ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Бюллетень № 6 Ереванской Астрономической Обсерватории, 1945 г.

В. А. Амбарцумян

Точечный источник света в мутной среде

Как известно, наиболее сложным разделом теории светового поля является раздел, посвященный рассеянию света в мутной среде. В работах последних лет вопрос о световом режиме в мутной среде в случае плоскопараллельных слоев нашел подробное освещение. Однако, другой идеальный случай, именно, случай точечного источника в однородной мутной среде, заполняющей все пространство, почти совершенно не исследован. Настоящая статья содержит некоторые результаты, относящиеся к этой проблеме, для частного случая сферической индикатрисы рассеяния.

Пусть α есть коэфициент экстинкции. В силу однородности среды он постоянен во всем пространстве, также как коэфициент рассеяния σ. Обозначим:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\alpha} \tag{1}$$

и введем вместо прямоугольных координат x, y, z величины

$$u = \alpha x; \quad v = \alpha y; \quad w = \alpha z \tag{2}$$

Точно также будем обозначать:

$$\tau = \alpha\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \alpha r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \tag{3}$$

Величину τ можно назвать оптическим расстоянием до начала координат. Пусть точечный источник помещается в начале координат. В силу сферической симметрии задачи коэфициент излучения η будет зависеть только от τ, а следовательно и отдача

$$B(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\alpha} \qquad (4$$

будет функцией, зависящей только от τ. Так как мы предполагаем сферическую индикатрису рассеяния, то величина $B(\tau)$ от направления не зависит.

Если $4\pi^2 S$ есть полный поток излучения, испускаемый нашим точечным источником, то поток прямого излучения на расстоянии r от начала координат через единичную площадку нормальную к радиусу-вектору, проведенному от источника, будет равен

$$F = \frac{\pi S}{r^2} e^{-\alpha r}$$

или

$$F = \frac{\pi S \alpha^2}{\tau^2} e^{-\tau} \tag{5}$$

Поэтому условие лучевого равновесия для рассматриваемого случая по аналогии с плоскопараллельным случаем перепишется в виде:

$$4\pi B(\tau) = \frac{\lambda \pi S \alpha^2}{\tau^2} e^{-\tau} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\tau_1) e^{-[(u-u_1)^2+(v-v_1)^2+(w-w_1)^2]^{1/2}} du_1 dv_1 dw_1}{(u-u_1)^2+(v-v_1)^2+(w-w_1)^2}.$$

или

$$B(\tau) = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} + \frac{\lambda}{4\pi} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\tau_1) e^{-[(u-u_1)^2+(v-v_1)^2+(w-w_1)^2]^{1/2}} du_1 dv_1 dw_1}{(u-u_1)^2+(v-v_1)^2+(w-w_1)^2} \tag{6}$$

Неоднородное интегральное уравнение (6) и подлежит нашему рассмотрению.

Функция $B(\tau)$, стоящая в левой части, зависит через τ от переменных u, v, w также как правая часть уравнения (6). Помножим обе части (6) на $dvdw$ и проинтегрируем. Для левой части будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B\left(\sqrt{u^2+v^2+w^2}\right) dvdw = 2\pi \int_0^{\infty} B\left(\sqrt{u^2+t^2}\right) tdt \tag{7}$$

где $t^2 = u^2 + w^2$. Введем в правой части (7) переменную интегрирования $\tau = \sqrt{u^2+t^2}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, dvdw = 2\pi \int_{|u|}^{\infty} B(\tau)\tau d\tau \tag{8}$$

Точно также

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\, dvdw = 2\pi \int_{|u|}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau}\, d\tau = 2\pi\, \mathrm{Ei}\,|u| \tag{9}$$

Наконец

$$\int\int \frac{e^{-[(u-u_1)^2+(v-v_1)^2+(w-w_1)^2]^{1/2}}}{(u-u_1)^2+(v-v_1)^2+(w-w_1)^2}\, dvdw = 2\pi \mathrm{Ei}\,|u-u_1| \tag{10}$$

Поэтому (6) перепишется в виде

$$\int_{|u|}^{\infty} B(\tau)\tau d\tau = \frac{\lambda S\alpha^2}{4} \mathrm{Ei}\,|u| + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ei}\,|u-u_1|\, du_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau_1) dv_1 dw_1 \tag{11}$$

или на основании (8)

$$\int_{|u|}^{\infty} B(\tau)\tau d\tau = \frac{\lambda S\alpha^2}{4} \mathrm{Ei}\,|u| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ei}\,|u-u_1|\, du_1 \int_{|u_1|}^{\infty} B(\tau_1)\tau_1 d\tau_1 \tag{12}$$

Обозначим:

$$\int\limits_{|\tau|}^{\infty} B(\tau)\tau d\tau = A(\tau) \tag{13}$$

Тогда

$$A(\tau) = \frac{\lambda S\alpha^2}{4} \,\mathrm{Ei}(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ei}\,|\,\tau - t\,|\,A(t)dt \tag{14}$$

Это интегральное уравнение и подлежит нашему исследованию.

Как это следует из общей теории, при $\lambda < 1$ это уравнение имеет только одно решение, ограниченное при $|\tau| \to \infty$. Мы можем свободный член этого уравнения представить в виде:

$$\frac{\lambda S\alpha^2}{4}\,\mathrm{Ei}\,|\,\tau\,| = \frac{\lambda S\alpha^2}{4}\int\limits_{1}^{\infty} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}}\frac{d\xi}{\xi} \tag{15}$$

Поэтому решение (14) можно представить как суперпозицию решений уравнения

$$\beta(\tau,\xi) = e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ei}\,|\,\tau - t\,|\,\beta(t,\xi)dt \tag{16}$$

где β зависит очевидно от параметра ξ, входящего в свободный член.

Очевидно, что между β и A будет существовать соотношение:

$$A(\tau) = \frac{\lambda S\alpha^2}{4}\int\limits_{0}^{1} \beta(\tau,\xi)\frac{d\xi}{\xi} \tag{17}$$

Рассмотрим подробнее уравнение (16) для $\beta(\tau,\xi)$. Продиференцируем это уравнение по τ

$$\frac{d\beta(\tau,\xi)}{d\tau} = -\frac{1}{\xi}\frac{d\,|\,\tau\,|}{d\tau}\, e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ei}\,|\,\tau - t\,|\,\frac{d\beta(t,\xi)}{dt}\,dt \tag{18}$$

Множитель $\frac{d\,|\,\tau\,|}{d\tau}$ имеет разрыв в точке $\tau = 0$. Поэтому свободный член уравнения (18) имеет также разрыв, равный $-\frac{2}{\xi}$. Нетрудно видеть, что и решение уравнения (18) $\frac{d\beta(t,\xi)}{dt}$ при $t = 0$ имеет разрыв:

$$\left[\frac{d\beta(t,\xi)}{dt}\right]_{t=+0} - \left[\frac{d\beta(t,\xi)}{dt}\right]_{t=-0} = -\frac{2}{\xi} \tag{19}$$

Учитывая это, продиференцируем уравнение (18) еще раз по τ

$$\frac{d^2\beta(t,\xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2}\, e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\tau}^{\infty} \mathrm{Ei}(t-\tau)\,\frac{d\beta(t,\xi)}{dt}\,dt +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\frac{d}{d\tau}\int_{\infty}^{\tau}Ei\,(t-\tau)\,\frac{d\beta(t,\xi)}{dt}\,dt$$

или, если $\tau > o$

$$\frac{d^2\beta(\tau,\xi)}{d\tau^2}=\frac{1}{\xi^2}e^{-\frac{|\tau|}{\xi}}+\frac{\lambda}{2}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\infty}Eix\,\frac{d\beta(x+\tau,\xi)}{dx}\,dx-$$

$$-\frac{\lambda}{2}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\infty}Eix\,\frac{d\beta(\tau-x,\xi)}{dx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\xi^2}e^{-\frac{|\tau|}{\xi}}+\frac{\lambda}{2}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\infty}Eix\,\frac{d\beta(x+\tau,\xi)}{d\tau}\,dx+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\frac{d}{d\tau}\int_0^{\tau}Eix\,\frac{d\beta(\tau-x,\xi)}{d\tau}\,dx+\frac{\lambda}{2}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{\infty}Eix\,\frac{d\beta(\tau-x,\xi)}{d\tau}\,dx$$

$$=\frac{1}{\xi^2}e^{-\frac{|\tau|}{\xi}}+\frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty}\frac{d^2\beta(t,\xi)}{dt^2}\,Ei\,|\tau-t|\,dt+\frac{\lambda}{2}Ei\tau\left[\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=+o}-$$

$$-\frac{\lambda}{2}Ei\tau\left[\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=-o}$$

$$=\frac{1}{\xi^2}e^{-\frac{|\tau|}{\xi}}-\frac{\lambda}{\xi}Ei\,|\tau|+\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty}Ei\,|\tau-t|\,\frac{d^2\beta(t,\xi)}{dt^2}\,dt$$

К тому же выражению (при ином промежуточном преобразовании) мы придем при $\tau < o$. Итак, второе диференцирование привело к уравнению для второй производной

$$\frac{d^2\beta(\tau,\xi)}{d\tau^2}=\frac{1}{\xi^2}e^{-\frac{|\tau|}{\xi}}-\frac{\lambda}{\xi}Ei\,|\tau|+\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty}Ei\,|\tau-t|\,\frac{d^2\beta(t,\xi)}{dt^2}\,dt \quad (20)$$

или

$$\frac{d^2\beta(\tau,\xi)}{d\tau^2}=\frac{1}{\xi^2}e^{-\frac{|\tau|}{\xi}}-\frac{\lambda}{\xi}\int_0^1 e^{-\frac{|\tau|}{\eta}}\frac{d\eta}{\eta}+\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty}Ei\,|\tau-t|\,\frac{d^2\beta(\tau,\xi)}{dt^2}\,dt \quad (21)$$

Поскольку свободный член (21) представляет собою суперпозицию величин типа свободного члена (16), то и решение (21) можно представить как суперпозицию решений уравнения (16), т. е.

$$\frac{d^2\beta(\tau,\xi)}{d\tau^2}=\frac{1}{\xi^2}\beta(\tau,\xi)-\frac{\lambda}{\xi}\int_0^1\beta(\tau,\eta)\,\frac{d\eta}{\eta} \quad (22)$$

Это соотношение мы можем рассматривать, как некоторое интегро-диференциальное уравнение для функции $\beta(\tau,\xi)$. Ищем решение этого уравнения в форме:

$$\beta(\tau,\eta)=C(\eta)\,e^{-k|\tau|} \quad (23)$$

поскольку при $|\tau| \to \infty$ функция $\vartheta(\tau,\eta)$ должна стремиться к произведению двух функций, одна из которых зависит от τ, а другая от η. Подставляя в (22) имеем:

$$C(\xi) = \frac{\lambda\xi}{1-k^2\xi^2} \int_0^1 C(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \tag{24}$$

или

$$C(\xi) = \frac{C\xi}{1-k^2\xi^2} \tag{25}$$

где

$$C = \lambda \int_0^1 C(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \tag{26}$$

Подставляя в (26) правую часть (25), мы видим, что должно выполняться соотношение:

$$1 = \lambda \int_0^1 \frac{d\eta}{1-k^2\eta^2}$$

которое удовлетворяется только при условии:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}} \tag{27}$$

Это соотношение определяет k в решении (23).

Для установления значения C в (25) рассмотрим тождество

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei\,|\tau - t|\, e^{-kt}\, dt \tag{28}$$

где k предполагается определенным из (27). Преобразуем его

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} Ei\,|\tau - t|\, e^{-kt}\, dt - \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} Ei\,|\tau - t|\, e^{kt}\, dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei\,|\tau - t|\, e^{-k|t|}\, dt$$

При $\tau > 0$ будем отсюда иметь

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\tau-t)}{\eta}} e^{-kt}\, dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\tau-t)}{\eta}} e^{kt}\, dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{\infty}^{\infty} Ei\,|\tau - t|\, e^{-k|t|}\, dt$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\eta} - k} - \frac{1}{\frac{1}{\eta} + k} \right\} \frac{d\eta}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_{\infty}^{\infty} Ei\,|\tau - t|\, e^{-k|t|}\, dt$$

т. е.

$$e^{-k\tau} - \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{\eta d\eta}{1-k^2\eta^2} =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{\infty}^{\infty} Ei \mid \tau - t \mid e^{-k \mid t \mid} dt \qquad (\tau > o) \tag{29}$$

Нужно подчеркнуть, что эта формула справедлива при $\tau > o$. Рассматривая теперь тождество

$$e^{k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei \mid \tau - t \mid e^{kt} dt$$

при отрицательных τ будем иметь:

$$e^{k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei \mid \tau - t \mid e^{kt} dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei \mid \tau - t \mid e^{-kt} dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei \mid \tau - t \mid e^{-k \mid t \mid} dt$$

Преобразуя получаем для $\tau < o$:

$$e^{k\tau} - \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{\mid \tau \mid}{\eta}} \frac{\eta d\eta}{1-k^2\eta^2} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei \mid \tau - t \mid e^{-k \mid t \mid} dt \tag{30}$$

Принимая во внимание, что (29) справедливо при $\tau > o$, а (30) для $\tau < o$, мы можем вообще написать:

$$e^{-k \mid \tau \mid} = \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{\mid \tau \mid}{\eta}} \frac{\eta d\eta}{1-k^2\eta^2} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei \mid \tau - t \mid e^{-k \mid t \mid} dt \tag{31}$$

Сравнивая теперь (31) с (16), мы видим, что функция $e^{-k \mid t \mid}$ может быть получена как суперпозиция функций $\beta(\tau,\zeta)$

$$e^{-k \mid \tau \mid} = \lambda k \int_0^1 \frac{\beta(\tau,\eta)\eta d\eta}{1-k^2\eta^2} \tag{32}$$

Принимая во внимание, что это равенство справедливо для всех τ, применим его к большим τ, для чего подставим в него асимптотическое выражение (23), в котором $C(\eta)$ заменим через (25):

$$1 = \lambda k C \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{1-k^2\eta^2}$$

откуда

$$C = \frac{1}{\lambda k \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{1 - k^2\eta^2}}.$$

Интегрирование дает

$$C = \frac{k}{\lambda \left\{ \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} - 1 \right\}} = \frac{k}{1-\lambda} \tag{33}$$

Итак, согласно (25)

$$C(\xi) = \frac{k}{1-\lambda} \frac{\xi}{1 - k^2\xi^2} \tag{34}$$

и для больших τ мы имеем асимптотическую формулу:

$$\beta(\tau, \xi) = \frac{k}{1-\lambda} \frac{\xi}{1 - k^2\xi^2} e^{-k|\tau|} \tag{35}$$

Согласно (17) отсюда мы получим выражение для A (τ):

$$A(\tau) = \frac{\lambda S\alpha^2}{4} \frac{k}{1-\lambda} \int_0^1 e^{-k|\tau|} \frac{d\xi}{1 - k^2\xi^2}$$

или

$$A(\tau) = \frac{S\alpha^2}{4} \frac{k}{1-\lambda} e^{-k|\tau|} \tag{36}$$

где мы опять воспользовались соотношением (27).

Из (13) и (36) находим:

$$B(\tau) = \frac{S\alpha^2}{4} \frac{k^2}{1-\lambda} \frac{1}{\tau} e^{-k\tau} . \tag{37}$$

Это и есть асимптотическое решение нашей задачи.

Август 1943 г.

The point-source of light Within the scattering medium

By V. A. Ambarzumian

(Abstract)

The solution of the equation (6) of the point-source problem is reduced to the solution of the equation (16) of the problem of plan-parallel layers. The asymptotic solution of the equation (6) is given.