

О. М. Сапоиджян

К разложению в ряд отображающей функции Кристоффеля—Шварца

При применении метода конформного отображения часто бывает необходимо разложить отображающую функцию в степенной ряд. В случае отображения внутренней и внешней областей многоугольника на область единичного круга такое разложение осуществляется путем разложения в ряд подинтегрального выражения функции Кристоффеля—Шварца [1]. В настоящей заметке дается другой, более общий и, с точки зрения вычислений, простой способ разложения в ряд указанной функции. Сущность способа заключается в том, что разлагается в ряд не подинтегральное выражение функции Кристоффеля—Шварца, а сам интеграл.

§ 1. Случай отображения внутренней области многоугольника на область единичного круга

Отображение внутренней области многоугольника на область единичного круга осуществляется функцией Кристоффеля—Шварца

$$z = \omega(\zeta) = A \int_0^{\zeta} (a_1 - t)^{\alpha_1-1} (a_2 - t)^{\alpha_2-1} \dots (a_n - t)^{\alpha_n-1} dt + B, \quad (1.1)$$

где z и ζ — комплексные координаты, соответственно для областей многоугольника и единичного круга, n — число сторон многоугольника, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — комплексные координаты точек на окружности единичного круга, соответствующие вершинам многоугольника, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника. A и B — вообще комплексные постоянные, характеризующие положение многоугольника и его размеры.

Согласно формуле Маклорена, имеем

$$\omega(\zeta) = \omega(0) + \frac{\omega'(0)}{1!} \zeta + \frac{\omega''(0)}{2!} \zeta^2 + \dots \quad (1.2)$$

Причем, в силу (1.1), $\omega(0) = B$.

Для нахождения коэффициентов ряда (1.2) заранее установим связь между производными функции $\omega(\zeta)$.

Из (1.1) получаем

$$\omega(\zeta) = A(a_1 - \zeta)^{\alpha_1-1} (a_2 - \zeta)^{\alpha_2-1} \dots (a_n - \zeta)^{\alpha_n-1} \dots \quad (1.3)$$

Отсюда следует

$$\omega''(\zeta) = \omega(\zeta) \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1 - \alpha_s}{a_s - \zeta}.$$

Применяя к этой формуле правило дифференцирования произведения двух функций, найдем связь между производными функции $\omega(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \omega^{(k)}(\zeta) &= \omega^{(k-1)}(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s - \zeta} + (k-2) \omega^{(k-2)}(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{(a_s - \zeta)^2} + \\ &+ \dots + (k-2)(k-3) \dots (k-1) \omega^{(k-1)}(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{(a_s - \zeta)^k} + \dots + \\ &+ (k-2)! \omega(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{(a_s - \zeta)^{k-1}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Эта формула позволяет определить коэффициенты ряда (1.2). Для этого примем в (1.4) $\zeta = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \omega^{(k)}(0) &= \omega^{(k-1)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s} + (k-2) \omega^{(k-2)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^2} + \\ &+ \dots + (k-2)! \omega(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^{k-1}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Далее обозначим

$$C_k = \frac{\omega^{(k)}(0)}{(k-1)! \omega(0)}, \quad \text{причем } C_1 = 1. \quad (1.6)$$

Выразив (1.2) и (1.5) через C_k и обозначив $\omega(0) = C$, получаем

$$\omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{C_2}{2} \zeta^2 + \frac{C_3}{3} \zeta^3 + \dots \right) + B, \quad (1.7)$$

$$C_k = \frac{1}{k-1} \left(C_{k-1} \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s} + C_{k-2} \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^2} + \dots + C_1 \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^{k-1}} \right), \quad (1.8)$$

($k = 2, 3, \dots$),

причем $C_1 = 1$.

Таким образом, в случае отображения внутренней области многоугольника на область единичного круга отображающая функция разлагается в ряд (1.7), коэффициенты которого определяются из линейных рекуррентных уравнений (1.8) последовательными подстановками.

§ 2. Случай отображения внешней области многоугольника на область единичного круга

Внешняя область многоугольника отображается на область единичного круга с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = A \int_1^{\zeta} (a_1 - t)^{\alpha_1' - 1} (a_2 - t)^{\alpha_2' - 1} \dots (a_n - t)^{\alpha_n' - 1} dt + B', \quad (2.1)$$

где $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n'$ — внешние углы многоугольника.

Обозначим

$$\Omega(\zeta) = \zeta^2 \omega(\zeta). \quad (2.2)$$

Тогда, согласно (2.1), будем иметь

$$\Omega(\zeta) = A(a_1 - \zeta)^{\alpha_1' - 1} (a_2 - \zeta)^{\alpha_2' - 1} \dots (a_n - \zeta)^{\alpha_n' - 1}. \quad (2.3)$$

Так как эта функция регулярна при $\zeta = 0$, то ее можно разложить в ряд

$$\Omega(\zeta) = \Omega(0) + \frac{\Omega'(0)}{1} \zeta + \frac{\Omega''(0)}{2!} \zeta^2 + \dots \quad (2.4)$$

Внеся (2.4) в (2.2), определяем $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta) = \frac{\Omega(0)}{\zeta^2} + \frac{\Omega'(0)}{1} \frac{1}{\zeta} + \frac{\Omega''(0)}{2!} + \frac{\Omega'''(0)}{3!} \zeta + \dots$$

Интегрируя, получаем

$$\omega(\zeta) = -\frac{\Omega(0)}{\zeta} + \frac{\Omega'(0)}{1} \ln \zeta + \frac{\Omega''(0)}{2!} \frac{\zeta}{1} + \frac{\Omega'''(0)}{3!} \frac{\zeta^2}{2} + \dots + B, \quad (2.5)$$

где B — вообще комплексное постоянное.

Способом, примененным при выводе формулы (1.5), из (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \Omega^{(k)}(0) &= \Omega^{(k-1)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s} + (k-1) \Omega^{(k-2)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^2} + \\ &+ \dots + (k-1)(k-2) \dots (k+1-\lambda) \Omega^{(k-\lambda)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^\lambda} + \\ &+ \dots + (k-1)! \Omega(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $k=1$ эта формула дает

$$\Omega'(0) = \Omega(0) \sum_{s=1}^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s}.$$

Но, как известно, для случая отображения внешней области

$$\sum_{s=1}^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s} = 0.$$

Следовательно, $\Omega'(0) = 0$.

Имея в виду это, из (2.5) получим

$$\omega(\zeta) = -\frac{\Omega(0)}{\zeta} + \frac{\Omega''(0)}{2!} \frac{\zeta}{1} + \frac{\Omega'''(0)}{3!} \frac{\zeta^2}{2} + \dots + B. \quad (2.7)$$

Обозначим

$$D_{k-1} = -\frac{\Omega^{(k)}(0)}{k! \Omega(0)}, \quad \text{причем } D_{-1} = -1, D_0 = 0. \quad (2.8)$$

Выражая (2.7) и (2.6) через коэффициенты D_k и обозначая $D = -\Omega(0)$, получаем

$$\omega(\zeta) = D \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{D_1}{1} \zeta + \frac{D_2}{2} \zeta^2 + \dots \right) + B; \quad (2.9)$$

$$D_k = \frac{1}{k+1} \left(D_{k-2} \sum_{s=1}^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^2} + D_{k-3} \sum_{s=1}^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^3} + \dots + D_{-1} \sum_{s=1}^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^{k+1}} \right) \quad (2.10)$$

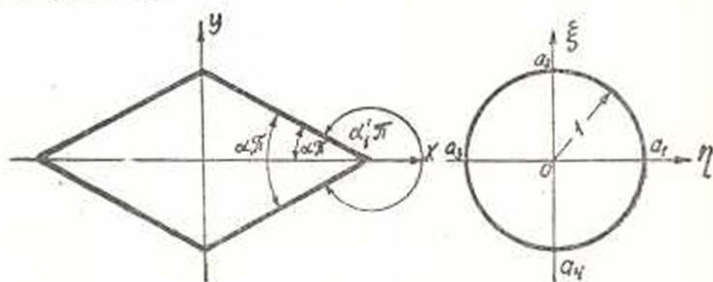
$$(k = 1, 2, \dots),$$

причем $D_{-1} = -1, D_2 = 0$.

Итак, в случае отображения внешней области многоугольника на область единичного круга отображающая функция разлагается в ряд (2.9), коэффициенты которого определяются из системы линейных рекуррентных уравнений (2.10).

§ 3. Примеры

1. Отображение внутренней области ромба на область единичного круга (фиг. 1).



Фиг. 1.

Согласно фиг. 1, имеем $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$, $\alpha_1 =$
 $= \alpha_3 = 2\alpha$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 1 - 2\alpha$.

Внеся значения этих параметров в (1.8), получаем

$$C_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$C_1 = 1;$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{k} \left[(1 - 4\alpha)(C_{2k-1} + C_{2k-5} + \dots + C_1) + \right. \\ \left. + (C_{2k-3} + C_{2k-7} + \dots + C_1) \right] \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.1)$$

Эту систему уравнений можно заменить более простой системой. Для этого перепишем (3.1), заменив в нем k через $k-2$:

$$C_{2k-3} = \frac{1}{k-2} \left[(1 - 4\alpha)(C_{2k-5} + C_{2k-9} + \dots + C_1) + \right. \\ \left. + (C_{2k-7} + C_{2k-11} + \dots + C_1) \right] \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (3.2)$$

Умножив (3.1) на k , а (3.2) на $k-2$ и вычитая полученные результаты один из другого, получаем

$$C_{2k+1} = \frac{1}{k} \left[(1 - 4\alpha)C_{2k-1} + (k-1)C_{2k-3} \right] \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (3.3)$$

$$C_1 = 1.$$

Из системы (3.3) легко можно определить коэффициенты $C_3, C_5, \dots$. Например:

$$C_3 = 1 - 4\alpha, \quad C_5 = \frac{1}{2} \left[(1 - 4\alpha)C_3 + 1 \right], \\ C_7 = \frac{1}{3} \left[(1 - 4\alpha)C_5 + 2C_3 \right], \dots$$

При $\alpha = \frac{1}{4}$ ромб обращается в квадрат, и тогда из (3.3) получаем

$$C_{4k-1} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$C_{4k+1} = \frac{2k-1}{2k} C_{4k-3},$$

$$C_1 = 1.$$

Решение последней системы будет

$$C_{4k+1} = \frac{2.6.10 \dots (4k-2)}{4^k k!}, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Внеся этот результат в (1.7), получаем

$$\omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{\zeta^5}{10} + \frac{\zeta^9}{24} + \dots \right).$$

что совпадает с известным результатом.

При $\alpha = 0$ ромб превращается в бесконечную полосу, и тогда (3.3) даст

$$C_1 = 1,$$

$$C_{2k+1} = \frac{1}{k} \left[C_{2k-1} + (k-1)C_{2k-3} \right] \\ (k = 1, 2, \dots).$$

Единственное решение этой системы будет

$$C_{2k+1} = 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

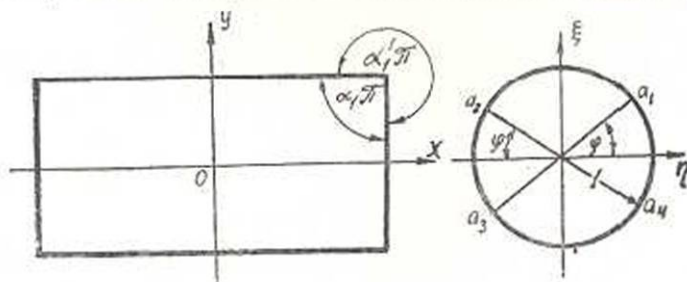
Внеся эти значения коэффициентов в (1.7), получаем

$$\omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \dots \right) = \frac{C}{2} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{2b}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

где $2b$ — ширина полосы.

Полученный результат также известен.

2. Отображение внутренней области прямоугольника (фиг. 2).



Фиг. 2.

Согласно фиг. 2, имеем $a_1 = e^{i\varphi_1}$, $a_2 = -e^{-i\varphi_2}$, $a_3 = -e^{i\varphi_3}$, $a_4 = e^{-i\varphi_4}$,

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}.$$

Внеся значения этих параметров в (1.8), получаем

$$C_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$C_1 = 1,$$

$$C_{2k+1} = \frac{1}{k} \left(C_{2k-1} \cos 2\varphi + C_{2k-3} \cos 4\varphi + \dots + C_1 \cos 2k\varphi \right). \quad (3.4)$$

Выбором параметра φ определяется отношение сторон прямоугольника.

3. Отображение внешней области ромба на область единичного круга (фиг. 1).

Согласно фиг. 1, имеем $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$, $\alpha_1' = \alpha_3' = 2(1 - \alpha)$, $\alpha_2' = \alpha_4' = 1 + 2\alpha$.

Имея в виду эти данные, из (2.10) получаем

$$D_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$D_{-1} = -1.$$

$$D_{2k+1} = -\frac{1}{k+1} \left[(1 - 4\alpha) (D_{2k+1} + D_{2k-5} + \dots + D_{-1}) + \right. \\ \left. + (D_{2k-3} + D_{2k-7} + \dots + D_{-1}) \right] \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3.5)$$

Отсюда способом, примененным в примере 1, найдем

$$D_{-1} = -1,$$

$$D_{2k+1} = \frac{1}{k+1} \left[(k-2) D_{2k-3} - (1-4\alpha) D_{2k-1} \right], \\ (k = 0, 1, \dots). \quad (3.6)$$

В случае квадрата $\left(\alpha = \frac{1}{4}\right)$ из (3.6) получаем

$$D_{4k+1} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$D_{-1} = -1,$$

$$D_{4k-1} = \frac{2k-3}{2k} D_{4k-5},$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Тогда, согласно (2.9), будем иметь

$$w(\zeta) = D \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta^7}{56} + \dots \right),$$

что совпадает с известным результатом.

4. Отображение внешней области прямоугольника на единичный круг (фиг. 2).

Имеем $a_1 = e^{i\varphi}$, $a_2 = -e^{-i\varphi}$, $a_3 = -e^{i\varphi}$, $a_4 = e^{-i\varphi}$, $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' =$
 $\alpha_4' = \frac{3}{2}$, $B = 0$.

Из (2.10) получаем

$$D_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$D_{-1} = -1,$$

$$D_{2k+1} = -\frac{1}{k+1} \left[D_{2k-1} \cos 2\varphi + D_{2k-3} \cos 4\varphi + \dots + D_{-1} \cos (2k+2)\varphi \right],$$

$$(k = 0, 1, \dots).$$
(3.7)

Параметр φ определяет отношение сторон прямоугольника. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{6}$, из (3.7) получаем

$$D_1 = \frac{1}{2}, \quad D_3 = -\frac{3}{8}, \quad D_5 = -\frac{3}{16}, \dots$$

Внося значения этих коэффициентов в (3.9) и ограничиваясь четырьмя членами ряда, получаем

$$\omega(\zeta) = D \left(\frac{1}{\zeta} + 0,5\zeta - 0,125\zeta^3 - 0,0375\zeta^5 \right).$$

Отношение сторон многоугольника будет $a:b \approx 3,2$.

Точно такой результат получен Г. Н. Савиным [1], применившим способ разложения в ряд подынтегрального выражения функции Кристоффеля — Шварца.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 3 VI 1956

Օ. Մ. Սափոնճյան

ԿՐԻՍՏՈՖԵԼ—ՇՎԱՐՑԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ՇԱՐՔԻ ՎԵՐԱԾԵԼՈՒ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդի օգտագործման շնորհիվ համարի մոնոլոգիզմ է լինում արտապատկերման ֆունկցիան վերածել շարքի: Իսկ մանկյան ներքին և արտաքին տիրույթները միավոր շրջանի տիրույթի վրա արտապատկերելիս այդպիսի վերածումն իրագործվում է Կրիստոֆել—Շվարցի արտապատկերման ֆունկցիայի ենթաինտեգրալ արտահայտությամբ շարքի վերածելու միջոցով:

Այս նոթի մեջ նույն նպատակի համար շարքի է վերածված Կրիստոֆել—Շվարցի ինտեգրալը: Ստացված արդյունքներն բնականորեն և հեշտ կիրառելի:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий, М.—Л., 1951.