ПРИБЛИЖЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Саакян К.

Институт математики НАН РА

Սահակյան Կ., **Դիֆերենցիալ-տարբերական հավասարումների պարբերական լուծումների մոտավոր գտնելը:**

Sahakyan K. **Approximate identification of periodical solutions of differential-difference equations.**

1.1. Известно, что периодические решения уравнения

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{ij}x^{(j)}(t-\tau_i)=f(t),\quad t\in R^1, \tag{1.1}$$

(где a_{ij} и τ_j – постоянные, $a_{0n}\neq0$, $0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_m$) могут существовать лишь в случае периодичности функции f(t). Известно также, что при заданной периодической функции f периодическое решение не всегда существует. Приведем общие соображения (см. [1]).

Предположим, что f(t) при $t \geq t_0$ является непрерывной периодической функцией периода 2, разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$f(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}a_p e^{i\pi pt},\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty}|a_p|<\infty. \tag{1.2}$$

Если характеристический квазиполином

$$\varphi(z)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{ij}z^j e^{-z\tau_i}$$

не имеет чисто мнимых целочисленных корней (т.е. случай не резонансный), то, пользуясь принципом наложения, ищем для каждого слагаемого в (1.2) решение в виде $A_pe^{i\pi pt}$, $A_p=\alpha_p/\varphi(pi)$ и, суммируя их, формально получаем периодическое решение в виде

$$x(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}a_p/\varphi(pi)e^{\pi pit}. \tag{1.3}$$

Ряд (1.3) сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, так как его коэффициенты $\alpha_p/\varphi(pi)$, по сравнению с коэффициентами α_p абсолютно сходящегося ряда (1.2), содержат в знаменателе сомножитель $\varphi(pi)=O(p^n)$ при $p\to\infty$.

Если хотя бы один корень квазиполинома $\varphi(z)$ близок к mi, где m – целое число, то при $\alpha_m\neq0$ или $\alpha_{-m}\neq0$ наблюдается явление резонанса: коэффициент $\alpha_m/\varphi(mi)$ резко возрастает по модулю по сравнению со случаем отсутствия корней $\varphi(z)$, близких к mi.

Если один из корней квазиполинома $\varphi(z)$ равен mi и $\alpha_m\neq0$ или $\alpha_{-m}\neq0$, то периодических решений не существует. Если один из корней квазиполинома $\varphi(z)$ равен mi и $\alpha_m=\alpha_{-m}=0$ и других чисто мнимых целочисленных корней нет, то существует двупараметрическое семейство периодических решений вида (1.3), но только коэффициенты при e^{ipmt} и e^{-ipmt} в (1.3) являются произвольными.

В качестве примеров приведем следующие уравнения.

<u>Пример 1</u>. Уравнение

$$x'(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t), \tag{1.4}$$

где

$$f(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}a_p e^{i\pi pt}.$$

В нерезонансном случае имеем лишь одно периодическое решение

$$x(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\alpha_p e^{i\pi pt}/(i\pi p+a+be^{-i\pi pt}). \tag{1.5}$$

<u>Пример 2</u>. Уравнение

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)+b_1x'(t-\tau)+b_2x(t-\tau)=f(t), \tag{1.6}$$

где

$$f(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\alpha_p e^{i\pi pt}$$

В нерезонансном случае имеем лишь одно периодическое решение

$$x(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\alpha_p e^{i\pi pt}/(-\pi^2p^2+a_1i\pi p+a_2+b_1i\pi pe^{i\pi p\tau}+b_2e^{-i\pi p\tau}). \tag{1.7}$$

1.2. Обычным методом нахождения периодических решений уравнения (1.1) является разложение свободного члена и решения в ряд Фурье, что требует численного нахождения коэффициентов Фурье. Ниже предлагается другой подход, основанный на формулах, полученных в [3], для начальной задачи

$$Ly(x) = \sum_{n=0}^{p} [q_n d^n y(x)/dx^n + \int_{-1}^{1} K_n(x-z) d^n y(z)/dz^n] = f(x), \tag{1.8}$$

$x\in[-1,1]$, функции $y^{(n)}(t_0)=Y_n$, $n=0,\dots,p-1$, где q_n $(n=0,1,\dots,p)$ от x не зависят, $K_n(x)$ $(n=0,1,\dots,p)$ гладкие периодические $K_n(x+2)=K_n(x)$) и $K_n\in C^m[-1,1]$ $(m\geq 2)$, $t_0\in[-1,1]$ фиксированное число. Приближенное решение задачи (1.8) ищется в виде

$$y(f, N, x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x) Y_k,$$

где коэффициенты $a_k(x)$ и $b_k(x)$ определяются из минимизации следующего функционала (см. [3])

$$I(a(x), b(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_n |R_N(e^{i\pi nx})|^2 + \sum_{m=1}^{p} \mu_m |R_N(\varphi_m(x))|^2 \to \min,$$

где $\{\theta_n(N)\}^{\infty}_{n=-\infty}$, $\{\mu_m(N)\}^{p}_{m=1}$, заданные числовые последовательности такие, что ряд $\sum_n \theta_n n^{2p}$ сходится абсолютно, $\varphi_m\in C^p[-1,1]$, $m=1,\dots,p$, а система $\{\varphi_m(x)\}^p_{m=1}\cup\{e^{ip\pi x}\}^N_{n=-N}$ ($N\geq 1$ — целое) линейно независима на $[-1,1]$. Рассмотрим следующую задачу:

$$Ly(x) = \sum_{n=0}^{p} [q_n d^n y(x)/dx^n + \gamma_n d^n y(x-h_n)/dx^n] = f(x) \tag{1.8'}$$

$x\in[-1,1]$, $y^{(n)}(t_0)=Y_n$, $n=0,1,\dots,p-1$, где q_n, γ_n $(n=0,\dots,p)$ некоторые константы, h_n от x не зависят и f(x) периодическая функция.

Заметим, что если в задаче (1.8) принять $K_n(x)=\gamma_n\delta(x-h_n)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, тогда формально получим задачу (1.8'), а формулы, приведенные в [3], где $\theta_n=1$ при $|n|\leq N$ и $\theta_n=0$ при $|n|>N$, перепишутся в следующем виде:

$$y(f, N, x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n/l_n [e^{ipnx} - e^{ipnt} \sum_{s=0}^{p-1} b_s(x)(ipn)^s] + \sum_{s=0}^{p-1} b_s(x) Ys, \tag{1.9}$$

где

$$f_n = 1/(2N+1) \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) e^{-ipnx_k},$$

$$l_n = \sum_{k=0}^{p} (i\pi n)^k [q_k + \gamma_k e^{-ipnh_k}], \tag{1.10}$$

$$b_s(x) = \sum_{m=1}^{p} Q_{sm} G_m(x), \quad s = 0,1,\dots, p-1, \tag{1.11}$$

$$G_m(x) = \sum_{k=-N}^{N} \overline{X_{km}}/l_k e^{i\pi kx} - \varphi_m(x), \quad (m = 1,\dots, p). \tag{1.12}$$

Здесь

$Q=\|Q_{sm}\|^{m=1,\dots,p}_{s=0,\dots,p-1}$ обратная матрица к матрице

$$\|G^{(s)}_m(t)\|^{m=1,\dots,p}_{s=0,\dots,p-1}$$

$$X_{sm} = 1/(2N+1) \sum_{j=-N}^{N} \overline{r_m(x_j)} e^{ipsx_j}, \tag{1.13}$$

где

$$r_m(x) = \sum_{k=0}^{p} [q^k \varphi^{(k)}_m(x) + \gamma_k \varphi^{(k)}_m(x-h_k)], \quad m = 1,\dots, p. \tag{1.14}$$

<u>Замечание</u>. Приведенные формулы (1.10)-(1.14) имеют смысл в случае $l_n\neq 0$ $(n=0,\pm1,\dots,\pm N)$, что соответствует нерезонансному случаю и означает, что приближенная формула для решения (1.9) точна для системы $\{e^{ip\pi x}\}$, $|n|\leq N$ и системы функций $\{\varphi_n(x)\}$, $n=1,\dots,p$.

<u>Теорема 1.1</u>. Пусть задача (1.8') корректна в $C^p[-1,1]$, $\{\varphi_m(x)\}$, $(m=1,\dots,p)$ такие, что вышеприведенная матрица Q ограничена по норме числом, не зависящим от N. Тогда $b_s(x)\to y(x)$ $(N\to\infty$, $s=0,\dots,p-1)$ равномерно по $x\in[-1,1]$, где y(x) решение уравнения $Ly(x)=0$ с начальными условиями

$$b_s^{(k)}(t)=\delta_{ks} \quad (k,s=0,\dots,p-1).$$

<u>Доказательство.</u> Из (1.11) и (1.12) имеем

$$Lb_s(x) = \sum_{m=1}^{p} Q_{sm} \sum_{n=-N}^{N} [\overline{X_{nm}} e^{ipnx} - r_m(x)], \quad s = 0,\dots, p-1.$$

Используя неравенство Коши-Гельдера, получим

$$\| L\ bs(x)\ \|^2_{L_2} \le \sum_{m=1}^{p} | Q_{sm} |^2 \sum_{m=1}^{p} \| \sum_{n=-N}^{N} \overline{X_{nm}} e^{ipnx} - r_m(x) \|^2_{L_2} .$$

Заметим, что

$$\sum_{n=-N}^{N} \overline{X_{nm}} e^{ipnx}$$

есть частичная сумма ряда Фурье функции $r_m(x) \in L_2(-1,1)$. Тогда

$$\| L\ b_s(x) \|^2_{L_2} \to 0 \qquad (N \to \infty,\ s = 0,\dots, p-1) . \tag{1.15}$$

Хорошо известно (см.[1,4]), что начальные задачи для дифференциально-разностных уравнений сводятся к задачам для уравнений Фредгольма с L_2-ядром. Из корректности задачи (1.8') в $C^p[-1,1]$ следует, что обратный оператор L^{-1} интегральный с L_2-ядром $R(x,z)$. Учитывая это, получим оценку

$$| b_s(x) - y(x) |^2 = | L^{-1} (L\ b_s(x) - Ly(x)) |^2 = | L^{-1}\ L\ b_s(x) |^2 =$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} R(x, z)\ Lb_s(z) dz \right|^2 \le \left(\int_{-1}^{1} | R(x, z) \| L\ b_s(z) | dz \right)^2 \le \int_{-1}^{1} | R(x, z) |^2 dz\ \| L\ b_s(x) \|^2_{L_2}$$

Учитывая (1.15), получим утверждение теоремы.

Теорема 1.2. Пусть $f \in C[-1,1]$ и выполнены условия теоремы 1.1. Тогда $R_N(y(x)) \to 0$, $(N \to \infty)$ равномерно по $x \in [-1,1]$.

Доказательство, согласно теореме 1.1, достаточно провести для случая, когда $Y_s=0$ $(s=0,\dots,p-1)$.

Из (1.9) имеем

$$L\ R_N(y) = f(x) - Ly(f,\ N, x) = \Delta_N(x) + \sum_{s=0}^{p-1} Lb_s(x) \sum_{n=-N}^{N} f_n / l_n e^{ipnt} (i\pi n)^s ,$$

где

$$\Delta_N(x) = f(x) - \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{ipnx} ,$$

тогда

$$|R_N(y)| = |L^{-1}(LR_N(y))| = \left|\int_{-1}^{1} R(x,z) LR_N(y) dz\right| = \left|\int_{-1}^{1} R(x,z) \{\Delta_N(z) + \sum_{s=0}^{p-1} Lb_s(z) \sum_{n=-N}^{N} f_n / l_n e^{ipnt} (i\pi n)^s \} dz\right| \le \int_{-1}^{1} |R(x,z)| |\Delta_N(z)| dz +$$

$$+ \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{n=-N}^{N} |f_n| / |l_n| |\pi n|^s \int_{-1}^{1} |R(x,z)| |Lb_s(z)| dz \le \left(\int_{-1}^{1} |R(x,z)|^2 dz\right)^{1/2} \left(|\Delta_N(z)|^2 dz\right)^{1/2} + \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{n=-N}^{N} |f_n| / |l_n| |\pi n|^s \left(\int_{-1}^{1} |R(x,z)|^2 dz\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} |Lb_s(z)|^2 dz\right)^{1/2}.$$

Остается применить теорему 1.1.

Проиллюстрируем предлагаемый метод.

a) Пусть $y(x)=\sin(12.45z\cos 8\pi x)$.

Рассмотрим задачу

$$y'(x) - 15z^2 y(x - 70.2z^2) + (\sin(4.3z)^2 + 4.35) y(x) = f(x),\ y(0) = \sin 12.45z, \tag{1.16}$$

где $f(x)$ выбрана так, чтобы функция $y(x)$ являлась точным решением задачи (1.16). Ниже приведены таблицы ошибок (см. п. 1.3, *табл. 1, 2*), взятых в различных точках x, при различных значениях параметра z и при различных значениях N. Из таблиц видно, что при увиличении N ошибка, взятая в различных точках отрезка $[-1,1]$, уменьшается. Так, при $z=1.5$ (см. п. 1.3, *табл. 1*) и при $2N+1=1025$ достигает порядка 3×10^{-8}, а при $z=2$ (см. п. 1.3, *табл. 2*) и при $2N+1=1025$ — порядка 4×10^{-11}.

b) Пусть $y(x)=\mathrm{sh}(3\sin 4\pi(x+z))$.

Рассмотрим задачу

$$y''(x) - 2.1y'(x) + 4.33(z+1)y(x) - 13y'(x - 55.7(\sin z^2 + 3)) + 0.88z^2 y(x - 55.7(\sin z^2 + 3)) = f(x) \tag{1.17}$$

$$y'(0) = 12\pi \mathrm{ch} \sin 4\pi(x+z) \cos 4\pi(x+z), \quad y(0) = \mathrm{sh}(3\sin 4\pi z),$$

где правая часть $f(x)$ выбрана так, чтобы функция $y(x)$ являлась точным решением задачи (1.17). Ниже приведены таблицы ошибок (см. п. 1.3, *табл. 3, 4*), взятых в различных точках x, при различных значениях параметра z и при различных значениях N. Так, при $z=2$ (см. п. 1.3, *табл. 3*), и при $2N+1=257$ погрешность приблизительно равна 10^{-11}, при $z=3$ (см. п. 1.3, *табл. 4*) и при $2N+1=257$: погрешность приблизительно равна 10^{-11}.

Как видим, предложенный алгоритм достаточно хорошо реализуется и в этом случае.

3. Численные результаты.

Таблица 1

x	2N+1				
	129	257	513	1025	2049
−1	9000	7700	−0.12	−3E−08	7.5E−08
−0.8	250	210	−0.0032	−9E−10	2E−09
−0.6	4.9	3.7	−8E−05	−3E−11	5.5E−11
−0.4	−0.0085	−1.6	−8E−06	2.9E−14	1.1E−12
−0.2	1.9	−1.3	5.6E−07	2.9E−13	−4E−13
1	129	−3E−12	4E−16	4E−16	0
0.2	7.3	0.78	−4E−06	−2E−12	−3E−14
0.4	−6.1	1.2	1.3E−06	−8E−14	3.4E−14
0.6	14	0.88	−2E−05	−6E−12	1.5E−11
0.8	91	93	−0.0015	−4E−10	9.3E−10
1	−6400	−5300	0.082	2.3E−08	−5E−08

Равномерные ошибки численного решения задачи (1.16), взятые в различных точках $x\in[-1,1]$, при $z=1.5$ и при различных значениях N.

Таблица 2

X	2N+1				
	129	257	513	1025	2049
−1	390	−220	0.65	4E−11	−4E−11
−0.8	0.47	−2.5	0.0059	2E−13	3E−13
−0.6	−79	45	−0.13	−1E−11	1E−11
−0.4	−1.6	0.2	−0.005	4E−12	1E−12
−0.2	160	−100	0.33	2E−11	−2E−11
0	1E−13	2E−13	0	0	0
0.2	210	−120	0.35	2E−11	−2E−11
0.4	−0.45	1.1	−0.004	3E−12	2E−12
0.6	−78	47	−0.13	−4E−12	9E−12
0.8	−6.4	−2.2	0.0054	−3E−12	−2E−12
1	−270	140	−0.44	−3E−11	3E−11

Равномерные ошибки численного решения задачи (1.16), взятые в различных точках $x\in[-1,1]$, при $z=2$ и при различных значениях N.

Таблица 3

X	2N+1				
	129	257	513	1025	2049
−1	−340	17	0.042	2E−09	−4E−12
−0.8	110	−6.7	−0.016	−8E−10	1E−12
−0.6	5.6	−0.31	−0.001	−1E−10	8E−13
−0.4	−63	2.9	0.0068	3E−10	2E−13
−0.2	46	−1.8	−0.004	−2E−10	9E−13
0	2E−12	1E−13	0	0	0
0.2	−2.4	1.3	0.0015	8E−11	−4E−13
0.4	0.93	0.48	0.0013	6E−11	−6E−13
0.6	−56	4	0.0096	5E−10	−1E−12
0.8	−310	16	0.039	2E−09	−3E−12
1	−1200	59	0.15	7E−09	−1E−11

Равномерные ошибки численного решения задачи (1.17), взятые в различных точках $x\in[-1,1]$, при $z=2$ и при различных значениях N.

Таблица 4

x	2N+1				
	129	257	513	1025	2049
−1	−48	−25	−0.05	−2E−09	−1E−11
−0.8	−46	−30	−0.061	−3E−09	−1E−11
−0.6	−57	−37	−0.074	−3E−09	−2E−11
−0.4	−71	−56	−0.11	−5E−09	−2E−11
−0.2	−82	−34	−0.066	−3E−09	−1E−11
0	0	0	0	0	0
0.2	−38	−15	−0.031	−1E−09	−6E−12
0.4	−48	−22	−0.044	−2E−09	−9E−12
0.6	−51	−15	−0.029	−1E−09	−6E−12
0.8	−51	−42	−0.086	−4E−09	−2E−11
1	−100	−46	−0.091	−4E−09	−2E−11

Равномерные ошибки численного решения задачи (1.17), взятые в различных точках $x\in[-1,1]$, при $z=3$ и при различных значениях N.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

[2] *Нерсесян А.Б.* Параметрическая аппроксимация и некоторые ее применения. − Докл. НАН Армении, т. 98 (1998), N 1.

[3] *Нерсесян А.Б., Саакян К.П., Погосян А.В.* Численное решение уравнений сверточного типа. − Докл. НАН Армении, т. 98 (1998), N 2, с. 96-101.

[4] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1969.