+2°5 133°	+2°5 120°	0° 121°	0° 139°	0° 135°	0° 124°	— —	— —

Таблица 2

Группа I

$\frac{M_2}{M_1} \quad m$ пл-к	13	14	15	16	17	18
8	1,991	2,337	2,716	2,978	3,306	3,696
9	1,920	2,242	2,486	2,763	3,146	3,538
19	1,883	2,222	2,531	2,863	3,164	3,455
24	1,825	2,149	2,482	2,819	3,205	3,446
25	1,887	2,231	2,582	2,926	3,252	3,563
40	1,692	1,995	2,270	2,601	2,886	3,321
54	2,059	2,419	2,712	3,063	3,415	3,743
74	1,655	1,947	2,240	2,590	3,113	3,433
87	1,894	2,229	2,496	2,814	3,114	3,609
98	2,035	2,280	2,609	2,962	3,386	3,818
123	1,930	2,301	2,669	2,943	3,361	3,739

Группа II

$\frac{M_2}{M_1} \quad m$ пл-к	13	14	15	16	17	18
2	1,933	2,266	2,661	3,098	3,411	3,713
10	1,879	2,282	2,609	2,960	3,348	3,661
23	1,810	2,187	2,544	2,866	3,248	3,533
39	1,673	2,229	2,656	3,055	3,488	3,775
41	1,850	2,133	2,531	2,868	3,254	3,561
63	1,902	2,360	2,781	3,153	3,535	3,750
65	1,775	2,110	2,472	2,807	3,191	3,452
75	1,692	2,118	2,460	2,793	3,224	3,519
88	1,916	2,285	2,627	3,001	3,290	3,557
111	1,436	1,915	2,255	2,689	3,029	3,447
124	1,948	2,276	2,581	2,851	3,216	3,450
135	1,840	2,209	2,567	2,892	3,242	3,752

Таблица 2 (продолжение)

Группа III

$\begin{matrix} \text{№} \\ \text{пл-к} \end{matrix} \begin{matrix} \text{м} \end{matrix}$	13	14	15	16	17	18
4	1,816	2,048	2,472	2,760	2,953	3,210
37	1,587	2,003	2,288	2,626	2,900	3,173
46	1,734	2,016	2,440	2,781	3,001	3,219
52	1,677	1,993	2,324	2,655	2,878	3,130
67	1,617	1,980	2,327	2,592	2,794	3,073
72	1,503	1,906	2,286	2,622	2,905	3,279
85	1,720	2,041	2,385	2,618	2,933	3,187
93	1,786	2,184	2,523	2,818	3,039	3,257
108	1,629	2,004	2,383	2,773	3,079	3,280
121	1,568	1,948	2,284	2,606	2,805	3,062

Группа IV

$\begin{matrix} \text{№} \\ \text{пл-к} \end{matrix} \begin{matrix} \text{м} \end{matrix}$	13	14	15	16	17	18
5	1,616	1,843	2,156	2,423	2,675	2,915
12	1,362	1,746	2,157	2,492	2,586	2,825
35	1,323	1,657	1,947	2,216	2,553	2,876
36	1,480	1,820	2,124	2,368	2,607	2,779
71	1,631	1,900	2,307	2,519	2,734	2,947
91	1,522	1,762	2,128	2,448	2,683	2,856
95	1,474	1,753	2,112	2,412	2,616	2,782
101	1,553	1,855	2,186	2,433	2,623	2,823
120	1,551	1,861	2,160	2,375	2,708	2,229
127	1,563	1,893	2,185	2,421	2,634	2,915
131	1,684	1,925	2,176	2,477	2,716	3,015

Таблица 2 (продолжение)

Группа V

$\frac{m}{\text{пл-к}}$	10	11	12	13	14	15
1	0,920	1,465	1,923	2,269	2,660	2,993
2	1,112	1,426	1,767	2,032	2,395	2,739
3	0,691	0,926	1,411	1,823	2,211	2,594
4	1,089	1,333	1,673	1,972	2,375	2,697
5	0,468	0,953	1,314	1,867	2,261	2,768
8	1,051	1,475	1,817	2,190	2,530	2,883
9	0,847	1,251	1,730	2,086	2,494	2,863
12	1,079	1,458	1,771	2,104	2,465	2,763
14	0,971	1,295	1,485	1,716	2,192	2,602
16	1,112	1,524	1,795	2,080	2,421	2,735

Группа VI

$\frac{m}{\text{коорд. пл-к}}$	10	11	12	13	14	15
$\frac{\rho}{\lambda}$						
+12,5 119	0,65	1,09	1,42	1,78	2,15	2,41
12,5 128	0,79	1,15	1,49	1,88	2,28	2,57
12,5 139	0,84	1,26	1,62	2,00	2,39	2,63
12,5 120	0,52	0,86	1,24	1,57	1,96	2,21
10,0 119	0,65	1,10	1,40	1,74	2,11	2,39
10,0 128	0,72	1,12	1,49	1,85	2,27	2,55
10,0 139	0,78	1,23	1,59	1,98	2,36	2,61
10,0 118	0,66	0,99	1,30	1,64	1,98	2,24
+10,0 135	0,86	1,29	1,63	2,00	2,45	2,73

Группа VII

$\frac{m}{\text{коорд. пл-к}}$	10	11	12	13	14	15
$\frac{\rho}{\lambda}$						
+2,5 121	0,55	1,00	1,37	1,77	2,14	2,48
2,5 128	0,78	1,22	1,57	1,94	2,27	2,54
2,5 139	0,83	1,34	1,75	2,03	2,35	2,63
2,5 128	0,84	1,30	1,64	1,99	2,33	2,72
2,5 137	1,04	1,49	1,87	2,20	2,52	2,82
2,5 133	0,92	1,56	1,95	2,33	2,66	2,99
+2,5 120	0,72	1,18	1,60	2,00	2,39	2,71
0,0 121	0,73	1,13	1,50	1,85	2,20	2,51
0,0 139	0,86	1,28	1,64	1,96	2,26	2,57
0,0 135	0,98	1,42	1,81	2,14	2,47	2,80

Таблица 3

$\begin{matrix} \text{№№} \\ \text{групп} \end{matrix} \quad m$		13	14	15	16	17	18
$\overline{N(m)}$	I II III IV	80,1 69,0 47,2 31,4	171,0 162,4 104,4 67,0	355,0 379,0 239,7 143,3	741,0 874,5 488,3 261,2	1767,8 2042,4 879,6 449,5	4016,1 4115,9 1560,3 765,6
$\overline{N(m)}^2$	I II III IV	6418 4761 2228 1183	29241 26374 10899 4489	126025 143641 57456 20506	549081 764750 238437 68225	3125117 4171398 773696 202050	18129059 16934871 2434596 586143
$\overline{N(m)}^3$	I II III IV	6847 5044 2837 1245	31436 27774 11238 4621	138548 153699 59629 21161	599651 836266 248939 69822	3403864 4589874 812394 205349	18004117 18271787 2501256 602120
σ^2	I II III IV	431 283 109 62	2195 1400 339 182	12523 10258 2173 655	50570 71516 10552 1597	278747 418476 38888 3293	1875058 1336918 68720 15977
$\begin{matrix} \text{№№} \\ \text{групп} \end{matrix} \quad m$		10	11	12	13	14	15
$\overline{N(m)}$	V VI VII	9,54 5,25 7,08	22,5 14,8 20,9	51,5 30,4 50,3	110,5 71,0 112,4	265,0 176,7 245,8	602,4 328,4 507,9
$\overline{N(m)}^2$	V VI VII	91,0 27,5 50,1	506 190 437	2652 924 2530	12210 5041 12634	70225 31223 60418	362896 107847 257963
$\overline{N(m)}^3$	V VI VII	105,0 29,0 54,4	575 204 497	3013 1001 2909	13714 5551 14555	77778 35292 68577	391964 122226 296571
σ^2	V VI VII	14,0 1,5 4,3	69 14 60	361 77 370	1504 510 1921	7553 4009 8159	29078 14379 8609

Таблица 7

I гр.		II гр.		III гр.		IV гр.		V гр.		VI гр.			VII гр.		
№№ площа- док	L ₁	№№ пл-к	L ₁	№№ пл-к	L ₁	№№	L ₁	№№ пл-к	L ₁	координаты площадок		L ₁	координаты площадок		L ₁
										β	λ		β	λ	
8	460	2	480	4	201	5	99	1	39.0	+12.5°	119°	13.2	+2.5°	121°	12.8
9	290	10	423	37	175	12	102	2	27.8	12.5	128	16.7	2.5	128	18.6
19	303	23	334	46	212	35	78	8	14.5	12.5	139	21.5	2.5	139	24.4
24	283	39	509	52	167	36	95	4	23.3	12.5	120	8.6	2.5	128	23.3
25	356	41	322	67	153	71	127	5	17.3	10.0	119	13.1	2.5	137	34.8
40	183	63	608	72	181	91	97	8	31.7	10.0	128	16.1	2.5	133	43.8
64	513	65	279	85	182	95	91	9	28.2	10.0	139	20.7	+2.5	120	22.4
74	204	75	304	96	266	101	103	12	30.1	10.0	118	9.8	0.0	121	16.3
87	311	88	395	108	225	120	106	14	16.8	+10.0	135	24.3	0.0	139	20.6
98	449	111	223	121	154	127	108	16	28.5	—	—	—	0.0	135	31.0
123	455	124	321	—	—	131	111	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	135	399	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ФЛОКТУАЦИИ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗВЕЗД

Таблица 10

β	При $\alpha = 0^m 30$		При $\alpha = 0^m 20$	
	lgA	lgB	lgA	lgB
10°	1.49683	1.11516	1.47403	1.03655
20°	1.74453	1.55076	1.73298	1.51085
30°	1.82525	1.69270	1.81735	1.66510
40°	1.86407	1.76095	1.85792	1.73973
50°	1.91262	1.84635	1.90867	1.83270

Таблица 14

$\frac{z}{\alpha}$	$0^m 30$	$0^m 20$	$0^m 18$	$0^m 15$	$0^m 10$
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,38728	0,38649	0,38353	0,38258	0,38091
0,10	0,42838	0,42186	0,42054	0,41845	0,41494
0,15	0,43736	0,42864	0,42438	0,42360	0,41852
0,20	0,43501	0,42277	0,42023	0,41842	0,41000
0,25	0,42527	0,41081	0,40811	0,40339	0,39592
0,30	0,41205	0,39586	0,39258	0,38761	0,37928
0,35	0,39712	0,37954	0,37599	0,37063	0,36170
0,40	0,38143	0,36279	0,35906	0,35337	0,34398
0,45	0,36559	0,34613	0,34224	0,33636	0,32662
0,50	0,34994	0,32987	0,32586	0,31985	0,30991
0,55	0,33468	0,31420	0,31015	0,30405	0,29394
0,60	0,31995	0,29923	0,29513	0,28895	0,27882
0,65	0,30584	0,28500	0,28087	0,27470	0,26455
0,70	0,29236	0,27150	0,26737	0,26125	0,25114
0,75	0,27953	0,25873	0,25467	0,24855	0,23854
0,80	0,26736	0,24670	0,24266	0,23661	0,22673
0,85	0,25581	0,23558	0,23153	0,22538	0,21564
0,90	0,24457	0,22464	0,21753	0,21148	0,20521
0,95	0,23451	0,21457	0,21069	0,20492	0,19550
1,00	0,22471	0,20508	0,20125	0,19559	0,18637