

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

К вопросу о распределении атмосферного давления
на уровне моря в общей циркуляции атмосферы

§ 1. Введение

При построении моделей атмосферных движений приходится учитывать многие факторы, действующие в реальной бароклинической атмосфере, как, например, приток тепла от Солнца, силу тяжести, отклоняющую силу вращения Земли, силы внутреннего трения, топографию местности и т. д. Однако при построении математической теории, с целью получения качественных и количественных оценок, всякий раз приходится идти на различные упрощения, основанные на следующих соображениях.

Критические скорости в атмосфере весьма малы, поэтому поток воздуха в ней всегда турбулентный. Можно показать, что в известном приближении силы внутреннего трения прямо пропорциональны градиенту скорости, т. е.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn}, \quad (1.1)$$

где τ — касательное напряжение, v — скорость, μ — коэффициент. При этом оказывается, что μ — коэффициент турбулентной вязкости — в сотни тысяч раз больше молекулярного коэффициента динамической вязкости.

Установлено, что коэффициент турбулентной вязкости (или турбулентного перемешивания) зависит от скорости ветра, от вертикального температурного градиента (т. е. от устойчивости стратификации атмосферы), от шероховатости земной поверхности и т. д.

Далее, так как атмосферу можно рассматривать как тонкую пленку больших горизонтальных размеров, то отсюда следует, что вблизи земной поверхности всегда существует планетарный пограничный слой, в пределах которого турбулентная вязкость играет значительную роль, в то время как вне этого слоя турбулентная вязкость будет играть ничтожно малую роль.

Н. Е. Кочин в работе, посвященной упрощению уравнений гидромеханики для случая общей циркуляции атмосферы [1], считает, что в каждый данный момент известно распределение температуры

во всем пространстве и давления на уровне моря; далее, по этому распределению он ищет распределение давления и вектора скорости частицы воздуха во всем пространстве.

Исходными в задаче Кочина являются уравнения Навье — Стокса, которые он записывает в сферических координатах.

При использовании граничных условий на поверхности Земли и благодаря малости отношения δ/a , где δ — толщина тропосферы, a — радиус земного шара, эти уравнения весьма значительно упрощаются.

Так, пользуясь вышеуказанными условиями и уравнением неразрывности, Кочин показал, что в случае стационарной зональной циркуляции атмосферы вертикальные скорости во много раз меньше горизонтальных и что силы вязкости и Кориолиса имеют один и тот же порядок величины.

Кочин произвел также оценку толщины пограничного слоя, причем полученный им результат по-новому ставит вопрос о влиянии вязкости на циркуляцию атмосферы.

Итак, для случая нестационарной незональной циркуляции атмосферы полученная Кочиним система уравнений гидродинамики имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = 2\omega \cos \theta \rho v_\lambda - \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right), \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} = -2\omega \cos \theta \rho v_\theta - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = 0, \quad (1.4)$$

$$v_z = -\frac{1}{a\rho \sin \theta} \int_0^z \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_\lambda) + \frac{\partial}{\partial t} (a\rho \sin \theta) \right] dz, \quad (1.5)$$

$$p = R\rho T, \quad (1.6)$$

Здесь система координат сферическая, причем z — высота над уровнем моря, θ — дополнение широты, увеличивающееся к югу, λ — долгота, увеличивающаяся к востоку,

v_θ, v_λ, v_z — составляющие вектора скорости, соответственно, по осям θ, λ, z ,

p, ρ, T — давление, плотность, температура атмосферы,

a — радиус земного шара,

ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси,

g — ускорение силы тяжести,

R — газовая постоянная,

μ — коэффициент турбулентной вязкости $\left(\mu = \frac{\rho}{\rho} \right)$.

В случае стационарной незональной циркуляции атмосферы система (1.2) — (1.6) еще более упрощается и принимает следующий вид (в случае $\mu = \text{const.}$):

$$\mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + 2\omega \cos \theta \rho v_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (1.7)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2} - 2\omega \cos \theta \rho v_\theta = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (1.4)$$

$$v_z = -\frac{1}{a \rho \sin \theta} \int_0^z \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_\lambda) \right] dz, \quad (1.9)$$

$$p = \rho RT. \quad (1.6)$$

И, наконец, в случае стационарной зональной циркуляции атмосферы эта система принимает особенно простой вид, так как ни одна из входящих в нее величин не будет зависеть от λ .

Для полной определенности этих систем следует поставить следующие граничные условия: прилипание к Земле, ограниченность скорости на бесконечности; кроме того, задаются распределение давления на уровне моря и температура во всем пространстве, т. е.

$$p|_{z=0} = p_0(\theta, \lambda, t) \text{ и } T(z, \theta, \lambda, t).$$

Для первого случая задается также начальное состояние атмосферы.

Таким образом, Кочин подробно рассмотрел влияние вязкости на гидродинамические процессы в атмосфере и этим положил начало многим новым исследованиям в области математической теории общей циркуляции атмосферы.

А. А. Дородницын показал [2], что задание распределения атмосферного давления на уровне моря не обязательно, ибо оно также может быть получено теоретическим путем. Дородницын рассматривает атмосферу как пограничный слой и в качестве исходных данных считает известным зональное распределение температуры во всей атмосфере. Таким образом, по Дородницыну, в случае стационарной зональной циркуляции задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta \rho v_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta \rho v_\theta = 0, \quad (1.11)$$

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T} \right]. \quad (1.12)$$

$$v_z = - \frac{1}{a\rho \sin \theta} \int_0^z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) dz, \quad (1.13)$$

при следующих граничных условиях: при $z = 0$, $v_\theta = v_\lambda = v_z = 0$, а при $z \rightarrow \infty$; $v_\theta = v_z = 0$, $v_\lambda \approx 3\omega H \sin \theta$.

Второе граничное условие устанавливается следующим образом: основываясь на данных наблюдений над серебристыми облаками, Дородницын предлагает учесть отставание атмосферы от Земли на больших высотах и считать на бесконечности абсолютные скорости конечными.

Тогда v_θ и v_λ из уравнений движения (1.10) и (1.11) можно выразить через ρ_θ , пользуясь (1.12).

Затем, подставляя эти выражения в (1.13), будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) dz = 0, \quad (1.14)$$

откуда и определяется ρ_θ , а следовательно, и ρ , v_θ , v_λ , v_z .

Дородницын принял μ постоянным, равным 1 MTS, при этом распределение ρ_θ получилось качественно хорошим, однако вычисленные градиенты $d\rho_\theta/d\theta$ оказались преувеличенными.

Коэффициент μ в предыдущих случаях был принят постоянным, но мы уже отмечали его большую изменчивость. По этому поводу заметим, что для коэффициента μ предложено много различных моделей.

И. А. Кибель [3] при решении задачи о распределении ветра по высоте, принимая по Прандтлю вблизи шероховатой стенки с шероховатостью z_0 условие

$$|v| = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{k} \ln \frac{z}{z_0},$$

где $k = 0,36 \div 0,40$, z — расстояние от стенки, τ_0 — касательное напряжение на стенке, и соотношение

$$\tau_0 = \rho v \left| \frac{dv}{dz} \right|,$$

приходит к выводу, что v вблизи такой стенки растет с высотой линейно, считая, далее, что этот закон имеет место во всей толще атмосферы. Но если эта модель хорошо описывает явление вблизи земной поверхности, то на больших высотах она уже неверна. Поэтому М. И. Юдин и М. Е. Швец [4] при изучении того же вопроса предложили следующую модель:

$$v = \begin{cases} cz; & \text{при } z \leq h \\ ch; & \text{при } z > h, \end{cases} \quad (1.15)$$

где c и h — постоянные. Расчеты по этой модели дали вполне удовлетворительное согласие с наблюдениями.

Существуют еще и другие модели, на которых мы не останавливаемся, исходя из того, что для наших целей достаточно пользоваться одной из вышеприведенных. Заметим, что А. М. Обухов [5] теоретически рассмотрел вопрос об изменении коэффициента турбулентного перемешивания с высотой и пришел к выводу, что указанный коэффициент вблизи земной поверхности в некотором слое, названном им подслоем динамической турбулентности, растет с высотой линейно, а на больших высотах асимптотически приближается к некоторому предельному значению.

Е. Н. Блинова в работе [6], посвященной определению давления на уровне моря, пошла по новому пути. Так, если Кочин считал известным распределение давления на уровне моря и температуры во всем пространстве, то Блинова не вводит этих ограничений и строит свою теорию, привлекая к рассмотрению уравнения гидротермодинамики идеальной бароклинической жидкости на сфере.

Уравнения движения берутся в форме Эйлера, причем в качестве третьего уравнения берется обычное уравнение статики. Задача решается на некоторой средней (так называемой бездивергентной) высоте, на которой

$$\rho v_z \rightarrow \max, \text{ т. е. } \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \approx 0. \quad (1.16)$$

Все движение воздушных масс в атмосфере рассматривается состоящим из основного зонального потока и малых отклонений от последнего, которые будем называть возмущениями. Пусть скорость зонального потока

$$\bar{v}_\lambda(\theta, z) = \alpha(z)a \sin \theta, \quad (1.17)$$

где $\alpha(z)$ — угловая скорость вращения атмосферы относительно Земли, не зависящая от θ , а давление и температура

$$\bar{p}(\theta, z) = p_{00}(z) + a^2 \omega \alpha \rho \sin^2 \theta, \quad (1.18)$$

$\bar{T}(\theta, z) = T_{00}(z) + M(z) \sin^2 \theta$, где $p_{00}(z)$ и $T_{00}(z)$ — давление и температура на полюсе, а $M(z)$ — перепад температуры от экватора к полюсу. Далее, составляется уравнение Фридмана, отвечающее оси z , и пренебрегается членами с вертикальной скоростью. Упрощенное, таким образом, уравнение применяется для определения давления на среднем уровне.

Построив стационарное решение, Блинова впервые теоретически получила так называемые „центры действия атмосферы“.

В одной из последующих работ Блинова [7] дает решение той же задачи с учетом членов с вертикальной скоростью. Заметим, что здесь температура не осредняется для нижнего слоя, а каждый уровень входит со своей температурой; кроме того, решение представ-

лено через функцию Грина, в которой одна из сумм берется в конечном виде благодаря отсутствию трения.

Таким образом, впервые теоретически было получено распределение атмосферного давления на уровне моря. Градиенты давления, как и следовало ожидать, значительно превосходили фактические, что легко объяснить отсутствием учета турбулентного перемешивания и частично орографии местности, т. е. того суммарного влияния планетарного пограничного слоя, которое он оказывает на образование термобарических полей.

Теория Е. Н. Блиновой дает возможность долгосрочного прогноза метеорологических элементов методами динамической метеорологии.

В нашей работе [8] построена теория распределения давления на уровне моря с учетом вертикального турбулентного перемешивания; при этом мы решили задачу также на среднем уровне атмосферы и, кроме того, считали коэффициент турбулентного перемешивания постоянным по высоте и делали некоторые другие упрощения.

В настоящей работе решается та же задача о нахождении распределения атмосферного давления на уровне моря при более общих предположениях. В конце работы эта задача решается другим путем.

§ 2. Вывод основного уравнения

Атмосфера рассматривается как реальная бароклинная жидкость в поле сил тяжести и Кориолиса. Чтобы произвести учет влияния приземного трения на формирование наземных и высотных барических полей, мы будем вводить в рассмотрение вертикальное и горизонтальное турбулентные перемешивания различных масштабов, причем коэффициент горизонтального обмена (ν_1) будем считать постоянным, а для коэффициента вертикального обмена ν будем пользоваться различными моделями.

Выведем, прежде всего, уравнение А. А. Фридриха, определяющее изменения вектора вихря скорости в частице воздуха в случае циркуляции реальной бароклинной атмосферы в поле сил, указанных выше.

Будем пользоваться сферической системой координат.

Напишем уравнение движения в векторной форме:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right) + \frac{\nu_1}{a^2}\nabla\vec{V} \cdot 2\vec{V} \times \vec{\omega}. \quad (2.1)$$

Здесь Φ — потенциал объемных сил, $\nabla\Phi$ — его градиент,

∇P — градиент давления,

t — время,

$$\Delta = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \right] \quad (2.2)$$

(остальные обозначения приведены выше).

Уравнение (2.1) можно переписать так:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} + \Phi \right) - \vec{V} \times \vec{\Omega} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2} \Delta \vec{V} + 2\vec{V} \times \vec{\omega}, \quad (2.3)$$

где $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V}$ — вектор вихря скорости.

Возьмем операцию rot от обеих частей равенства (2.3).

Имея в виду, что

$$\text{rot} \nabla \Phi = 0,$$

получим

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \text{rot} (\vec{V} \times \vec{\Omega}) = - \text{rot} \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2} \nabla \vec{\Omega} + 2 \text{rot} (\vec{V} \times \vec{\omega}). \quad (2.4)$$

Пользуясь уравнением состояния, легко убедиться, что

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = \frac{1}{\rho T} \nabla T \times \nabla P,$$

кроме того,

$$\text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{\omega} \text{div} \vec{V},$$

$$\text{rot} (\vec{V} \times \vec{\Omega}) = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \text{div} \vec{V},$$

так как

$$\text{div} \vec{\omega} = \text{div} \vec{\Omega} = 0.$$

Подставляя все эти выражения в (2.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \text{div} \vec{V} + 2(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \\ + 2\vec{\omega} \text{div} \vec{V} = - \frac{1}{\rho T} \nabla T \times \nabla P + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2} \nabla \vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пользуясь теперь тем обстоятельством, что вектор планетарного вихря $\vec{\omega}$ стационарный, будем иметь

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}, \quad (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кроме того, согласно уравнению неразрывности,

$$\text{div} \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Тогда после несложных преобразований окончательно получим уравнение Фридмана в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}}{\rho} \right) - \left(\frac{\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{V} = - \frac{1}{\rho^2 T} \nabla T \times \nabla P +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} \right) + \frac{\gamma_1}{a^2 \rho} \Delta \vec{\Omega}. \quad (2.6)$$

Сумму $\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}$ будем называть абсолютным вихрем; тогда уравнение (2.6) показывает, что изменение величины абсолютного вихря, поделенного на плотность воздушных масс, происходит главным образом за счет переноса этой величины горизонтальным потоком, изменения количества движения с высотой, бароклинности среды и за счет трения. В последнем учитываются горизонтальное и вертикальное перемешивания различных масштабов.

Спроектируем уравнение Фридмана на ось z ; тогда, после небольших, вполне естественных, упрощений получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + \frac{V_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Omega_z + 2\omega \cos \theta) + \frac{V_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial \Omega_z}{\partial \lambda} - \frac{2\omega \cos \theta}{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho} V_z}{\partial z} = \\ = - \frac{(T, P)}{a^2 \tilde{\rho} T \sin \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) + \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Omega_z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь: $\omega_z = \omega \cos \theta$, $\tilde{T}(z)$ — стандартная температура, $\rho = \tilde{\rho}(z)$ — стандартная плотность,

$$\begin{aligned} (T, P) &= \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda}, \\ \Omega_z &= \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\lambda \sin \theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Произведем линеаризацию уравнения (2.7), пользуясь методом из работы [6], т. е. будем считать, что движение состоит из основного зонального потока и малых возмущений последнего, причем рассмотрим пока стационарную задачу.

Итак, пусть

$$\begin{aligned} V_\theta &= v_\theta(\theta, \lambda, z), \quad V_\lambda = \bar{v}_\lambda(\theta, z) + v_\lambda(\theta, \lambda, z), \quad V_z = v_z(\theta, \lambda, z), \\ P &= \bar{p}(\theta, z) + p(\theta, \lambda, z), \\ T &= \bar{T}(\theta, z) + T'(\theta, \lambda, z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь элементы зонального потока определяются по (1.17) и (1.18), а возмущения $v_\theta, v_\lambda, v_z, p, T'$ считаются малыми; поэтому в дальнейшем будем пренебрегать квадратичными членами.

Обратимся к уравнению неразрывности. Это уравнение вдали от земной поверхности с большой степенью точности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial \lambda} = 0.$$

Это позволяет ввести функцию тока на всех уровнях атмосферы (кроме, конечно, пограничного слоя), так что

$$V_0 = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\sin \theta \partial \lambda}, \quad V_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}. \quad (2.10)$$

Представляя функцию тока в виде $\Psi = \bar{\Psi}(\theta, z) + \psi(\theta, \lambda, z)$, легко убедиться, что отклонения скорости v_θ, v_λ выражаются через отклонение этой функции от зональных ее значений $\bar{\Psi}(\theta, \lambda, z)$ по формулам, аналогичным (2.10), а пользуясь (1.17), легко найдем, что $\bar{\psi} = -\alpha a^2 \cos \theta$. Кроме того, пользуясь (2.8) и (2.10), найдем

$$\Omega_z = \frac{1}{a^2} \Delta \Psi, \quad (2.11)$$

причем отклонения Ω_z и Ψ между собой будут связаны точно таким же соотношением.

Подставляя все эти выражения в уравнение (2.7), приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \lambda} + 2(\omega + \alpha) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \psi - \frac{2a^2 \omega \cos \theta}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \\ = -\frac{(T, P)}{\bar{\rho} \tilde{T} \sin \theta} + a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В последнем члене правой части мы не переходим к функции тока, с целью вычислить влияние трения в пограничном слое на барические образования, исходя из уравнений Кочина [1].

Упростим член с бароклинностью. Пользуясь (2.8) и (1.18), имеем

$$(T, P) \approx -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} = -\frac{\partial T'}{\partial \lambda} a^2 \omega \bar{\rho} 2 \sin \theta \cos \theta.$$

Кроме того, так как $\frac{\alpha}{\omega} \ll 1$, то отбросим α во втором члене левой части (2.12). Получим

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \lambda} + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \psi - \frac{2a^2 \omega \cos \theta}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \\ = \frac{2a^2 \omega \cos \theta}{\tilde{T}} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} + a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Помножим обе части уравнения (2.13) на $\bar{\rho}$ и проинтегрируем по z от z_0 до бесконечности, где z_0 — высота шероховатости,

$$\int_{z_0}^{\infty} \left(\alpha \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \lambda} + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \psi \right) \bar{\rho} dz = 2a^2 \omega \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} \alpha \tilde{T} \bar{\rho} dz + a^2 \bar{\rho}_c \left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty}. \quad (2.14)$$

Здесь интеграл от последнего члена левой части обратился в нуль в силу того обстоятельства, что $v_z = 0$ при $z = z_0$ и $\rho v_z = 0$ при $z \rightarrow \infty$. ρ_0 — средняя по высоте плотность, а

$$\tau_1(\theta, \lambda, z) = \frac{\cos \theta T'(\theta, \lambda, z)}{[\tilde{T}(z)]^2}. \quad (2.15)$$

Чтобы выполнить квадратуры в левой части, мы должны пользоваться уравнением (1.4), которое мы возьмем в виде

$$\ln P = \ln P_0 - \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T}.$$

Линеаризуя это уравнение, получим (см., например, [7])

$$\frac{p}{\bar{p}} = \frac{P_0}{P_0} + \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{T' dz}{\tilde{T}^2}. \quad (2.16)$$

Здесь p и P_0 — соответственно, стандартные давления на высоте и на уровне моря.

Возьмем теперь линеаризованное уравнение Эйлера, отвечающее оси λ :

$$2(\omega + \alpha) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \lambda} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (2.17)$$

Из этого уравнения легко найти p через ψ и, подставляя в (2.16), выразить ψ через $p_0(\theta, \lambda)$, а подстановка последнего выражения в (2.14) позволяет определить p_0 , т. е. решает нашу задачу до конца.

Остановимся на приближенном решении (2.17). Так как $\partial \psi / \partial \lambda$ и $\partial^2 \psi / \partial \theta \partial \lambda$ являются величинами одинакового порядка, а $\alpha \ll \omega$, то приближенно можно принять

$$p \approx 2\omega \cos \theta \rho \psi. \quad (2.18)$$

Пользуясь уравнением состояния, из (2.16) получим

$$\psi = \frac{RT}{2\omega} \left(\varphi + \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \tau_2 dz \right), \quad (2.19)$$

где

$$\varphi(\theta, \lambda) = \frac{P_0}{P_0 \cos \theta}, \quad \tau_2 = \frac{T'(\theta, \lambda, z)}{\cos \theta [\tilde{T}(z)]^2}. \quad (2.20)$$

Подчеркиваем, что φ не зависит от высоты.

Подставляя (2.19) в (2.14), получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} \frac{\int_{z_0}^{\infty} \alpha \tilde{T}_p dz}{\int_{z_0}^{\infty} \tilde{T}_p dz} + 2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \varphi = \frac{2a^2 \omega^2 \rho_c}{R \int_{z_0}^{\infty} \tilde{T}_p dz} \left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0} - \\ - \frac{g}{R \int_{z_0}^{\infty} \tilde{T}_p dz} \left\{ \alpha \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{4a^2 \omega^2 \alpha}{g} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \int_{z_0}^{\infty} \Delta \Delta \tau_2 dz \right\} \tilde{T}_p dz. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из этого уравнения мы должны определить $\varphi(\theta, \lambda)$; тогда из (2.20) определится $p_0(\theta, \lambda)$, и наша цель будет достигнута. Остается лишь вычислить первый член правой части уравнения (2.21).

§ 3. Влияние вертикального турбулентного обмена

Мы должны вычислить

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty}. \quad (3.1)$$

Этот член учитывает тот суммарный эффект, который оказывает планетарный пограничный слой на барические образования. Чтобы вычислить его, необходимо иметь составляющие вектора скорости во всей толще атмосферы. Но предварительно заметим следующее. На большом расстоянии от Земли, вне планетарного пограничного слоя, влияние турбулентной вязкости исчезает; поэтому нам необходимо вычислить значение этой величины лишь в непосредственной близости от Земли. Для этого мы воспользуемся уравнениями Кочина [1], которые мы запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta v_\lambda = \frac{1}{a r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta v_\theta = \frac{1}{a r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как на большом расстоянии от Земли влияние трения исчезает и там существует функция тока по (2.10), то мы будем считать, что между полем давления и полем функции тока существуют следующие приближенные соотношения:

$$\frac{1}{a r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \approx \frac{2\omega \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{a r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \approx \frac{2\omega \cos \theta}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \quad (3.3)$$

Тогда система (3.2) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta v_\lambda &= \frac{2\omega \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta v_\theta &= \frac{2\omega \cos \theta}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

В тонком приземном слое мы можем считать, что горизонтальные градиенты функции тока не зависят от высоты и равняются их значению на верхней границе слоя трения; обозначим через ψ_0 значение ψ на этом уровне, тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta v_\lambda &= \frac{2\omega \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta v_\theta &= \frac{2\omega \cos \theta}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

В качестве первого приближения мы примем, что ν также не зависит от z ; тогда при граничных условиях $v_\theta = v_\lambda = 0$, при $z = 0$ и, учитывая, что скорость ограничена на бесконечности, получим следующее решение (принимая $z_0 = 0$):

$$\begin{aligned}v_\theta &= -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \left(1 - e^{-rz} \cos rz \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} e^{-rz} \sin rz, \\ v_\lambda &= \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \left(1 - e^{-rz} \cos rz \right) - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} e^{-rz} \sin rz,\end{aligned}\quad (3.6)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{\nu}}. \quad (3.6')$$

Подставляя это решение во второе из соотношений (2.8), беря производную от этого выражения по z , получим

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a^2} \sqrt{\omega \nu \cos \theta} \Delta \psi_0 + \frac{1}{2a^2} \frac{\sqrt{\omega \nu \cos \theta}}{\cos \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \right). \quad (3.7)$$

Пренебрегая первыми производными от ψ_0 по θ и λ по сравнению с значением Лапласиана от ψ_0 , получим

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a^2} \sqrt{\omega \nu \cos \theta} \Delta \psi_0. \quad (3.8)$$

Это выражение нами использовано в [8].

Однако, как отмечалось выше, именно в тонком приземном слое происходят значительные изменения коэффициента ν ; поэтому принять его постоянным по высоте в этом слое нельзя, и мы сейчас рассмотрим случай, когда ν растет с высотой по линейному закону, т. е.

$$\nu = c_0 z, \quad (3.9)$$

причем c_0 выбирается так, чтобы на высоте шероховатости получить молекулярный коэффициент вязкости; c_0 не зависит от z , но может зависеть от горизонтальных координат.

Воспользуемся системой (3.5); тогда, на основании модели (3.9), эта система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} v_\lambda &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} v_\theta &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эту систему можно привести к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{k_1^2}{4} U = \frac{k_1^2}{4} E. \quad (3.11)$$

Здесь

$$U = v_\theta - i v_\lambda,$$

$$\begin{aligned} k_1^2 &= 4 \frac{2i\omega \cos \theta}{c_0} = ik^2, \quad k = 2 \sqrt{\frac{2\omega \cos \theta}{c_0}}, \\ E &= E_1 + iE_2 = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Уравнение (3.11) имеет решение

$$U = c_1 I_0(k\sqrt{iz}) + c_2 H_0(k\sqrt{iz}) + E, \quad (3.13)$$

где I_0 и H_0 — цилиндрические функции, а c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, зависящие от θ и λ .

Используя граничные условия $U = 0$ при $z = z_0$ и $U < \infty$ при $z \rightarrow \infty$ и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \left[1 - N_1(k\sqrt{z}) \right] - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} N_2(k\sqrt{z}), \\ v_\lambda &= \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \left[1 - N_1(k\sqrt{z}) \right] - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} N_2(k\sqrt{z}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} H_0(k\sqrt{iz}) &= \text{her}_0(k\sqrt{z}) + i \text{hei}_0(k\sqrt{z}), \\ N_1(k\sqrt{z}) &= \frac{\text{her}_0(k\sqrt{z_0}) \text{her}_0'(k\sqrt{z}) + \text{hei}_0(k\sqrt{z_0}) \text{hei}_0'(k\sqrt{z})}{[\text{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\text{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}, \\ N_2(k\sqrt{z}) &= \frac{\text{her}_0(k\sqrt{z_0}) \text{hei}_0'(k\sqrt{z}) - \text{hei}_0(k\sqrt{z_0}) \text{her}_0'(k\sqrt{z})}{[\text{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\text{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя решение (3.14) во второе из соотношений (2.8), беря производную от этого выражения по z , получим

$$\left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_z = - \frac{M}{a^2} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta} \Delta \psi_0 - \frac{c_0 \sqrt{z_0}}{2a^2 \sqrt{2}} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (kM) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} (kM_1) \right]. \quad (3.16)$$

Здесь

$$M = \frac{A + B}{[\operatorname{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}, \quad (3.17)$$

$$M_1 = \frac{A_1 - B_1}{[\operatorname{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2},$$

где

$$A = \operatorname{her}(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})],$$

$$A_1 = \operatorname{her}(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})],$$

$$B = \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})],$$

$$B_1 = \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})].$$

Если же пренебречь производными от ψ_0 по θ и λ по сравнению с $\Delta \psi_0$, то (3.16) примет более простой вид:

$$\left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_z = - \frac{M}{a^2} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta} \Delta \psi_0. \quad (3.18)$$

Можно вычислить этот же член, пользуясь моделью (1.15) или другими моделями, более близкими к физической сущности явления, но все они приводят к громоздким вычислениям; поэтому для наших целей будет достаточно остановиться только на двух случаях, приведенных выше.

Но представляет интерес рассмотреть изменения выражения (3.1), если исходить из более точной системы уравнений (3.4), т. е. учесть зависимость ψ от высоты.

Систему (3.4) при γ , не зависящем от высоты, можно привести к одному уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - r_1 U = -r_1 E. \quad (3.19)$$

Здесь

$$U = v_0 + i v_1,$$

$$r_1 = r_1 - 2i, \quad r^2 = \frac{\omega \cos \theta}{\gamma}, \quad E = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \quad (3.20)$$

При граничных условиях, использованных для решения системы (3.5), уравнение (3.19) имеет следующее решение:

$$U = \frac{r_1}{2} e^{-r_1 z} \left[\int_0^z E e^{r_1 z} dz - \int_0^z E e^{-r_1 z} dz \right] - \frac{r_1}{2} e^{r_1 z} \int_z^\infty E e^{-r_1 z} dz. \quad (3.21)$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим выражения для скоростей. Эти выражения мы здесь приводить не будем из-за их громоздкости, но вычислим (3.1). Пользуясь (3.21), имеем

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_0 = -r_1 \int_0^z E e^{-r_1 z} dz,$$

или

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} \Big|_0 = \frac{2r^2}{a} \int_0^z \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos rz + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \sin rz \right) e^{-rz} dz,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_0 = \frac{2r^2}{a} \int_0^z \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cos rz - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin rz \right) e^{-rz} dz,$$

или

$$\left(v \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0 \cong -\frac{2r^2 v}{a} \int_0^z \Delta \psi e^{-rz} \sin rz dz. \quad (3.22)$$

Здесь мы отбросили члены с первыми производными от ψ . Если в (3.22) положить, что ψ не зависит от высоты, то оно, как легко убедиться, переходит в (3.8).

Чтобы выполнить интегрирование, мы воспользуемся выражением (2.16) и приближенным соотношением (2.18).

Считая стандартную температуру линейной функцией высоты с вертикальным температурным градиентом γ , вводя ψ_0 как значение ψ на верхней границе слоя трения и пользуясь обозначением (2.20), получим

$$\psi(\theta, \lambda, z) = \psi_0(\theta, \lambda) \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right) + \frac{g \tilde{T}}{2\omega} \int_0^z \tau_2 dz. \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23) в (3.22), получим

$$\left(v \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0 = -\frac{1}{a^2} \left(\sqrt{\omega \gamma} \cos \theta - \frac{\gamma \gamma}{T_0} \right) \Delta \psi_0 - \frac{g r^2 v}{\omega a^2} \int_0^z \tilde{T} \left(\int_0^z \Delta \tau_2 dz \right) e^{-rz} \sin rz dz. \quad (3.24)$$

Если же решить уравнение (3.11) с правой частью, зависящей от z при тех же граничных условиях, то получим

$$U = -V \tilde{T} H_0(y/\tilde{T}) \int_{y_0}^y \frac{E(y) I_0(y/\tilde{T}) dy}{I_0(y/\tilde{T}) H_1(y/\tilde{T}) - H_0(y/\tilde{T}) I_1(y/\tilde{T})} +$$

$$+ \frac{I_0(y_0 \sqrt{i})}{H_0(y_0 \sqrt{i})} \int_{\infty}^{y_0} \frac{E(y) H_0(y \sqrt{i}) dy}{I_0(y \sqrt{i}) H_1(y \sqrt{i}) - H_0(y \sqrt{i}) I_1(y \sqrt{i})} \Big] +$$

$$+ \sqrt{i} I_0(y \sqrt{i}) \int_{\infty}^y \frac{E(y) H_0(y \sqrt{i}) dy}{I_0(y \sqrt{i}) H_1(y \sqrt{i}) - H_0(y \sqrt{i}) I_1(y \sqrt{i})}, \quad (3.25)$$

где

$$k \sqrt{z} = y, \quad k \sqrt{z_0} = y_0. \quad (3.26)$$

Мы здесь тоже не будем отделять действительную и мнимую части, так как сами составляющие вектора скорости пока нам не нужны, но вычислим их производные. Имеем

$$\frac{eU}{\sigma y} \Big|_{y_0}^{\infty} = - \frac{1}{y_0 H_0(y_0 \sqrt{i})} \int_{\infty}^{y_0} E(y) H_0(y \sqrt{i}) y dy, \quad (3.27)$$

откуда

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y_0}^{\infty} = - \frac{n_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_1 \text{her}_0(y) - E_2 \text{hei}_0(y)] y dy +$$

$$+ \frac{m_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_2 \text{her}_0(y) + E_1 \text{hei}_0(y)] y dy. \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y_0}^{\infty} = \frac{m_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_1 \text{her}_0(y) - E_2 \text{hei}_0(y)] y dy +$$

$$+ \frac{n_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_2 \text{her}_0(y) + E_1 \text{hei}_0(y)] y dy;$$

следовательно,

$$\frac{\partial Q_z}{\partial y} \Big|_{y_0}^{\infty} \approx - \frac{1}{a^2 y_0} \int_{\infty}^{y_0} [n_0 \text{her}_0(y) - m_0 \text{hei}_0(y)] \Delta \psi y dy. \quad (3.29)$$

Здесь

$$n_0 = \frac{\text{hei}_0(y_0)}{[\text{her}_0(y_0)]^2 + [\text{hei}_0(y_0)]^2}, \quad m_0 = \frac{\text{her}_0(y_0)}{[\text{her}_0(y_0)]^2 + [\text{hei}_0(y_0)]^2}. \quad (3.30)$$

Мы пользуемся некоторыми соотношениями из [9], на основании которых легко можно убедиться, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) &= -\frac{k}{2\sqrt{2z}} [\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})], \\
\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z}) &= -\frac{k}{2\sqrt{2z}} [\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})], \\
\int_{-\infty}^{y_0} y \operatorname{her}_0(y) dy &= \frac{y_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{her}_1(y_0) + \operatorname{hei}_1(y_0)], \\
\int_{-\infty}^{y_0} y \operatorname{hei}_0(y) dy &= -\frac{y_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{her}_1(y_0) - \operatorname{hei}_1(y_0)], \\
\int_{-\infty}^{y_0} y^3 \operatorname{her}_0(y) dy &= \frac{y_0^3}{\sqrt{2}} [\operatorname{her}_1(y_0) + \operatorname{hei}_1(y_0)] + \\
&\quad + \frac{4y_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{her}_1(y_0) - \operatorname{hei}_1(y_0)] + 2y_0^2 \operatorname{hei}_0(y_0), \\
\int_{-\infty}^{y_0} y^3 \operatorname{hei}_0(y) dy &= -\frac{y_0^3}{\sqrt{2}} [\operatorname{her}_1(y_0) - \operatorname{hei}_1(y_0)] + \\
&\quad + \frac{4y_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{her}_1(y_0) + \operatorname{hei}_1(y_0)] - 2y_0^2 \operatorname{her}_0(y_0).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Подставляя тогда (3.23) в (3.29), пользуясь соотношениями (3.31) и переходя к z по (3.26), получим окончательно

$$\begin{aligned}
\left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty} &\approx -\frac{M}{a^2} \sqrt{\omega c_0 z_0} \cos \theta \left(1 - \frac{\gamma z_0}{T_0} S \right) \Delta \psi_0 - \\
&\quad - \frac{g c_0 k^2}{8 \omega a^2} \int_{z_0}^{\infty} [m_0 \operatorname{hei}_0(y_0) - r_0 \operatorname{her}_0(y)] \left(\int_{z_0}^z \Delta \tau_2 dz \right) dz.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Здесь M определяется по (3.17), а

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{y_0 M} + \frac{4}{y_0^2} \left(1 - \frac{2R_1}{M} \right), \\
R_1 &= \frac{\operatorname{her}_0(y_0) \operatorname{hei}_1(y_0) + \operatorname{hei}_0(y_0) \operatorname{her}_1(y_0)}{[\operatorname{her}_0(y_0)]^2 + [\operatorname{hei}_0(y_0)]^2}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Коэффициент k по (3.12) имеет величину, не большую чем 10^{-2}М^{-1} ; поэтому, при сравнительно небольшой высоте шероховатости, y_0 будет достаточно малой величиной, и вышеприведенные постоянные могут быть значительно упрощены.

В самом деле, при малых значениях y_0 имеем

$$\text{her}_0(y_0) \rightarrow 0,5, \quad \text{hei}_0(y_0) \rightarrow -\infty,$$

$$\text{her}_1(y_0) \rightarrow -\infty, \quad \text{hei}_1(y_0) \rightarrow -\infty;$$

поэтому

$$M \approx \frac{\text{her}_1(y_0) + \text{hei}_1(y_0)}{\text{hei}_0(y_0)}, \quad (3.17')$$

$$R_1 = \frac{\text{her}_1(y_0)}{\text{hei}_0(y_0)},$$

$$\frac{R_1}{M} \approx \frac{\text{her}_1(y_0)}{\text{her}_1(y_0) + \text{hei}_1(y_0)}. \quad (3.33')$$

Таким образом, нами вычислен член (3.1), учитывающий вертикальное турбулентное перемешивание в различных случаях. В простейшем случае, когда χ и ψ рассматриваются не зависящими от z , получается выражение (3.8); когда оба зависят от z , получается (3.32); когда χ зависит от z , ψ не зависит — получается выражение (3.18), и, наконец, когда χ не зависит от z , а ψ зависит — получается (3.24). Во всех этих случаях первые производные от ψ по горизонтальным координатам отбрасываются по сравнению с $\Delta\psi$, но это упрощение несущественно, и мы, пользуясь простейшим случаем (3.7), покажем, как можно довести до конца решение задачи в этом случае.

§ 4. Решение основного уравнения

Это уравнение имеет вид (2.21), причем в различных случаях мы вычислили значение первого члена правой части в виде (3.8), (3.18), (3.24) и (3.32). Во все последние выражения входит ψ_0 ; эту функцию можно заменить функцией φ , введенной по (2.20). Используя (2.18), имеем

$$\psi_0(\theta, \lambda) = \frac{RT_0}{2\omega} \varphi(\theta, \lambda). \quad (4.1)$$

Переходя от ψ_0 к φ по (4.1) в (3.8), (3.18), (3.24) и (3.32) и подставляя полученные таким образом выражения в основное уравнение (2.21), получим:

$$\alpha_1 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} + 2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + c_1 \Delta \varphi - c_2 \Delta \Delta \varphi = F(\theta, \lambda). \quad (4.2)$$

Здесь, в первом случае (3.8), когда χ и ψ не зависят от высоты, имеем

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^\infty \alpha T \rho \, dz}{\int_0^\infty T \rho \, dz} \quad (4.3)$$

$$c_1 = \frac{T_0 \rho_c}{\int_0^\infty \tilde{T}_p dz} \cdot \sqrt{\omega \gamma \cos \theta}, \quad (4.4)$$

$$F(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R \int_0^\infty \tilde{T}_p dz} \int_0^\infty \left(\alpha \int_0^z \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_0^z \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{\gamma_1}{a^2} \int_0^z \Delta \Delta \tau_2 dz - \frac{4a^2 \omega^2 \alpha}{g} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} \right) \tilde{T}_p dz. \quad (4.5)$$

Во втором случае (3.18), когда γ — линейная функция высоты, а ψ не зависит от высоты, имеем

$$z_1 = \frac{\int_{z_0}^\infty \alpha \tilde{T}_p dz}{\int_{z_0}^\infty \tilde{T}_p dz}, \quad (4.6)$$

$$c_1 = \frac{T_0 \rho_c M}{\int_{z_0}^\infty \tilde{T}_p dz} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta}. \quad (4.7)$$

$F(\theta, \lambda)$ имеет точно такое выражение, что и (4.5), только во всех интегралах за нижний предел вместо нуля берется z_0 .

В третьем случае (3.24), когда γ не зависит от высоты, а ψ — переменная по высоте, имеем z_1 по (4.3), а

$$c_1 = \frac{T_0 \rho_c}{\int_0^\infty \tilde{T}_p dz} \sqrt{\omega \gamma \cos \theta} \left(1 - \frac{\gamma}{r T_0} \right). \quad (4.8)$$

$$F(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R \int_0^\infty \tilde{T}_p dz} \int_0^\infty \left(\alpha \int_0^z \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_0^z \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{\gamma_1}{a^2} \int_0^z \Delta \Delta \tau_2 dz + 2r^2 \gamma e^{-r^2 z} \sin rz \int_0^z \Delta \tau_2 dz - \frac{4a^2 \omega^2 \alpha}{g} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} \right) \tilde{T}_p dz. \quad (4.9)$$

И, наконец, в четвертом случае (3.32), когда γ и ψ зависят от высоты, имеем z_1 по (4.6), а

$$c_1 = \frac{T_0 \rho_c M}{\int_{z_0}^\infty \tilde{T}_p dz} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta} \left(1 - \frac{\gamma_0}{T_0} S \right), \quad (4.10)$$

$$F(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R \int_{z_0}^{\infty} \tilde{T}_p dz} \int_{z_0}^{\infty} \left\{ \alpha \int_{z_0}^z \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_{z_0}^z \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{\nu_1}{a^2} \int_{z_0}^z \Delta \Delta \tau_2 dz - \right. \\ \left. - \frac{4a^2 \omega^2 \alpha}{g} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} + \frac{c_0 k^2}{4} [m_0 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z}) - n_0 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z})] \left(\int_{z_0}^z \Delta \tau_2 dz \right) \right\} \tilde{T}_p dz. \quad (4.11)$$

Во всех четырех случаях через c_2 обозначено

$$c_2 = \frac{\nu_1}{a^2}. \quad (4.12)$$

Заметим, что искомая функция φ безразмерная, а α_1 , ω , c_1 , c_2 и F все имеют одинаковую размерность $1/\text{сек}$.

Перейдем к решению уравнения (4.2). Это уравнение линейное с известной правой частью (так как во всей задаче мы температуру считаем заданной), причем один из коэффициентов, именно c_1 , переменный. Решение (4.2) представляет значительные математические затруднения. Желая получить простые количественные оценки его решений, мы будем заменять выражение $\sqrt{\nu \cos \theta}$ или $M \cdot \sqrt{c_0 z_0 \cos \theta}$ их средними по меридиану значениями. В действительности их изменения для средних широт сравнительно малы.

Решение уравнения (4.2) мы будем искать в виде ряда по шаровым функциям.

Пусть нам известно разложение

$$F(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (F_n^m \cos m\lambda + F_n'^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (4.13)$$

где F_n^m и $F_n'^m$ — известные постоянные, $p_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Если решение для φ представить в таком же виде

$$\varphi(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n'^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (4.14)$$

то

$$2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n m (-\varphi_n^m \sin m\lambda + \varphi_n'^m \cos m\lambda) p_n^m, \\ c_1 \Delta \varphi = -c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n n(n+1) (\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n'^m \sin m\lambda) p_n^m, \quad (4.15) \\ \alpha_1 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} = -\alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n n(n+1) m (-\varphi_n^m \sin m\lambda + \varphi_n'^m \cos m\lambda) p_n^m.$$

$$c_2 \Delta \Delta \varphi = c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n n^2 (n+1)^2 (\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n'^m \sin m\lambda) p_n^m.$$

Подставляя выражения (4.13) и (4.15) в (4.2), получим следующие уравнения для определения коэффициентов φ_n^m и $\varphi_n'^m$:

$$-\alpha_1 n(n+1) m \varphi_n^m + 2\omega m \varphi_n^m - c_1 n(n+1) \varphi_n^m - c_2 n^2 (n+1)^2 \varphi_n^m = F_n^m;$$

$$\alpha_1 n(n+1) m \varphi_n^m - 2\omega m \varphi_n^m - c_1 n(n+1) \varphi_n'^m - c_2 n^2 (n+1)^2 \varphi_n'^m = F_n'^m,$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_n^m &= \frac{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega] F_n^m - n(n+1)[c_1 + c_2 n(n+1)] F_n^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + n^2(n+1)^2[c_1 + c_2 n(n+1)]^2}; \\ \varphi_n'^m &= \frac{-m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega] F_n^m - n(n+1)[c_1 + c_2 n(n+1)] F_n'^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + n^2(n+1)^2[c_1 + c_2 n(n+1)]^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В случае, когда горизонтальное перемешивание не учитывается $c_2 = 0$, мы получаем из (4.16)

$$\begin{aligned} \varphi_n^m &= \frac{n[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega] F_n^m - c_1 n(n+1) F_n^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + [c_1 n(n+1)]^2}; \\ \varphi_n'^m &= \frac{-m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega] F_n^m - c_1 n(n+1) F_n'^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + [c_1 n(n+1)]^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Эти выражения получены нами в [9], при одном частном значении коэффициента c_1 и $F(0, \lambda)$.

В случае, когда не учитывается трение, $c_1 = c_2 = 0$, и мы приходим к коэффициентам, полученным Е. Н. Блиновой [7]:

$$\begin{aligned} \varphi_n^m &= \frac{F_n^m}{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]}, \\ \varphi_n'^m &= -\frac{F_n^m}{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Заметим, что $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ 1/сек, α_1 — правильная дробь; следовательно, при известных комбинациях чисел m и n знаменатели в (4.18) могут обращаться в нуль или быть очень близкими к нулю. Это означает, что при некоторых длинах волн возмущений решение (4.18) перестает существовать. В случае, когда трение учитывается в виде только одного вертикального перемешивания (4.17) или и вертикального и горизонтального турбулентного обмена масс одновременно (4.16), то возможность такого резонанса исключается.

Пользуясь выражениями (4.4), (4.7), (4.8), (4.10) и (4.12), легко оценить коэффициенты c_1 и c_2 . Эти коэффициенты имеют значения следующих порядков:

$$c_1 \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ 1/сек}, c_2 \approx 10^{-8} \text{ 1/сек}, (\nu = 4^{M^2} \text{ 1/сек}, \nu_1 = 4 \cdot 10^{M^2} \text{ 1/сек}).$$

Полученные оценки коэффициентов и формулы, приведенные выше, позволяют произвести сравнительную оценку роли γ и γ_1 при принятых значениях.

Результаты вычислений сводим в таблицу:

n	n+1	n(n+1)	n ² (n+1) ²	c ₁ n(n+1)	c ₂ n ² (n+1) ²
1	2	2	4	6·10 ⁻⁶	4·10 ⁻⁸
5	6	3·10	9·16 ³	9·10 ⁻³	9·10 ⁻⁶
9	10	9·10	0,81·10 ⁴	2,7·10 ⁻⁴	0,81·10 ⁻⁴
13	14	1,82·10 ²	3,31·10 ⁴	5,46·10 ⁻⁴	3,31·10 ⁻⁴
17	18	3,06·10 ²	0,92·10 ⁵	0,93·10 ⁻²	0,92·10 ⁻²
21	22	4,62·10 ²	2,13·10 ⁵	1,39·10 ⁻²	2,13·10 ⁻²
25	26	6,5·10 ²	4,23·10 ⁵	1,95·10 ⁻²	4,23·10 ⁻²
29	30	0,87·10 ³	0,76·10 ⁶	2,61·10 ⁻²	7,57·10 ⁻²
33	34	1,12·10 ³	1,26·10 ⁶	3,36·10 ⁻²	1,26·10 ⁻²

Таблица показывает, что для принятых значений параметров и для одного и того же значения числа m вертикальное и горизонтальное турбулентные перемешивания играют одинаковую роль для волн с $n = 17-18$. Возмущения крупных размеров (малые n) затухают, главным образом, за счет вертикального перемешивания; наоборот, мелкие возмущения (большие n) затухают за счет горизонтального перемешивания.

Итак, имея разложение (4.13) и коэффициенты a_1 , c_1 и c_2 в различных случаях, по (4.16) легко подсчитать все коэффициенты φ_n^m и φ_n^m и, восстанавливая ряд (4.14), получить поле функции $\varphi(\theta, \lambda)$. Тогда по первому из соотношений (2.20) определится поле давления на уровне моря, по (2.16) — давление на любом уровне. Поле температуры $T(\theta, \lambda, z)$ можно взять, например, из работы [11].

Рассмотрим теперь приближенное решение уравнения (2.21) вблизи тех точек поля функции ψ_0 , в которых пренебречь первыми производными от ψ_0 по сравнению с значением $\Delta\psi_0$ нельзя. Воспользуемся наиболее простым выражением для члена, учитывающего вертикальное турбулентное перемешивание — (3.7).

В этом случае основное уравнение (2.21) с большой степенью точности может быть представлено в следующем виде:

$$a_1 \cos \theta \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} + 2\omega \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} c_1 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + c_1 \cos \theta \Delta \varphi - c_2 \cos \theta \Delta \varphi = N(\theta, \lambda). \quad (4.19)$$

Здесь a_1 берется по (4.3), c_1 — по (4.4), c_2 — по (4.12), а $N(\theta, \lambda) = \cos \theta F(\theta, \lambda)$, где $F(\theta, \lambda)$ берется по (4.5).

Если представить функцию $N(\theta, \lambda)$ в виде

$$N(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (N_n^m \cos m\lambda + N_n'^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (4.20)$$

где $N_n^m, N_n'^m$ — известные постоянные, то решение для φ можно представить в том же виде (4.14); тогда, пользуясь соотношениями [9]

$$\begin{aligned} \cos \theta p_n^m &= \frac{n-m+1}{2n+1} p_{n+1}^m + \frac{n+m}{2n+1} p_{n-1}^m, \\ -\sin \theta \frac{dp_n^m}{d\theta} &= \sin^2 \theta (p_n^m)' = -\frac{n(n-m+1)}{2n+1} p_{n+1}^m + \frac{(n+m)(n+1)}{2n+1} p_{n-1}^m \end{aligned} \quad (4.21)$$

и выражениями типа (4.15), из уравнения (4.19) получим следующие рекуррентные формулы для определения всех коэффициентов φ_n^m и $\varphi_n'^m$:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^m &= \frac{b(m, n) \left[N_n^m + \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n^m + a_1(m, n) \varphi_{n-1}^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2} + \\ &+ \frac{a(m, n) \left[N_n'^m - \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n^m - a_1(m, n) \varphi_{n-1}^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2}, \\ \varphi_{n+1}'^m &= \frac{b(m, n) \left[N_n^m - \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n^m - a_1(m, n) \varphi_{n-1}^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2} - \\ &- \frac{a(m, n) \left[N_n'^m + \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n'^m + a_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a(m, n) &= \frac{m(n+m+1)}{2n+3} [\alpha_1(n+1)(n+2) - 2\omega], \\ b(m, n) &= \frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3} \left[c_1 \left(n + \frac{1}{2} \right) + c_2(n+2)(n+1)^2 \right], \\ a_1(m, n) &= \frac{m(n-m)}{2n-1} [\alpha_1 n(n-1) - 2\omega], \\ b_1(m, n) &= \frac{(n-m)(n-1)}{2n-1} \left[c_1 \left(n + \frac{1}{2} \right) + c_2(n-1)n^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Как видно из выражений (4.22), $\varphi_n^m = \varphi_n'^m = 0$ при $n = m$.

Далее, $\varphi_1^1 = \varphi_1'^1 = 0, \quad \varphi_2^2 = \varphi_2'^2 = 0,$

$$\begin{aligned}\varphi_2^1 &= \frac{b(1,1)N_1^1 + a(1,1)N_1^{1'}}{[a(1,1)]^2 + [b(1,1)]^2}, & \varphi_2^{1'} &= \frac{b(1,1)N_1^{1'} - a(1,1)N_1^1}{[a(1,1)]^2 + [b(1,1)]^2}, \\ \varphi_3^1 &= \frac{b(1,2) \left[N_2^1 + \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^{1'} \right] + a(1,2) \left[N_1^{1'} - \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^1 \right]}{[a(1,2)]^2 + [b(1,2)]^2}, \\ \varphi_3^2 &= \frac{b(2,2)N_2^2 + a(1,2)N_2^{2'}}{[a(2,2)]^2 + [b(2,2)]^2}, \\ \varphi_3^{1'} &= \frac{b(1,2) \left[N_2^{1'} - \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^1 \right] - a(1,2) \left[N_2^1 + \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^{1'} \right]}{[a(1,2)]^2 + [b(1,2)]^2}, \\ \varphi_3^{2'} &= \frac{b(2,2)N_2^{2'} - a(2,2)N_2^2}{[a(2,2)]^2 + [b(2,2)]^2}, & \varphi_3^3 &= \varphi_3^{3'} = 0, \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Можно было рассмотреть решение того же уравнения при учете первых производных от ψ_0 по θ , λ и в более общих случаях, но получаются выражения довольно громоздкие, и мы их здесь приводить не будем.

§ 5. Другой способ определения поля давления на уровне моря

Подойдем теперь к решению той же задачи о нахождении поля давления на уровне моря в стационарной незональной циркуляции атмосферы другим способом. Будем пользоваться методом Дородницына [2], изложенным выше. А. А. Дородницын решил эту задачу в случае стационарной зональной циркуляции атмосферы, положив в основу систему уравнений (1.10)–(1.13) и приняв коэффициент μ постоянным.

О. С. Берлянд [12] решил ту же задачу, приняв коэффициент турбулентной кинематической вязкости линейной функцией высоты; температура считалась известной и определялась из работы [11].

В нашей статье [13] решена задача в случае незональной циркуляции атмосферы при некоторых упрощающих предположениях; в частности, коэффициент ν принят не зависящим от высоты.

В этом параграфе решается задача о нахождении поля давления на уровне моря в случае незональной циркуляции реальной атмосферы, считая процесс квазистационарным.

Исходной является система уравнений (1.7)–(1.9), которую мы перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial p_{\theta}}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta p_{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta \rho v_\theta = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + g\rho = 0, \quad (1.4)$$

$$p = \rho RT, \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_\lambda) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (5.3)$$

Нашей целью является определение функции $p_0(\theta, \lambda)$, которая может параметрически зависеть также от времени.

Прежде всего проинтегрируем уравнение неразрывности (5.3) по z ; тогда, пользуясь тем, что при $z = z_0$ $v_z = 0$, а при $z \rightarrow \infty$ $\rho v_z = 0$, получим

$$\cos \theta \int_{z_0}^{\infty} \rho v_\theta dz + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{z_0}^{\infty} \rho v_\theta dz + \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{z_0}^{\infty} \rho v_\lambda dz = 0. \quad (5.4)$$

Это соотношение является исходным для определения искомой функции; остается лишь вычислить v_θ и v_λ , для чего воспользуемся системой уравнений (5.1) и (5.2) и моделью (3.9). Вводя функцию тока

$$\rho v_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad \rho v_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (5.5)$$

и пользуясь приближенным соотношением

$$\rho \approx 2\omega \cos \theta \psi, \quad (5.6)$$

аналогичным (2.18), можно эту систему представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} \rho v_\lambda &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) - \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} \rho v_\theta &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эта система, с переменной по высоте правой частью, аналогична (3.10); ее можно привести к виду (3.11) для $U = \rho(v_\theta - iv_\lambda)$, и при граничных условиях $\rho(v_\theta - iv_\lambda) = 0$ при $z = z_0$, $\rho(v_\theta - iv_\lambda) < \infty$ при $z \rightarrow \infty$, получим решение, аналогичное (3.25), откуда

$$\begin{aligned} \left(z \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty} &= \frac{n_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \text{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz - \\ &- \frac{m_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \text{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz, \end{aligned}$$

$$\left(z \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty} = - \frac{m_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] dz - \\ - \frac{n_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] dz. \quad (5.8)$$

Здесь n_0 и m_0 берутся по (3.30), k^2 , E_1 , E_2 — по (3.12). Перепишем теперь систему (5.7) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{k^2}{4} \rho v_\lambda = - \frac{k^2}{4} E_2, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) - \frac{k^2}{4} \rho v_\theta = - \frac{k^2}{4} E_1 \quad (5.9)$$

и проинтегрируем ее по z ; получим

$$\int_{z_0}^{\infty} \rho v_\theta dz = \int_{z_0}^{\infty} E_1 dz + \frac{4}{k^2} \left(z \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty}, \\ \int_{z_0}^{\infty} \rho v_\lambda dz = - \int_{z_0}^{\infty} E_2 dz - \frac{4}{k^2} \left(z \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty}. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.8) в (5.10), получим

$$\int_{z_0}^{\infty} \rho v_\theta dz = \int_{z_0}^{\infty} E_1 dz - m_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] dz - \\ - n_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] dz, \quad (5.11) \\ \int_{z_0}^{\infty} \rho v_\lambda dz = - \int_{z_0}^{\infty} E_2 dz - n_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] dz + \\ + m_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] dz.$$

Продифференцируем эти выражения, соответственно, по θ и λ . Для этого заметим, что n_0 , m_0 , $\operatorname{her}_0(k\sqrt{z})$, $\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})$ зависят от θ по (3.12). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\operatorname{her}_0(k\sqrt{z})] = \frac{\sin \theta}{V \cos \theta} V^{\frac{\omega z}{c_0}} [\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})], \\ \frac{\partial}{\partial \theta} [\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] = \frac{\sin \theta}{V \cos \theta} V^{\frac{\omega z}{c_0}} [\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})], \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial \theta} \approx -n_0' \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}} \sqrt{\frac{\omega z_0}{c_0}}, \quad \frac{\partial m_0}{\partial \theta} \approx -m_0' \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}} \sqrt{\frac{\omega z_0}{c_0}},$$

$$n_0' \approx \frac{\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})}{[\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}, \quad (5.13)$$

$$m_0' \approx \frac{2\operatorname{her}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})]}{[\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^3} -$$

$$- \frac{\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})]}{[\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^3}. \quad (5.14)$$

Подставляя (5.11) в (5.4), воспользуясь предварительно соотношениями (5.12) и (5.13), исключая E_1 и E_2 по (3.12), после несложных преобразований получим

$$\cos \theta \int_{z_0}^{\infty} \Delta \phi D dz - \sin \theta \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{c_0}} \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} A dz - \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{c_0}} \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} B dz = 0, \quad (5.15)$$

где

$$D(z, \theta) = m_0 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z}) - n_0 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}),$$

$$A(z, \theta) = \{n_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})] - m_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})]\} \sqrt{z} -$$

$$- [n_0' \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) - m_0' \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] \sqrt{z_0}, \quad (5.16)$$

$$B(z, \theta) = \{m_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})] + n_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})]\} \sqrt{z} -$$

$$- [m_0' \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) + n_0' \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] \sqrt{z_0}.$$

Желая вычислить интегралы, входящие в (5.15), мы должны привлечь барометрическую формулу типа (2.19). Эта формула по использованию соотношения (5.6), вместо (2.18), примет вид

$$\phi = \frac{R \rho T}{2\omega} \left[\varphi + \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \tau_2 dz \right], \quad (5.17)$$

где φ и τ_2 берутся по (2.20).

Подставляя (5.17) в (5.15), получим, окончательно, уравнение нашей задачи в следующем виде:

$$\cos \theta \Delta \varphi - c_3 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - c_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = i(\theta, \lambda). \quad (5.18)$$

Здесь

$$c_3 = \frac{\int_{z_0}^{\infty} \rho T A dz}{\int_{z_0}^{\infty} \rho T D dz} \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{c_0}},$$

$$c_4 = \frac{\int_{z_0}^{\infty} \rho \tilde{T} B dz}{\int_{z_0}^{\infty} \rho \tilde{T} D dz} \sqrt{\frac{m \cos \theta}{c_0}},$$

$$i(\theta, \lambda) = \frac{-g \cos \theta}{R \int_{z_0}^{\infty} \rho \tilde{T} D dz} \cdot \int_{z_0}^{\infty} \left[D \int_{z_0}^{\infty} \Delta \tau_2 dz - \right. \quad (5.19)$$

$$\left. - \sqrt{\frac{m}{c_0 \cos \theta}} \left[\sin \theta \cdot A \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \tau_2}{\partial \theta} dz + B \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz \right] \right] \rho \tilde{T} dz.$$

Заметим, что как φ , так и c_3, c_4, i безразмерны. Дадим приближенное решение уравнения (5.18).

Пусть

$$i(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (f_n^m \cos m\lambda + f_n^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (5.20)$$

где f_n^m и f_n^m — известные постоянные.

Ищем решение для $\varphi(\theta, \lambda)$ в виде (4.14). Пользуясь выражениями типа (4.15) и соотношениями (4.21), легко получим

$$\begin{aligned} \frac{(c_3 - n - 1)(n + 2)(n + m + 1)}{2n + 3} \varphi_{n+1}^m &= c_4 m \varphi_n^m + f_n^m + \\ &+ \frac{(c_3 + n)(n - 1)(n - m)}{2n - 1} \varphi_{n-1}^m, \\ \frac{(c_3 - n - 1)(n + 2)(n + m + 1)}{2n + 3} \varphi_{n+1}^m &= -c_4 m \varphi_n^m + f_n^m + \\ &+ \frac{(c_3 + n)(n - 1)(n - m)}{2n - 1} \varphi_{n-1}^m, \end{aligned} \quad (5.21)$$

откуда

$$C_{n+1}^m = \frac{2n + 3}{(c_3 - n - 1)(n + 2)(n + m + 1)} \left[-c_4 m C_n^m + B_n^m + \right. \\ \left. + \frac{(c_3 + n)(n - 1)(n - m)}{2n - 1} C_{n-1}^m \right], \quad (5.22)$$

$$\text{г.е.} \quad C_n^m = \varphi_n^m + i \varphi_n^m, \quad B_n^m = f_n^m + i f_n^m. \quad (5.23)$$

Выпишем некоторые из коэффициентов C_n^m .

$$C_1^1 = 0,$$

$$C_2^1 = -\frac{5B_1^1}{3 \cdot 3(2 - c_3)}, \quad C_2^2 = 0,$$

$$C_3^1 = \frac{7}{4 \cdot 4(3 - c_3)} \left[c_4 i C_2^1 - B_2^1 \right], \quad C_3^2 = -\frac{7B_2^2}{4 \cdot 5(3 - c_3)}, \quad C_3^3 = 0,$$

$$C_4^1 = \frac{9}{5 \cdot 5(4 - c_3)} \left[c_4 i C_3^1 - B_3^1 - \frac{2 \cdot 2(c_3 + 3)}{5} C_2^1 \right],$$

$$C_4^2 = \frac{9}{5 \cdot 6(4 - c_3)} \left[2c_4 i C_3^2 - B_3^2 \right], \quad C_4^3 = -\frac{9B_3^3}{5 \cdot 7(4 - c_3)}, \quad C_4^4 = 0 \text{ и т. д.}$$

Коэффициенты φ_n^m и $\varphi_n'^m$ определяются из (5.23); в остальном ход вычислений остается прежним. По коэффициентам (5.23) восстанавливается ряд (4.14), а по (2.20) находится распределение атмосферного давления на уровне моря, по (2.19) — на всех уровнях. Функция $I(\theta, \lambda)$ берется из работы [11] или из наблюдений.

В заключение заметим, что можно дать решение задачи, пользуясь более полным уравнением (2.17), вместо (2.18).

Для этого следует функции ψ , ρ , ρ_0 , T' предварительно разложить в ряды по шаровым функциям и затем определить коэффициенты ряда для ψ через коэффициенты ряда для ρ_0 , одновременно используя уравнение (4.2), как в [7].

Водно-энергетический институт
АН Армянской ССР

Поступило 11 II 1956

Ա. Մ. Մխիթարյան

ԾՈՎԻ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ՎՐԱ ՄՅՆՈՒՈՐՏԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԲԱՇԽՄԱՆ ՀԱՐՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածումը բերվում է ծովի մակարդակի վրա մթնոլորտային ճնշման բաշխման խնդրի լուծումը՝ իրական բարակիչնային մթնոլորտի ոչ զոնայ ստացիոնար ցիլիկոլյացիայի դեպքում: Հաշվի է առնվում պլանետար սահմանային շերտի ազդեցությունը ճնշման բաշխման վրա: Խնդրի լուծման համար օգտվում ենք Ֆրիդմանի համասարումից (2.6) տեսքով: Այդ համասարումը մենք պրոյեկտում ենք սֆերիկ կոորդինատային սխեմայի z առանցքի վրա, որտեղ պրոյեկցիոնմանից և հիմնական զոնայ ցիլիկոլյացիայի նկատմամբ գծայնացնելուց հետո ստանում ենք (2.13) համասարումը հոսանքի ֆունկցիայի համար: Ինտեգրելով առջև համասարումը բառ 2-ի Z_0 -ից մինչև ∞ , որտեղ Z_0 ն խորությունը սֆերիկ լուծման միջին բարձրությունն է, և օգտվելով գծայնացված լարումատրական բանաձևից, ստանում ենք մեր խնդրի հիմնական համասարումը (2.21)-ի տեսքով:

Այդ համասարման մեջ մնում է հաշվել այդ կողմի տոաջին անդամը, որը հաշվի է առնում ուղղաձիգ տուրբուլենտ մածուցիկության ազդեցությանը ճնշման բաշխման վրա: Հիշյալ անդամը հաշվելու համար մենք օգտվում ենք Կոչինի համասարումներից և տարրեր գեպքերի համար ստանում ենք (3.8), (3.18), (3.24) և (3.32) արառնայաությունները: Տեղադրելով այդ արառնայաությունները (2.21)-ի մեջ, ստանում ենք չիմնական համասարումը (4.2) տեսքով: Համասարման լուծումը որոնում ենք (4.14) տեսքով, այդ գեպքում շարքի գործակիցների համար ստացվում են (4.16) արառնայաությունները: Հորիզոնական շփման բացակայության գեպքում ստացվում են (4.17) արառնայաությունները, իսկ շփման քնդհանուր բացակայության գեպքում՝ (4.18)-ը:

Հոդվածում բերվում է աղյուսակ, որը տալիս է հորիզոնական և ուղղաձիգ շփումների գերի համեմատական գնահատականը գործակիցների մասնավոր արժեքների գեպքում: Հոդվածում բերվում է նաև (4.19) համասարման լուծումը, որը ստացվում է (2.21)-ից, օգտվելով (1.7) արառնայաությունից: Լուծումը ստացվում է (4.22) տեսքով: § 5-ում բերվում է նույն խնդրի լուծումն այլ եղանակով: Այստեղ ստացվում է (5.18) համասարումը, որի լուծումն ունի (5.25) տեսքը: Հոդվածում արվում են գործակիցներից մի քանիսի արժեքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочин Н. Е. Труды ГГО, в. 4, 1935.
2. Дородницын А. А. Труды ГГО, в. 18, 1937.
3. Динамическая метеорология, ч. II. Гидрометеиздат. 1937, под редакцией Б. И. Извекова и Н. Е. Кочина.
4. Юдин М. И. и Швец М. Е. Труды ГГО, в. 8 (31), 1940.
5. Обухов А. М. Труды Института теорет. геофиз., № 1, 1946.
6. Блинова Е. Н. ДАН СССР, т. 39, № 7, 1943.
7. Блинова Е. Н. ДАН СССР, т. 92, № 3, 1953.
8. Мхитарян А. М. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1955.
9. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Гостехиздат, 1948.
10. Мхитарян А. М. ДАН Армянской ССР, т. XXI, № 1, 1955.
11. Блинова Е. Н. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 1, 1947.
12. Бераян О. С. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 3, 1950.
13. Мхитарян А. М. ДАН Армянской ССР, т. XXI, № 3, 1955.