

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. А. Задоян

Напряженное состояние цилиндрической трубы
в упругой среде с учетом ползучести материала

В настоящей работе исследуется напряженное состояние цилиндрической бетонной трубы, находящейся в упругой среде, при воздействии температурных изменений, усадки бетона и внутреннего гидростатического давления с учетом ползучести материала. Задача рассматривается как плоская и симметричная, причем перемещение по направлению оси трубы считается невозможным.

Решение этой задачи в предположении упругой работы материала дано в работах акад. Б. Г. Галеркина [3], В. Л. Федорова [6], Н. Я. Панарина [5].

§ 1. Температурно-усадочные напряжения в
цилиндрической трубе

Пусть бетонная цилиндрическая труба, находящаяся в упругой среде, подвергается температурным изменениям по закону

$$T = T(r, t),$$

где $T(r, t)$ — температурная функция, зависящая только от r и t .

Положим, что закон изменения усадочных деформаций бетона во времени определяется зависимостью

$$S = S(r, t).$$

Тогда, при суммарном действии температуры и усадки, относительная деформация бетона будет

$$Q(r, t) = S(r, t) - \alpha_1 T(r, t), \quad (1)$$

где α_1 — коэффициент температурного расширения.

Между нормальными компонентами напряжения и деформации при сложном напряженном состоянии, как известно, имеется зависимость [1]:

$$\sigma_r(r, t) = \frac{E(t)Q(r, t)}{1 - 2\nu} + \frac{E(t)}{1 + \nu} \left[\epsilon_r^*(r, t) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \theta^*(r, t) \right] +$$

$$+ E(t) \int_0^1 \sigma_r^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

причем

$$\begin{aligned} \theta^*(r, t) &= \varepsilon_r^*(r, t) + \varepsilon_z^*(r, t) + \varepsilon_\theta^*(r, t), \\ \delta(t, \tau) &= \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\alpha(1-\tau)}], \\ E(\tau) &= E_0 [1 - e^{-\alpha\tau}], \\ \varphi(\tau) &= C_0 + \frac{A_1}{\tau} \end{aligned} \quad (3)$$

E_0 — предельный модуль упругости бетона, α , C_0 , A_1 , γ — некоторые параметры, характеризующие деформативные свойства и условия старения бетона.

В нашей задаче, принимая $\varepsilon_z^*(r, t) = 0$, имеем

$$\theta^*(r, t) = \frac{\partial u^*(r, t)}{\partial r} + \frac{u^*(r, t)}{r},$$

где $U^*(r, t)$ — радиальное перемещение трубы.

Введем функцию напряжения ползучести $\Phi^*(r, t)$, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^*(r, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*(r, t)}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta^*(r, t) &= \frac{\partial^2 \Phi^*(r, t)}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда из (2) получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi^*(r, t) &= \frac{2E(t)Q(r, t)}{1-2\nu} + \frac{E(t)\theta^*(r, t)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \\ &+ E(t) \int_0^1 \nabla^2 \Phi^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

Производя операцию ∇^2 над обеими частями уравнения (5) и пользуясь соотношением

$$\nabla^2 \theta^*(r, t) = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \nabla^2 Q(r, t),$$

получим [2]

$$\nabla^2 \Phi^*(r, t) = \frac{E(t)}{1-\nu} \nabla^2 Q(r, t) + E(t) \int_{t_0}^t \nabla^2 \Phi^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (6)$$

Решение интегрального уравнения (6) можно представить в виде

$$\nabla^2 \Phi^*(r, t) = \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)], \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} L^*[Q(t)] = & E(t_0)Q(t_0) + [Q'(t_0) - \gamma\varphi(t_0)E(t_0)Q(t_0)] \int_{t_0}^t E(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t E(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau \int_{t_0}^{\tau} e^{\int_{t_0}^{\xi} \gamma(\xi) d\xi} [Q''(\xi) + \gamma Q'(\xi)] d\xi, \\ & \gamma(t) = \gamma[1 + \varphi(t)E(t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда решение бигармонического уравнения (7) будет

$$\Phi^*(r, t) = L^*[A(t)]r^2 + L^*[B(t)] \ln r + \frac{1}{1-\nu} \int_0^t \frac{dr}{r} \int_0^r L^*[Q(r, t)] r dr, \quad (9)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — пока неизвестные функции времени t .

Согласно (4) и (9) для компонентов нормальных напряжений находим:

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, t) &= 2L^*[A(t)] + \frac{L^*[B(t)]}{r^2} + \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^t L^*[Q(r, t)] r dr, \\ \sigma_z^*(r, t) &= 2L^*[A(t)] - \frac{L^*[B(t)]}{r^2} - \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^t L^*[Q(r, t)] r dr + \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (2), (5) и (10) следует

$$\sigma_z^*(r, t) = 4L^*[A(t)] + \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)]. \quad (11)$$

Неизвестные функции $A(t)$ и $B(t)$ определяем из граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, t) &= 0, & \text{на внутренней поверхности } r = r_1, \\ \sigma_r^*(r, t) &= -kU^*(r, t), & \text{на наружной поверхности } r = r_2, \end{aligned} \quad (12)$$

причем k — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность кг/см^2 .

Используя первое из граничных условий (12), будем иметь:

$$\begin{aligned} z_1^*(r, t) &= 2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) L^*[A(t)] + \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^r L^*[Q(r, t)] r dr, \\ z_2^*(r, t) &= 2\left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) L^*[A(t)] - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^r L^*[Q(r, t)] r dr + \\ &\quad + \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из соотношений (2), (11), (13) и тождества

$$\frac{L^*[A(t)]}{E(t)} - \int_{r_1}^1 L^*[A(z)] \frac{\partial}{\partial z} z(t, z) dz = A(t)$$

следует, что

$$U^*(r, t) = 2(1+\nu)\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) r A(t) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{r_1}^r Q(r, t) r dr. \quad (14)$$

Согласно второму граничному условию (12) имеем

$$\begin{aligned} &2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) L^*[A(t)] + \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^r L^*[Q(r, t)] r dr = \\ &= -2kr_2(1+\nu)\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) A(t) + kr_2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^r Q(r, t) r dr. \end{aligned} \quad (15)$$

Дважды дифференцируя (15) по t , получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$A''(t) + m^*(t)A'(t) = F(t), \quad (16)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{E^*(t)}{2kr_2(1-\nu^2)} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^r \left[\left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} r(t) \right] \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} \right] \frac{\partial^2 Q(r, t)}{\partial t^2} \right] r dr, \end{aligned} \quad (17)$$

$$E^*(t) = \frac{kr^2(1+\nu)}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)}, \quad (18)$$

$$m^*(t) = \gamma[1 + \varphi^*(t)E^*(t)] - \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)E^*(t)\frac{E'(t)}{E^2(t)}, \quad (19)$$

$$\varphi^*(t) = \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\varphi(t). \quad (20)$$

Начальные условия для уравнения (16) суть:

$$A(\tau_0) = -\frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1-\nu^2)}\left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}\right]\frac{1}{r_2^2}\int_{r_1}^{r_2}Q(r, t)rdr,$$

$$A'(\tau_0) = \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1-\nu^2)}\frac{1}{r_2^2}\int_{r_1}^{r_2}\left\{(1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)Q(r, \tau_0) - \right.$$

$$\left. - \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}\right]Q'(r, \tau_0)\right\}dr. \quad (21)$$

Решение уравнения (16) при начальных условиях (21) можно записать в форме

$$A(t) = A(\tau_0) + A'(\tau_0)\int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\tau)d\tau} d\tau + \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\tau)d\tau} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} m^*(\xi)d\xi} F(\xi)d\xi. \quad (22)$$

Вычисление интегралов в этом выражении весьма затруднительно, и в тех редких случаях, когда оно может быть произведено, приводится к весьма громоздким выкладкам. Поэтому заменяем функции $E(t)$ и $\varphi(t)$ их средними значениями в рассматриваемом интервале следующим образом:

$$E(t) \approx E_1(t) = \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t E(\tau)d\tau = E_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha\tau_0} - e^{-\alpha t}}{\alpha(t - \tau_0)}\right], \quad (23)$$

$$\varphi(t) \approx \varphi_1(t) = \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t \varphi(\tau)d\tau = C_0 + A_1 \frac{\ln \frac{t}{\tau_0}}{t - \tau_0}. \quad (24)$$

Тогда

$$A(t) = A(\tau_0) + A'(\tau_0) \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \int_{\tau_0}^t e^{-m^*(\tau-\tau_0)} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{m^*(\xi-\tau_0)} F(\xi)d\xi. \quad (25)$$

Представим компоненты напряжения в следующем виде, удобном для дальнейшего использования:

$$\sigma_r^*(r, t) = L^*[D_r(r, t)], \quad (26)$$

(r, \varphi, z)

где
$$D_r(r, t) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) A(t) + \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r Q(r, t) r dr, \quad (27)$$

$$D_\theta(r, t) = 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) A(t) - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r Q(r, t) r dr + \frac{1}{1-\nu} Q(r, t), \quad (28)$$

$$D_z(r, t) = 4\nu A(t) + \frac{1}{1-\nu} Q(r, t). \quad (29)$$

§ 2. Напряженное состояние трубы, вызванное периодическими колебаниями температуры воздуха

Рассмотрим напряженное состояние бетонной цилиндрической трубы, помещенной в упругой среде, вызванное гармоническим колебанием температуры воздуха. Пусть с момента $t = \tau_0$ на внутренней поверхности $r = r_1$ установлена температура

$$T = T_0 \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \quad \text{при } t \geq \tau_0,$$

где T_0 и θ — амплитуда и период колебания.

Предположим, что упругая среда при $r \rightarrow \infty$ имеет нулевую температуру. Решение уравнения теплопроводности при указанных граничных условиях имеется в работе С. Г. Гутмана [4]; его можно представить в следующем виде:

$$T(r, t) = a_0(r) \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) + b_0(r) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} a_0(r) &= T_0 \frac{h_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)}{h_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)} \cos \frac{\pi}{2} \left[\gamma_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) - \gamma_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) \right], \\ b_0(r) &= T_0 \frac{h_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)}{h_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)} \sin \frac{\pi}{2} \left[\gamma_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) - \gamma_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Значения функций h_0 и γ_0 , выраженные через функции Ханкеля, приведены в известных таблицах Янке и Эмде; ω — диффузионная постоянная. При больших значениях $\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}}$ выражения (31) имеют вид:

$$a_0(r) = T_0 \sqrt{\frac{r_1}{r}} e^{-\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1)} \cos \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1),$$

$$b_0(r) = T_0 \sqrt{\frac{r_1}{r}} e^{-\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1)} \sin \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1).$$

Принимая в (17) $Q(r, t) = -a_1 T(r, t)$ и учитывая выражения (30), получим

$$F(t) = \frac{2\pi}{\theta} \left[a_1 \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) - b_1 \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \right], \quad (32)$$

где для краткости введены обозначения

$$a_1 = a_1(t) = \frac{E^*(t)}{2kr_2(1+\nu)} \left\{ \left[\gamma - \frac{kr_2(1+\nu)\eta(t)}{E_1(t)} \right] \varepsilon_2(r_2) - \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E_1(t)} \right] \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_1(r_2) \right\}, \quad (33)$$

$$b_1 = b_1(t) = \frac{E^*(t)}{2kr_2(1+\nu)} \left\{ \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E_1(t)} \right] \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r_2) + \left[\gamma - \frac{kr_2(1+\nu)\eta(t)}{E_1(t)} \right] \varepsilon_1(r_2) \right\},$$

$$\varepsilon_1(r) = \frac{a_1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r a_0(r) r dr, \quad \varepsilon_2(r) = \frac{a_1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r b_0(r) r dr. \quad (34)$$

Подставляя (32) в (25) и производя интегрирования, получим

$$A(t) = A(\tau_0) + a_2 + \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} -$$

$$- a_2 \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) + b_2 \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0), \quad (35)$$

где

$$a_2 = \frac{\frac{2\pi}{\theta} a_1 - m^* b_1}{m^{*2} + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2}, \quad b_2 = \frac{m^* a_1 + \frac{2\pi}{\theta} b_1}{m^{*2} + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} \quad (36)$$

Из (27), (35) и (26) находим:

$$\sigma_r^*(t) = E(\tau_0) D_r(\tau_0) + \left[D_r'(\tau_0) - \gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) D_r(\tau_0) - \frac{\gamma - m^*}{\eta - m^*} c_r - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\pi}{\theta} \cdot \frac{\eta a_r - \frac{2\pi}{\theta} b_r}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} \Big] E_1 \frac{1 - e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma - m^*}{\eta - m^*} c_r E_1 \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \\
& + \frac{\left(\frac{2\pi}{\theta} a_r + \eta b_r\right) \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0)\right] - \left(\eta a_r - \frac{2\pi}{\theta} b_r\right) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0)}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} E_1,
\end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned}
a_r &= a_r(r) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \left(\frac{2\pi}{\theta} a_2 + \gamma b_2\right) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_1(r) - \gamma \varepsilon_2(r), \\
b_r &= b_r(r) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \left(\gamma a_2 - \frac{2\pi}{\theta} b_2\right) + \gamma \varepsilon_1(r) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r),
\end{aligned} \quad (38)$$

$$c_r = c_r(r) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2\right], \quad (39)$$

$$D_r(\tau_0) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) A(\tau_0) - \varepsilon_1(r),$$

$$D_r(\tau_0) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r). \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
A(\tau_0) &= \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1+\nu)} \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}\right], \\
A'(\tau_0) &= \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1+\nu)} \left\{ \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}\right] \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r_2) - \right. \\
& \quad \left. - 2(1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)\varepsilon_1(r_2) \right\}.
\end{aligned} \quad (41)$$

Аналогичным образом составляя выражения для $D_\varphi(r, t)$ и $D_\psi(r, t)$ и подставляя в (26), будем иметь

$$\begin{aligned}
\varphi_s(t) &= E(\tau_0)D_\varphi(\tau_0) + \left[D_\psi(\tau_0) - \gamma\varphi(\tau_0)E(\tau_0)D_\psi(\tau_0) - \frac{\gamma - m^*}{\eta - m^*} c_\varphi - \right. \\
& - \frac{2\pi}{\theta} \frac{\eta a_\varphi - \frac{2\pi}{\theta} b_\varphi}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} \Big] E_1 \frac{1 - e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma - m^*}{\eta - m^*} c_\varphi \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} E_1 + \\
& + \frac{\left(\frac{2\pi}{\theta} a_\varphi + \eta b_\varphi\right) \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0)\right] - \left(\eta a_\varphi - \frac{2\pi}{\theta} b_\varphi\right) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0)}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} E_1,
\end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_r &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(\frac{2\pi}{\theta} a_2 + \gamma b_2 \right) - \frac{2\pi}{\theta} [\varepsilon_1(r) - \varepsilon_{01}(r)] + \gamma [\varepsilon_2(r) - \varepsilon_{02}(r)], \\ b_r &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(\gamma a_2 - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right) - \gamma [\varepsilon_1(r) - \varepsilon_{01}(r)] - \frac{2\pi}{\theta} [\varepsilon_2(r) - \varepsilon_{02}(r)], \\ c_r &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} a_z &= 4\gamma \left(\frac{2\pi}{\theta} a_2 + \gamma b_2 \right) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_{01}(r) - \gamma \varepsilon_{02}(r), \\ b_z &= 4\gamma \left(\gamma a_2 - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right) + \gamma \varepsilon_{01}(r) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_{02}(r), \\ c_z &= 4\gamma \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} D_r(\tau_0) &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(\tau_0) + \varepsilon_1(r) - \varepsilon_{01}(r), \\ D_r'(\tau_0) &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A'(\tau_0) + \frac{2\pi}{\theta} [\varepsilon_2(r) - \varepsilon_{02}(r)], \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} D_z(\tau_0) &= 4\gamma A(\tau_0) - \varepsilon_{01}(r), \\ D_z'(\tau_0) &= 4\gamma A'(\tau_0) - \varepsilon_{02}(r), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\varepsilon_{01}(r) = \frac{\alpha_1}{1-\nu} a_0(r), \quad \varepsilon_{02}(r) = \frac{\alpha_1}{1-\nu} b_0(r). \quad (47)$$

Для радиального перемещения получим

$$\begin{aligned} U^*(r, t) &= (1 + \nu) r \left[2 \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(t) + \varepsilon_1(r) \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_2(r) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

§ 3. Усадочные напряжения

Исследуем напряженное состояние бетонной цилиндрической трубы, помещенной в упругой среде, вызванное от усадки бетона. При плоском деформированном состоянии интенсивность усадки бетона может быть выражена зависимостью [1]:

$$S(r, t) = S_0(r) [e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}], \quad (49)$$

где функция $S_0(r)$ выражает закон распределения интенсивности усадки по толщине трубы, а выражение в скобках характеризует рост интенсивности усадки по времени.

Тогда, согласно (6), функция напряжения ползучести $\Phi^*(r, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^4 \Phi^*(r, t) = \frac{E(t)[e^{-st_0} - e^{-st}]}{1 - \nu} \nabla^2 S_0(r) + E(t) \int_{t_0}^t \nabla^4 \Phi^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (50)$$

Рассмотрим случай, когда $S_0(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 S_0(r) = 0.$$

Это позволяет нам искать компоненты напряжения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_z^*(r, t)$ в виде

$$\sigma_r^*(r, t) = 2A(t) + \frac{B(t)}{r^2}, \quad (51)$$

$$\sigma_z^*(r, t) = 2A(t) - \frac{B(t)}{r^2}, \quad (52)$$

где неизвестные функции $A(t)$ и $B(t)$ подлежат определению из граничных условий

$$\sigma_r^*(r, t) = 0, \quad \text{при} \quad r = r_1,$$

$$\sigma_r^*(r, t) = -kU^*(r, t), \quad \text{при} \quad r = r_2. \quad (12)$$

Удовлетворяя первому граничному условию (12), для $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_z^*(r, t)$ получим следующие выражения:

$$\sigma_r^*(r, t) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(t), \quad (53)$$

$$\sigma_z^*(r, t) = 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(t). \quad (54)$$

Для определения $A(t)$ предварительно запишем выражения для радиального перемещения $U^*(r, t)$:

$$\begin{aligned} U^*(r, t) = & -(1 + \nu) r S(t) + \frac{1 + \nu}{E(t)} [(1 - \nu) \sigma_z^*(r, t) - \nu \sigma_r^*(r, t)] - \\ & - (1 + \nu) r \int_{t_0}^t [(1 - \nu) \sigma_z^*(r, \tau) - \nu \sigma_r^*(r, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (55)$$

Подставляя значения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_z^*(r, t)$ из (53) и (54) в (55) и удовлетворяя второму граничному условию (12), получим, что неизвестная функция $A(t)$ должна удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$A(t) = \frac{1}{2} E^*(t) S(t) + \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) E^*(t) \int_{\tau_0}^t A(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} z(t, \tau) d\tau. \quad (56)$$

Дважды дифференцируя уравнение (56), после некоторых преобразований, получим

$$A''(t) + m^*(t) A'(t) = \frac{1}{2} E^*(t) [S''(t) + \gamma S'(t)] \quad (57)$$

при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} A(\tau_0) &= 0, \\ A'(\tau_0) &= \frac{1}{2} E^*(\tau_0) S'(\tau_0). \end{aligned} \quad (58)$$

Решение уравнения (57) при начальных условиях (58) имеет вид:

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2} E^*(\tau_0) S'(\tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\xi) d\xi} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\xi) d\xi} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} m^*(\xi) d\xi} E(\xi) [S''(\xi) + \gamma S'(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя в (59) выражение $S(t) = S_0 [e^{-s\tau_0} - e^{-st}]$ и учитывая допущение (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2} E^*(t) S_0 s e^{-s\tau_0} \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma - s}{m^* - s} \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma - s}{m^* - s} \frac{1 - e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Тогда компоненты напряжения (53) и (54) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, t) &= \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) E^*(t) S_0 s e^{-s\tau_0} \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma - s}{m^* - s} \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma - s}{m^* - s} \frac{1 - e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^*(r, t) &= \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) E^*(t) S_0 s e^{-s\tau_0} \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma - s}{m^* - s} \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma - s}{m^* - s} \frac{1 - e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Из условия задачи и (2) следует

$$\sigma_z^*(r, t) = \nu[\sigma_r^*(r, t) + \sigma_\varphi^*(r, t)] + L^*[S(t)]. \quad (63)$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, t) = 2\nu E^*(t) S_0 \operatorname{se}^{-s\tau_0} & \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma-s}{m^*-s} \frac{1-e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\} + \\ & + E_1(t) S_0 \operatorname{se}^{-s\tau_0} \left\{ \frac{\eta-\gamma}{\eta-s} \frac{1-e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma-s}{\eta-s} \frac{1-e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь использовано соотношение

$$L^*[S(t)] = E_1(t) S_0 \operatorname{se}^{-s\tau_0} \left[\frac{\eta-\gamma}{\eta-s} \frac{1-e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma-s}{\eta-s} \frac{1-e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right]. \quad (65)$$

При предположении упругой работы материала получим следующие значения компонентов напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) &= \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) E^*(t) S(t), \\ \sigma_\varphi(r, t) &= \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) E^*(t) S(t). \end{aligned} \quad (66)$$

Тогда из (61) и (62) получим окончательно следующие формулы:

$$\sigma_r^*(r, t) = \sigma_r(r, t) \left\{ \frac{\gamma-s}{m^*-s} + \frac{s}{m^*} \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{1-e^{-s(t-\tau_0)}} \right\}, \quad (67)$$

$$\sigma_z^*(r, t) = \sigma_z(r, t) \left\{ \frac{\gamma-s}{m^*-s} + \frac{s}{m^*} \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{1-e^{-s(t-\tau_0)}} \right\}, \quad (68)$$

где функция

$$\chi(t, \tau_0) = \frac{\gamma-s}{m^*-s} + \frac{s}{m^*} \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{1-e^{-s(t-\tau_0)}} \quad (69)$$

характеризует влияние ползучести бетона на напряжение.

Из структуры формул (67) — (69) следует, что влияние свойства ползучести бетона одинаково по толщине трубы. Вместо формул (63) и (65), $\sigma_z^*(r, t)$ можно представить и в следующем виде:

$$\sigma_z^*(r, t) = \nu[\sigma_r(r, t) + \sigma_\varphi(r, t)]\chi(t, \tau_0) + E_1(t) S(t)\chi_0(t, \tau_0), \quad (70)$$

где $\chi_0(t_0, \tau)$ имеет значение

$$\chi_0(t, \tau_0) = \frac{\gamma - s}{\eta - s} + \frac{s}{\eta} \frac{\eta - \gamma}{\eta - s} \frac{1 - e^{-\frac{\gamma(\tau - \tau_0)}{\eta(\eta - s)}}}{1 - e^{-\frac{\gamma(t - \tau_0)}{\eta(\eta - s)}}}. \quad (71)$$

Из (73) и (75) следует, что

$$\chi(\tau_0, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \tau_0} \chi(t, \tau_0) = 1, \quad \chi_0(\tau_0, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \tau_0} \chi_0(t, \tau_0) = 1.$$

а с течением времени эти функции монотонно убывают.

При $t \rightarrow \infty$ (т. е. при больших t) имеем

$$\chi(\infty, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t, \tau_0) = \frac{\gamma}{m^*} \left(1 - \frac{s}{\gamma} \left[1 - \frac{E^*(\tau_0)}{E^*(\infty)} \right] \right) < 1,$$

$$\chi_0(\infty, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi_0(t, \tau_0) = \frac{1}{1 + C_0 E_0} < 1.$$

Функции $\varepsilon_r(r, t)$ и $\varepsilon_z(r, t)$ возрастают более быстрыми темпами, чем убывают $\chi(t, \tau_0)$, поэтому в конечном счете $\varepsilon_r^*(r, t)$ и $\varepsilon_z^*(r, t)$ возрастают.

Численный пример. Пусть замыкание бетонного кольца, отношение радиусов которого $\frac{r_2}{r_1} = 1,25$, производилось в возрасте $\tau_0 = 7$ дней;

$kr^2 = 0,1$ $E_0 = 2 \cdot 10^4$ кг/см²; $\nu = \frac{1}{6}$; $S_0 = 2 \cdot 10^{-4}$; $s = 0,0085 \frac{1}{\text{день}}$; параметры ползучести возьмем следующие: $A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}$ см²/кг день; $C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}$ см²/кг; $\alpha = 0,03 \frac{1}{\text{день}}$; $\gamma = 0,026 \frac{1}{\text{день}}$; $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Предварительно вычислим значения функции

$$m^*(t) = \gamma [1 + \varphi^*(t) E^*(t)] \quad (72)$$

для некоторых значений t . Здесь

$$\varphi^*(t) = \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \left[C_0 + A_1 \frac{\ln \frac{t}{t - \tau_0}}{t - \tau_0} \right]. \quad (73)$$

$$E^*(t) = \frac{kr_2(1 + \nu)}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1 + \nu)}{E_1(t)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)}. \quad (74)$$

$$E_1(t) = E_0 \left[1 - \frac{e^{-\frac{\gamma t}{\eta(\eta - s)}} - e^{-\frac{\gamma \tau_0}{\eta(\eta - s)}}}{\frac{\gamma(t - \tau_0)}{\eta(\eta - s)}} \right]. \quad (75)$$

Ниже в табл. 1 приводятся некоторые значения m^* и E^* по формулам (72) и (73).

Таблица 1

Значения $m^*(t)$ и $E^*(t)$ по (72) и (73)

t	7	14	28	60	90	180	1 год	∞
$m^*(t)$	0,0358	0,0378	0,0405	0,0401	0,0404	0,0405	0,0401	0,0399
$\frac{E^*(t)}{10^5}$	0,2003	0,2517	0,2862	0,3784	0,4042	0,4317	0,4453	0,4553

Из этой таблицы следует, что $m^*(t)$ меняется в течение времени незначительно.

В табл. 2 приведены результаты вычисления по формулам (68) и (69).

Таблица 2

Значения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\chi(t, \tau_0)$ по (68) и (69)

t	7	14	28	60	90	180	1 год	∞
$\chi(t, \tau_0)$	1,0000	0,7770	0,6591	0,5413	0,5274	0,5240	0,5410	0,5320
$\sigma_r^*(r_1, t)$	0,0000	0,4256	1,1621	2,8000	4,0565	6,5669	8,6208	9,1298
$\sigma_r^*(r_0, t)$	0,0000	0,3809	1,0402	2,5061	3,6398	5,8778	7,7162	8,1718
$\sigma_c^*(r_2, t)$	0,0000	0,3490	0,9330	2,2959	3,3315	5,3849	7,0691	7,4864

По табл. 2 приходим к следующим заключениям:

1. Напряжения, возникающие в трубе от усадки бетона, в течение времени растут и примерно через год достигают своих максимальных значений.

2. Учет ползучести уменьшает напряжения почти в 2 раза.

3. По направлению к внутренней поверхности трубы напряжения растут, но эти изменения не существенны.

§ 4. Напряжения, вызванные внутренним гидростатическим давлением

Рассмотрим напряженное состояние бетонной трубы, помещенной в упругой среде, под действием внутреннего гидростатического равномерного давления p . Функция напряжения в этом случае удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 \Phi^*(r, t) = 0.$$

Согласно с этим полагаем

$$\sigma_r^*(r, t) = 2A(t) + \frac{B(t)}{r^2}, \quad (51)$$

$$\sigma_c^*(r, t) = 2A(t) - \frac{B(t)}{r^2}. \quad (52)$$

Имеем граничные условия

$$\begin{aligned}\sigma_r^*(r, t) &= -p, & \text{при} & \quad r = r_1, \\ \sigma_r^*(r, t) &= -kU^*(r, t), & \text{при} & \quad r = r_2.\end{aligned}\quad (75)$$

Используя первое условие (75), получим

$$\begin{aligned}\sigma_r^*(r, t) &= 2\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)A(t) - \frac{r_1^2}{r^2}p, \\ \sigma_r^*(r, t) &= 2\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)A(t) + \frac{r_1^2}{r^2}p,\end{aligned}\quad (76)$$

$$\sigma_z^*(r, t) = 4\nu A(t). \quad (77)$$

Последняя формула получена из (2) при $Q(r, t) = 0$ и $\varepsilon_z^*(r, t) = 0$.

Между перемещением $U^*(r, t)$ и компонентами напряжения (76) имеется зависимость

$$\begin{aligned}U^*(r, t) &= \frac{1+\nu}{E(t)} r \left[(1-\nu)\sigma_z^*(r, t) - \nu\sigma_r^*(r, t) \right] - (1+\nu)r \int_{\tau_0}^t \left[(1-\nu)\sigma_z^*(r, \tau) - \nu\sigma_r^*(r, \tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau.\end{aligned}\quad (78)$$

Подставляя в (78) значения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_z^*(r, t)$ из (76), удовлетворяя второму условию (75), получим, что неизвестная функция $A(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned}2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)A(t) - \frac{r_1^2}{r_2^2}p &= -\frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} \left[2\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)A(t) + \frac{r_1^2}{r_2^2}p \right] + \\ &+ kr_2(1+\nu) \int_{\tau_0}^t \left[2\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)A(\tau) + \frac{r_1^2}{r_2^2}p \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau.\end{aligned}$$

которое двукратным дифференцированием приводится к дифференциальному уравнению

$$A''(t) + m^*(t)A'(t) = 0, \quad (79)$$

с начальными условиями

$$A(\tau_0) = \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1+\nu)} \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right] \frac{r_1^2}{r_2^2} p, \quad (80)$$

$$\begin{aligned}A'(\tau_0) &= -\frac{1}{2} \gamma(\tau_0) E^*(\tau_0) \left\{ 1 + \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \frac{E^*(\tau_0)}{kr_2(1+\nu)} \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right] \right\} \frac{r_1^2}{r_2^2} p.\end{aligned}\quad (81)$$

Решение дифференциального уравнения (79) с начальными условиями (80) и (81) будет

$$A(t) = A(\tau_0) + A'(\tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\tau) d\tau} d\tau.$$

Учитывая слабую изменяемость $m^*(t)$ и делая ряд преобразований, находим

$$A(t) = A(\tau_0) \left\{ 1 - \frac{2(1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)}{1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}} \cdot \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} \right\}. \quad (82)$$

Подставляя (82) в выражение $\sigma_r^*(r, t)$ и преобразуя, будем иметь

$$\sigma_r^*(r, t) = \sigma_r(r, \tau_0) \left\{ 1 - \beta_r(r, \tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}] \right\}, \quad (83)$$

где

$$\sigma_r(r, \tau_0) = \frac{1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} - \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right]}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)} \frac{r_1^2}{r_2^2} p, \quad (84)$$

$$\beta_r(r, \tau_0) = \frac{2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) (1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)}{m^* \left\{ 1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} - \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right] \right\}}. \quad (85)$$

Подставляя (82) в выражение $\sigma_z^*(r, t)$, получим

$$\sigma_z^*(r, t) = \sigma_z(r, \tau_0) \left\{ 1 - \beta_z(r, \tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}] \right\}, \quad (86)$$

где

$$\sigma_z(r, \tau_0) = \frac{1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} + \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right]}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)} \frac{r_1^2}{r_2^2} p, \quad (87)$$

$$\beta_z(r, \tau_0) = \frac{2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) (1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)}{m^* \left\{ 1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} + \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right] \right\}}. \quad (88)$$

Из (77) и (82) получим:

$$\sigma_z^*(r, t) = \sigma_z(r, \tau_0) \left\{ 1 - \beta_z(\tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}] \right\}. \quad (89)$$

где

$$\sigma_z(r, \tau_0) = \frac{2\nu \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right]}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} p. \quad (90)$$

$$\beta_z(\tau_0) = \frac{2(1-\nu)r_1^2(\tau_0)E^*(\tau_0)}{m^* \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right]}. \quad (91)$$

Введем в (83), (86) и (89) обозначение

$$\chi_r(r, t, \tau_0) = 1 - \beta_r(r, \tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}]_{(r, \tau, t)}. \quad (92)$$

где $\beta_r, \beta_\varphi, \beta_z$ определяются формулами (85), (88), (91), и сделаем некоторые замечания относительно общего характера изменения компонентов напряжения во времени. Влияние ползучести бетона на величины этих напряжений характеризуется функциями $\chi_r(r, t, \tau_0)_{(r, \tau, t)}$. Так как $m^* > 0$, то в (92) выражение, находящееся в квадратных скобках, монотонно возрастает. В зависимости от знака и значения $\beta_r(r, \tau_0)$ функция $\chi_r(r, t, \tau_0)$ может убывать или возрастать. Из условия

$$\frac{\partial \chi_r(r, t, \tau_0)}{\partial t} = -\beta_r m^* e^{-m^*(t-\tau_0)} = 0 \quad (r, \tau, z)$$

находим, что при $t \rightarrow \infty$ функция (92) принимает экстремальное значение. Далее, имеем

$$\left. \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial t^2} \right|_{t=\infty} = \beta_r m^{*2} e^{-m^*(t-\tau_0)} \Big|_{t=\infty} = \beta_r m^{*2} \quad (r, \tau, z)$$

Из (88) и (91) следует, что β_φ и β_z положительны. Следовательно, χ_φ и χ_z (а поэтому и $\sigma_\varphi(r, t)$ и $\sigma_z(r, t)$) монотонно убывают, стремясь к своим минимальным значениям, при $t \rightarrow \infty$:

$$1 - \beta_r(r, \tau_0) = \chi_r(r, \infty, \tau_0) \leq \chi_r(r, t, \tau_0) \leq 1,$$

$$1 - \beta_z(\tau_0) = \chi_z(r, \tau_0) \leq \chi_z(\infty, \tau_0) \leq 1.$$

Из (85) видно, что $\beta_r < 0$, поэтому χ_r и σ_r монотонно возрастают, стремясь к своим максимальным значениям при $t \rightarrow \infty$:

$$1 - \beta_r(r, \tau_0) = \chi_r(r, \infty, \tau_0) \leq \chi_r(r, t, \tau_0) \leq 1.$$

Численный пример. Пусть $\tau_0 = 180$ дн.; $\nu = 0,1$; $\frac{r_2}{r_1} = 1,5$, а остальные параметры имеют те же значения, которые приведены в численном примере предыдущего параграфа.

Для нашего примера возьмем $m^* = 0,04$.

Таблица 3

Значения χ_r и χ_z по формулам (92)

$t - \tau_0$	7	14	28	60	90	180	1 год	∞
$\chi_r(r_1, t)$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\chi_r(r_0, t)$	1,0413	1,0792	1,1280	1,1804	1,1972	1,2060	1,2032	1,2061
$\chi_r(r_2, t)$	1,2339	1,4176	1,6749	1,9515	2,3038	2,0861	2,0370	2,0883
$\chi_z(r_1, t)$	0,9472	0,9058	0,8477	0,7853	0,7653	0,7549	0,7517	0,7514
$\chi_z(r_0, t)$	0,9413	0,9006	0,8334	0,7736	0,7526	0,7416	0,7414	0,7411
$\chi_z(r_2, t)$	0,9391	0,8913	0,8243	0,7524	0,7234	0,7173	0,7170	0,7167

Из последней таблицы приходим к заключению:

1. Напряжение $\sigma_r^*(r, t)$, вследствие ползучести бетона, затухает на 25–30 %.

2. Напряжение $\sigma_z^*(r, t)$, вследствие ползучести, растет до двух раз.

3. В толще трубы, по направлению к наружной поверхности, влияние ползучести растет, но эти изменения не существенны.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 1 X 1956

Մ. Ա. Զադոյան

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻ
ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ ՆՅՈՒԹԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱԴՐՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մասնագետի միջավայրում գտնվող խողովակի լարվածային վիճակի մասին գոյություն ունեն մի շարք աշխատանքներ [3], [5], [6]:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաջադեպ միջավայրում գտնվող բետոնյա խողովակի ջերմության փոխադրվածություններից, բետոնի կծկումից և ներքին ճիգընթացային ճնշումից առաջացած լարվածային վիճակը՝ սողքի հաշվառումով:

Փգտվելով սողքի տեսության [1] հիմնական հավասարումներից, արտածված են բանաձևեր և բերված են թվային օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ սողքի հետևանքով ժամանակի ընթացքում լարումները խողովակում զգալի նվազում են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., 1952.
2. Александровский С. В. Температурные напряжения в массивных бетонных блоках от экзотермии цемента. Сборник НИИ по строительству «Массивные и

стержневые конструкции, Министерство строительства предприятий машиностроения. М., 1952.

3. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, т. I, М., 1952.

4. Гутман С. Г. Определение тепловых напряжений при гармонических колебаниях температуры. Известия ВНИИГ, т. 47 (1952) и т. 51 (1954).

5. Панарин Н. Я. Расчет облицовки туннеля под воздействием температуры. Известия ВНИИГ, т. 23, 1938.

6. Федоров В. Л. Расчет облицовок некоторых гидротехнических туннелей на внутреннее давление. Известия ВНИИГ, т. 25, 1939.