Հայաստանի Հանրապետության գիտությունների ազգային ակադեմիա
Երիտասարդ գիտաշխատողների հոդվածների ժողովածու
Национальная Академия наук Республики Армения, Сборник статей молодых научных сотрудников
National Academy of Sciences of Armenia, Collection of articles of the young researchers

Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտություններ | Физико-математические науки | Physico-mathematical sciences
1(2), 2001
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ | МАТЕМАТИКА | MATEMATICS

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С СИСТЕМОЙ СКВОЗНЫХ КРУГОВОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРЕЩИН ИЛИ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Какосян Г.

Институт механики НАН РА

В условиях антиплоской деформации рассматриваются две задачи о напряженном состоянии упругого кусочно-однородного пространства, состоящего из двух разнородных соосных бесконечных цилиндров. При этом предполагается, что на цилиндрической поверхности соединения разнородных цилиндров расположена система из произвольного конечного числа взаимно непересекающихся сквозных трещин круговоцилиндрических форм или абсолютно жестких тонких включений таких же форм. Получены определяющие уравнения поставленных задач в виде сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта, которые допускают замкнутые решения. Предложен численный метод для эффективного решения задач.

Կակոսյան Գ., **Հակահարթ դեֆորմացիայի վիճակում գտնվող համասեռ համառանցք անվերջ գլաններից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ տարածության լարված վիճակի մասին, երբ տարասեռ գլանների միացման գլանային մակերևույթի վրա տեղակայված է կամայական վերջավոր քանակությամբ շրջանագլանային տիպի միջանցիկ ճաքերի կամ նույն տիպի բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգ:** Դիտարկվում են երկու խնդիրներ հակահարթ դեֆորմացիայի վիճակում գտնվող, երկու համասեռ համառանցք անվերջ գլաններից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ տարածության համար: Ընդ որում ենթադրվում է, որ տարասեռ գլանների միացման գլանային մակերևույթի վրա տեղակայված է կամայական վերջավոր քանակությամբ փոխադարձաբար չհատվող շրջանա-գլանային տիպի միջանցիկ ճաքերի կամ նույն տիպի բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգ: Ստացված են դրված խնդիրների որոշիչ հավասարումները Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների տեսքով, որոնք թույլատրում են փակ լուծումներ: Խնդիրների էֆեկտիվ լուծման համար առաջարկված է թվային մեթոդ:

Kakosyan Gh. **Stressed state of pressed piece-homogenous space with the system of through round cylinder cracks or rough introduction during anti-plane deformation.** Two questions have been discussed under the circumstances of non-flat deformations, according to non-safe situation of the elastic, partially homogeneous space, which consist of two heterogeneous aligned infinite cylinders. Besides, it is supposed that in the cylindrical space of the heterogeneous cylinders' connection there is located a system of the optional, finite number, mutually non-traverse draughty cracks with circle-cylindrical forms or absolutely right fine connections of the adequate forms. Definite equations are received for achieving the aim, in the shape of singular integral equations by means of Halberd kernel, which assume only reserved solutions. Number method is suggested for the effective solution of the problem.

В условиях антиплоской деформации рассматриваются две задачи о напряженном состоянии упругого кусочно-однородного пространства, состоящего из двух разнородных соосных бесконечных цилиндров. При этом предполагается, что на цилиндрической поверхности соединения разнородных цилиндров расположена система из произвольного конечного числа взаимно непересекающихся сквозных трещин круговоцилиндрических форм или абсолютно жестких тонких включений таких же форм. Эти задачи относятся к обширным областям механики трещин и контактных задач теории упругости [1-6]. В эквивалентных формулировках такие задачи часто встречаются также в теории стационарной теплопроводности тел, в электростатике и в других отраслях математической физики [7].

1. Пусть отнесенное к цилиндрической системе координат $\{r, \nu, z\}$ упругое кусочно-однородное пространство состоит из двух соосных разнородных бесконечных цилиндров $\Omega+ = \{r > R;\ -\pi < \nu \le \pi;\ -\infty < z < \infty\}$ и $\Omega- = \{0 < r < R;\ -\pi < \nu \le \pi;\ -\infty < z < \infty\}$ с модулями сдвига *G+* и *G-*, соответственно, и в направлении оси *Oz* находится в условиях антиплоской деформации с базовой плоскостью $\{r, \nu\}$. В первой задаче предположим, что на поверхности соединения разнородных цилиндров *r=R* расположена система из произвольного конечного числа *N* взаимно непересекающихся сквозных трещин в форме круговоцилиндрических или круговодуговых полос $\widetilde{L} = \bigcup_{k=1}^{N} \{r = R; \alpha_k < \nu < \beta_k; -\infty < z < \infty\}$ на совокупности верхних (+) и нижних (-) берегов которых действуют касательные напряжения τ_{rz}. Эти условия на окружности *r=R* базовой плоскости $\{r, z\}$ запишутся в виде

$$\tau_{rz}^{\pm}(r, \nu)\Big|_{r=R} = G_{\pm} \frac{\partial u_z^{\pm}}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\tau_{\pm}(\nu) \quad (\nu \in L). \tag{1}$$

Здесь $u_z^{\pm}(r, \nu)$ - единственная отличная от нуля компонента смещений в областях $\omega_{\pm}$, где $\omega_+ = \{r > R;\ -\pi < \nu \le \pi\}$, $\omega_- = \{0 < r < R;\ -\pi < \nu \le \pi\}$, соответственно, в направлении оси *Oz*,

$\tau_{rz}^{\pm}(r,\nu)$ - касательные напряжения в тех же областях, а $\tau_{\pm}(\nu)$ наперед заданные гельдеровские функции на $L=\bigcup_{k=1}^{N}(\alpha_k,\beta_k)$, причем $\alpha_k<\beta_k\ (k\in\overline{1,N})$, $\beta_k<\alpha_{k+1}(k=\overline{1,N-1})$ и $\alpha_k,\beta_k\neq\pm\pi$.

Далее следуя изложениям в [8,9] методикам выведем определяющие уравнения поставленной задачи. С этой целью кусочно-однородную базовую плоскость вдоль окружности $r=R$ разрежем на области $\omega_{\pm}$, в которых, соответственно, рассмотрим следующие вспомогательные задачи Неймана:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_z^{\pm}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z^{\pm}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_z^{\pm}}{\partial \nu^2}=0 \quad ((r,\nu)\in\omega_{\pm});\\ \tau_{rz}^{\pm}\Big|_{r=R}=G_{\pm}\dfrac{\partial u_z^{\pm}}{\partial r}\Big|_{r=R}=-T_{\pm}(\nu) \quad (-\pi<\nu<\pi);\\ \dfrac{\partial u_z^{+}}{\partial r}\to 0(r\to\infty); \quad u_z^{-}\Big|_{r=0}<\infty;\end{cases} \tag{2a,d}$$

совпадающие с первой граничной задачей в областях $\omega_{\pm}$ при антиплоской деформации.

Здесь

$$T_{\pm}(\nu)=-\tau_{rz}^{\pm}\Big|_{r=R}=\begin{cases}\tau_{\pm}(\nu) & (\nu\in L);\\ \tau(\nu) & (\nu\in L',\ \ L'=[-\pi;\pi]\setminus L);\end{cases} \tag{3a,b}$$

где $-\tau(\nu)$ - неизвестные тангенциальные напряжения вне системы трещин L' на окружности $r=R$, причем из соответствующих условий равновесия вытекает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}T_{\pm}(\nu)d\nu=0. \tag{4}$$

При помощи решений граничной задачи (2a,d) при условиях (4) легко находим [10]

$$\frac{du_z^{+}(R,\nu)}{d\nu}=\pm\frac{R}{2\pi G_{\pm}}\int_{-\pi}^{\pi}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}T_{\pm}(\varphi)d\varphi \quad (-\pi<\nu<\pi); \tag{5}$$

где интеграл при $\varphi=\nu$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Теперь введем в рассмотрение плотность дислокаций смещений на берегах трещин:

$$\Phi(\nu)=\frac{du_z^{+}(R,\nu)}{d\nu}-\frac{du_z^{-}(R,\nu)}{d\nu}=\begin{cases}X(\nu) & (\nu\in L);\\ 0 & (\nu\in L').\end{cases}$$

Тогда из (5) сразу получим

$$\Phi(\nu)=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}\left[\frac{T_{+}(\varphi)}{G_{+}}+\frac{T_{-}(\varphi)}{G_{-}}\right]d\varphi \quad (-\pi<\nu<\pi). \tag{6}$$

Так как вследствие непрерывности смещений

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\nu)d\nu=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{du_z^{+}(R,\nu)}{d\nu}-\frac{du_z^{-}(R,\nu)}{d\nu}\right]d\nu=0,$$

то используя формулу обращения [11] сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром Гильберта (6), придем к следующему ключевому уравнению обсуждаемой задачи:

$$\frac{T_{+}(\nu)}{G_{+}}+\frac{T_{-}(\nu)}{G_{-}}=-\frac{1}{2\pi R}\int_{L}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}X(\varphi)d\varphi \quad (-\pi<\nu<\pi). \tag{7}$$

Рассматривая ключевое уравнение (7) на системе трещин L, для определения неизвестной функции $X_0(\nu)$ получим следующее определяющее СИУ с ядром Гильберта:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{L}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}X_0(\varphi)d\varphi=F_0(\nu) \quad (\nu\in L); \tag{8}$$

где введены безразмерные величины

$$X_0(\nu)=\frac{X(\nu)}{R}, \qquad F_0(\nu)=-\left[\frac{\tau_{+}(\nu)}{G_{+}}+\frac{\tau_{-}(\nu)}{G_{-}}\right]. \tag{9a,b}$$

Определяющее СИУ (8)-(9a,b) должно рассматриваться при условиях

$$\int_{\beta_k}^{\alpha_k} X_0(\nu)d\nu = 0 \qquad (k=\overline{1,N}), \tag{10}$$

выражающих условия непрерывности смещений в концевых точках трещин (α_k, β_k) $(k=\overline{1,N})$, составляющих систему L.

Рассматривая же ключевое уравнение (7) вне системы трещин, т.е. на L', получим

$$\tau(\nu) = -\frac{G_+}{2\pi(\chi+1)}\int_L ctg\frac{\varphi-\nu}{2}X_0(\varphi)d\varphi \quad (\chi = G_+/G_-) \quad (\nu \in L'). \tag{11}$$

Таким образом, решение поставленной задачи о напряженно-деформированном состоянии упругого кусочно-однородного пространства, описанного выше, с системой сквозных и соокружных дуговых трещин, свелось к решению СИУ (8)-(9a,b) при условиях (10). После его решения разрушающие касательные напряжения вне трещин, т.е. на L', будут определяться формулой (11).

Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) при помощи касательных напряжений будут определяться по следующим формулам [2]

$$K_{III}(\alpha_k) = \lim_{\nu\to\alpha_K-0}\left[\sqrt{2\pi R(\alpha_k-\nu)}\tau_{rz}\right] = -\lim_{\nu\to\alpha_K-0}\left[\sqrt{2\pi R(\alpha_k-\nu)}\tau(\nu)\right]$$
$$K_{III}(\beta_k) = \lim_{\nu\to\beta_K+0}\left[\sqrt{2\pi R(\nu-\beta_k)}\tau_{rz}\right] = -\lim_{\nu\to\beta_K+0}\left[\sqrt{2\pi R(\nu-\beta_k)}\tau(\nu)\right] \quad (k=\overline{1,N}) \tag{11a,b}$$

а при помощи плотности дислокаций $X(\nu)$ – по следующим формулам:

$$K_{III}(\alpha_k) = \frac{G_+}{\chi+1}\lim_{\nu\to\alpha_K+0}\left[\sqrt{2\pi R(\nu-\alpha_k)}X_0(\nu)\right]$$
$$K_{III}(\beta_k) = -\frac{G_+}{\chi+1}\lim_{\nu\to\beta_K-0}\left[\sqrt{2\pi R(\beta_k-\nu)}X_0(\nu)\right] \quad (k=\overline{1,N}, \quad \chi = G_+/G_-) \tag{12a,b}$$

2. Во второй задаче примем, что вместо системы трещин L имеем систему круговых абсолютно жестких тонких включений точно такой же конфигурации L. При этом считаем, что антиплоская деформация осуществляется посредством двух сосредоточенных сил величин $P_\pm$, приложенных в точках $M_{0\pm}(r_0^\pm, \nu_0^\pm)$, соответственно, областей $\omega_\pm$, причем сила величины P_+ направлена по положительному направлению оси *Oz*, а сила величины P_- - по отрицательному направлению оси *Oz*. Требуется определить скачки касательных напряжений τ_{rz} на системе включений L и, в конечном итоге, определить эти напряжения на всей окружности r=R.

Для вывода основных уравнений сформулированной задачи введем в рассмотрение те же самые величины, что и выше, и поступим вполне аналогично сделанному выше. В результате, получим

$$\frac{du_z^\pm(R,\nu)}{d\nu} = \pm\frac{R}{2\pi G_\pm}\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\varphi-\nu}{2}T_\pm(\varphi)d\varphi + f_\pm(\text{v}) \quad (-\pi<\nu<\pi); \tag{13}$$

где $f_\pm(\nu)$ - известные функции, учитывающие влияние указанных выше сосредоточенных сил. Эти функции легко вычисляются при помощи фундаментальной функции двухмерного уравнения Лапласа в полярных координатах.

Из постановки задачи следует, что в общем случае

$$u_z^+(R,\nu) = u_z^-(R,\nu) = \delta_k = const \quad (\nu \in (\alpha_k,\beta_k), \quad k=\overline{1,N}). \tag{14}$$

Для реализации условий (14) формулы (13) представим в виде

$$\frac{G_+}{R}\frac{du_z^+(R,\nu)}{d\nu} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\varphi-\nu}{2}T_+(\varphi)d\varphi + \frac{G_+}{R}f_+(\nu);$$
$$\frac{G_-}{R}\frac{du_z^-(R,\nu)}{d\nu} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\varphi-\nu}{2}T_-(\varphi)d\varphi + \frac{G_-}{R}f_-(\nu); \quad (-\pi<\nu<\pi) \tag{15a,b}$$

и введем в рассмотрение с обратным знаком функцию скачков касательных напряжений τ_{rz} на системе включений:

$$\Psi(\nu)=T_{-}(\nu)-T_{-}(\nu)=-\left[\tau^{+}_{rz}(R,\nu)-\tau^{-}_{rz}(R,\nu)\right]=\begin{cases}\psi(\nu) & (\nu\in L);\\ 0 & (\nu\in L').\end{cases}$$

Теперь складывая формулы (15a) и (15b) и учитывая условия (14), придем к следующему определяюшему СИУ обсуждаемой задачи:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L ctg\frac{\varphi-\nu}{2}\psi(\nu)d\nu=f(\nu)\qquad(\nu\in L);$$
$$f(\nu)=-\frac{1}{R}\left[G_{+}f_{+}(\nu)+G_{-}f_{-}(\nu)\right]\tag{16a,b}$$

СИУ (16a,b) должно рассматриваться при условиях

$$\int_{\alpha_K}^{\beta_K}\psi(\nu)d\nu=0(k=\overline{1,N});\tag{17}$$

выражающих условия равновесия каждого отдельного абсолютно жесткого включения.

Далее на основании (13) можем записать

$$\frac{1}{R}\left[\frac{du_z^{+}(R,\nu)}{d\nu}-\frac{du_z^{-}(R,\nu)}{d\nu}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}\left[\frac{T_{+}(\varphi)}{G_{+}}+\frac{T_{-}(\varphi)}{G_{-}}\right]d\varphi+\frac{1}{R}\left[f_{+}(\nu)-f_{-}(\nu)\right]\quad(-\pi<\nu<\pi).$$

Отсюда, приняв во внимание, что с учетом (14) $u_z^{+}(R,\nu)=u_z^{-}(R,\nu)$ на всей окружности $r=R$ $(-\pi<\nu<\pi)$, по формуле обращения получим

$$\frac{T_{+}(\nu)}{G_{+}}+\frac{T_{-}(\nu)}{G_{-}}=\frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi}^{\pi}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}\left[f_{+}(\varphi)-f_{-}(\varphi)\right]d\varphi\qquad(-\pi<\nu<\pi).$$

Рассматривая это уравнение на системе включений L, находим

$$\frac{\tau_{+}(\nu)}{G_{+}}+\frac{\tau_{-}(\nu)}{G_{-}}=\frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi}^{\pi}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}\left[f_{+}(\varphi)-f_{-}(\varphi)\right]d\varphi\qquad(\nu\in L),$$

а рассматривая его вне системы включений, т.е. на L', находим

$$\tau(\nu)=\frac{G_{+}}{2\pi R(1+\chi)}\int_{-\pi}^{\pi}ctg\frac{\varphi-\nu}{2}\left[f_{+}(\varphi)-f_{-}(\varphi)\right]d\varphi\quad(\chi=G_{+}/G_{-})\quad(\nu\in L').$$

Последние два равенства вместе с функцией $\varphi(\nu)$, определяемой из СИУ (16a,b)-(17), полностью определяют касательные напряжения τ_{rz} на всей окружности $r=R$..

3. При помощи известных методов краевых задач теории аналитических функций [11-12] можно построить замкнутые решения СИУ (8)-(10) и (16a,b)-(17). Однако эти решения содержат сингулярные интегралы с ядром Гильберта, вычисление которых сопряжено с преодолением значительных трудностей аналитического и вычислительного характера. Поэтому здесь, как в [10] и [13], укажем также на возможность решения упомянутых уравнений известным численно аналитическим методом решения сингулярных интегральных уравнений [4] и [14-15]. Поскольку уравнения (8)-(10) и (16a,b)-(17) идентичны, этот метод решения вкратце изложим применительно лишь к одному из них, например, к уравнению (8)-(10).

С этой целью сначала СИУ (8) преобразуем к СИУ с ядром Коши, положив

$$x=tg\frac{\nu}{2},\;\; s=tg\frac{\varphi}{2};\;\; c_k=tg\frac{\alpha_k}{2},\;\; d_k=tg\frac{\beta_k}{2}\quad(k=\overline{1,N})\tag{18}$$

В результате, уравнение (8) преобразуется в СИУ с ядром Коши:

$$\int_{L_*}\frac{X_*(s)ds}{s-x}=F_*(x)\qquad(x\in L_*)$$

$$X_*(x)=\frac{2}{1+x^2}X_0(2arctgx),$$

$$F_*(x)=-\frac{2\pi}{1+x^2}\left[\frac{1}{G_{+}}\tau_{+}(2arctgx)+\frac{1}{G_{-}}\tau_{-}(2arctgx)\right]=\frac{2\pi}{1+x^2}F_0(2arctgx),$$

$$L_* = \bigcup_{k=1}^{N}(c_k, d_k), \quad L'_* = R \setminus L_*;$$

а условия (10) – в условия

$$\int_{c_K}^{d_K} X_*(x)dx = 0 \quad (k = \overline{1,N}).$$

Далее следуя изложенному в [10], положим

$$x = \frac{d_k - c_k}{2}t + \frac{d_k + c_k}{2}, \quad s = \frac{d_k - c_k}{2}u + \frac{d_k + c_k}{2} \quad (-1 \le t,\ u \le 1; \quad k = \overline{1,N}).$$

После простых преобразований определяющее СИУ (8) перейдет в следующую систему СИУ

$$\int_{-1}^{1}\frac{X_k(u)du}{u-t} + \sum_{m=1}^{N}{}' \int_{-1}^{1} \mathrm{K}_{km}(t,u)X_m(u)du = F_k(t) \qquad (k = \overline{1,N},\ t \in (-1;1))$$

$$X_k(t) = X_*\left(\frac{d_k - c_k}{2}t + \frac{d_k + c_k}{2}\right); \quad F_k(t) = F_*\left(\frac{d_k - c_k}{2}t + \frac{d_k + c_k}{2}\right); \tag{19a,c}$$

$$K_{km}(t,u) = \left(u - \frac{d_k - c_k}{d_m - c_m}t + \frac{d_m + c_m}{d_m - c_m} - \frac{d_k + c_k}{d_m - c_m}\right)^{-1}; \quad K_{k,m}(t,u) = 1/(u-t); \ \ (k,m = \overline{1,N}).$$

При этом условия (10) окончательно перейдут в следующие:

$$\int_{-1}^{1} X_k(t)dt = 0 \quad (k = \overline{1,N}). \tag{20}$$

Отметим, что в сумме формулы (19a), штрих означает пропускание слагаемого при m=k. Теперь решение системы СИУ (19a) представим в виде

$$X_k(u) = \frac{\psi_k(u)}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (-1 < u < 1;\ k = \overline{1,N}), \tag{21}$$

где $\psi_k(u)$- регулярные функции, удовлетворяющие на отрезке [-1;1] условию Гельдера. Далее подставляя (21) в систему СИУ (19a,c) и в условия (20), на основании квадратурных формул Гаусса для сингулярных и обычных интегралов [4], сведем их к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{M}\sum\limits_{n-1}^{M}\psi_k(u_n)[\dfrac{1}{u_n - u_r} + \sum\limits_{m=1}^{N}{}' K_{km}(t_r, u_n)] = F_k(t_r) \\ \sum\limits_{n-1}^{M}\psi_k(u_n) = 0 \quad (k = \overline{1,N}, r = \overline{1,M-1}, M = 1,2\ldots) \end{cases} \tag{22}$$

Здесь

$$u_n = \cos(\frac{2n-1}{2M}\pi), \quad t_r = \cos(\frac{\pi r}{M}) \qquad (n = \overline{1,M};\ \ r = \overline{1,M-1}) \tag{23a,b}$$

чебышевские узлы, т.е корни, соответственно, уравнений

$$T_M(u) = 0, \qquad U_{M-1}(t) = 0,$$

где $T_M(u)$ и $U_{M-1}(t)$ -многочлены Чебышева соответсвенно, первого и второго родов.

Обращаясь к КИН (12a,b), заметим, что если в формулах для КИН в случае однородного тела через функцию плотности дислокаций [4].

$$K_{III}\binom{\alpha_k}{\beta_k} = \pm\frac{G}{2}\lim_{\substack{v\to\alpha_K+0\\ v\to\beta_K-0}}\left[\sqrt{2\pi \mathrm{R}\left|\begin{matrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{matrix} - v\right|}X_0(v)\right]$$

заменить модуль сдвига G на приведенный модуль сдвига G_0:

$$G_0 = \frac{2G_+G_-}{G_+ + G_-} = \frac{2G_+}{1+x} \qquad (x = G_+/G_-),$$

т.е. если кусочно-однородное тело с упругими константами G_+/G_- заменить однородным телом с упругой константой G_0, то они перейдут в формулы (12a,b). Следовательно, замена G на G_0 в указанном смысле при антиплоской деформации устанавливает некоторое соответствие между кусочно-однородными и однородными телами с трещинами.

Далее при помощи формул (18) КИН (12a,b) преобразуем применительно к расчетным функциям $\psi_k(t)$.

После простых преобразований для безразмерных КИН получим следующие формулы:

$$K_{III}^0(\alpha_k) = \frac{K_{III}(\alpha_k)}{\sqrt{\pi R} G_+} = \frac{\sqrt{\mathrm{tg}(\beta_k/2) - \mathrm{tg}(\alpha_k/2)}}{2(\mathrm{x}+1)\cos(\alpha_k/2)}\psi_k(-1) \quad (\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{N}});\ \mathrm{x} = \mathrm{G}_+/\mathrm{G}_-)$$

$$K_{III}^0(\beta_k) = \frac{K_{III}(\beta_k)}{\sqrt{\pi R} G_+} = -\frac{\sqrt{\mathrm{tg}(\beta_k/2) + \mathrm{tg}(\alpha_k/2)}}{2(\mathrm{x}+1)\cos(\beta_k/2)}\psi_k(1) \qquad (24a,b)$$

Формулы (24a,b) имеют место для к-ой трещины $(\alpha_k, \beta_k)\,(\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{N}})$ системы трещин L.

Отметим, что входящие в (24a,b) величины $\psi_k(\pm 1)$ вычисляются при помощи интерполяционного полинома Лагранжа для функций $\psi_k(\mathrm{t})$ по чебышевским узлам (23a). Они имеют вид [4]

$$\psi_k(1) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}(-1)^{n+1}\psi_k(u_n)ctg\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right);$$

$$\psi_k(-1) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}(-1)^{M+n}\psi_k(u_n)ctg\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right);$$

где $\psi_k(u_n)$ $(\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{N}};\ \mathrm{n}=\overline{1,\mathrm{M}})$ – решения основной системы линейных алгебраических уравнений (22). Подчеркнем, что значения $\psi_k(\pm 1)$ зависят от выбора натурального числа M, т.е. от числа узлов, а так же от характерных параметров α_k, β_k и χ.

Автор благодарит С.М. Мхитаряна за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Разрушение, т. 2. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975.
[2] *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов, справочное пособие, т.2 – Киев, Наукова думка, 1988.
[3] Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Под редакцией Ю.Мураками. Т. 1. – М.:Мир, 1990.
[4] *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976.
[5] *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974.
[6] Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1977.
[7] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математичской физики. – М.: Наука, 1977.
[8] *Мхитарян С.М.* О двух смешанных задачах, связаных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. – Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд-во "Наука" НАН РА, 1993, с. 129-143.
[9] *Акопян В.Н.* Антиплоское напряженное состояние составного анизатропного клина, содержащего трещину и абсолютно жесткое включение. – Современные проблемы теории контактных взаимодействий. Ереван: Изд-во "Наука" НАН РА, 1996, с. 45-50.
[10] *Какосян Г.Э.* Об одной смешанной граничной задаче для упругово пространства с цилиндрическом отверстием при антиплоской деформации. – Докл. XII респубп. конф. молод. уч. "Механика". Ереван, 2001.
[11] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
[12] Чибрикова Л.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. – Краевые задачи теории аналитических функциий. Киев: Изд-во КГУ, 1962, т. 122, N$_{\text{o}}$ 3, с. 93-124.
[13] *Какосян Г.Э.* Об одной смешанной граничной задаче теории стационарной теплопроводности для кругового кольца. – Информационные технологии и управление, 1. Ереван, 2000, с. 68-78.
[14] *Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S.* The numerical solutions of singular integral equations. –Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. Leyden: Noordhoff Intern. Pub., 1973, p. 368-425.
[15] *Theocaris P.S., Iokimidis N.I.* Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. – Quart. Appl. Math., v. XXXV, N$_{\text{o}}$ 1, 1977, p. 173-185.